

非静力学モデルによる大気境界層の数値シミュレーション手法

Numerical Simulation Scheme for the Atmospheric Boundary Layer by a Nonhydrostatic Model

高 木 賢 二 吉 田 正 邦
太 田 勝 矢

要 約

本研究は、局所地形の影響を考慮するために水平方向の解析分解能が 100m の風環境、屋外温熱環境を解析、予測することを目的としている。水平分解能 100m のシミュレーションを行うには、鉛直方向の運動を水平方向の運動と同様に取り扱う非静力学モデルの開発が必要となる。本論文では、非静力学近似による大気境界層の数値シミュレーションのために、非圧縮性流体の運動方程式に対して成層している大気境界層に適した圧力と温度の変数である Eksner 関数と温位を導入し、地形に沿う座標系である z^* 座標へ変換した基礎方程式の導出過程を明らかにする。また、この基礎方程式を計算するための新しいシミュレーション方法と境界条件を提案し、それらの導出の経過が明確になるよう述べる。なお、本シミュレーションでは地表面の境界条件の制約により、構造物の形状を直接考慮することはできない。

目 次

- I. はじめに
- II. シミュレーション基礎方程式
- III. シミュレーション方法
- IV. 境界条件他
- V. おわりに

I. はじめに

本研究は、局所地形の影響を考慮するために水平方向の解析分解能が 100m の風環境、屋外温熱環境を解析、予測することを目的としている。これにより、局所地形の影響を考慮した詳細な構造物の耐風設計や空調負荷設計が可能になり、環境負荷が小さい構造物の建設が実現できる。また、太陽光や風力といった自然エネルギーを利用した発電施設設計や首都機能移転など都市再生のための地域再開発計画への適用など、様々な分野での活用が期待される。

既に当研究所では、水平分解能 500m 程度のシミュレーション（マクロ大気モデル）を実用化しており¹⁾、大規模な地域計画や風力発電施設の立地選定に活用している。

このマクロ大気モデルは、静力学近似が適用され鉛直方向の大気運動を近似的に取り扱っているが、水平分解能 100m のシミュレーション（ミクロ大気モデル）は、鉛直方向の運動を水平方向の運動と同様に取り扱う非静力学モデルが必要となる。さらに、地球の自転によるコリオリ力や大気乱流の熱的安定性による構造の変化、地形変化等マクロ大気モデルの特徴も同時に考慮しなければならない。

非静力学近似による大気境界層の数値シミュレーションモデルは、気象研究所²⁾や高度情報科学技術研究機構³⁾など 2, 3 の例しか報告されておらず、ミクロ大気モデルの開発にあたっては大気境界

層における大気運動の物理的な原理から検討する必要がある。

本論文では、ミクロ大気モデルの基本となる基礎方程式、シミュレーション方法及び境界条件について、その導出の経過が明確になるように述べる。

II. シミュレーション基礎方程式

1. 流体の支配方程式（Navier-Stokes の方程式）

シミュレーションは、風速(U, V, W)、温位(θ)、水蒸気量(Q)の収支を計算する。これらの運動を支配する方程式は連続の式、運動量保存式、熱エネルギー保存式及び水蒸気量保存式となる。これらの支配方程式は、非圧縮性流体を仮定している。

(連続の式)

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

(運動量保存)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -ADV(U) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + fV + DIF(U) \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -ADV(V) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} - fU + DIF(V) \quad (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -ADV(W) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g + DIF(W) \quad (4)$$

(熱エネルギー保存)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -ADV(\theta) + DIF(\theta) \quad (5)$$

(水蒸気量保存)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -ADV(Q) + DIF(Q) \quad (6)$$

キーワード：数値計算，環境シミュレーション，
風環境，屋外温熱環境

ここで、ADVは移流項、DIFは拡散項を表し、

$$ADV(\Phi) = U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V \frac{\partial \Phi}{\partial y} + W \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (7)$$

$$DIF(\Phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{h\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{h\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{v\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (8)$$

であり、 g は重力加速度、 f はコリオリパラメータ、 ρ_0 は空気の代表密度、 $K_{h\phi}$ は水平方向の乱流拡散係数、 $K_{v\phi}$ は鉛直方向乱流拡散係数である。

2. Eksner 関数と温位

大気境界層は、成層大気であるため気圧や気温の鉛直方向変化が大きい。そこで、大気境界層のシミュレーションでは、圧力（気圧） P の代わりに圧力と温度のポテンシャル値である Eksner 関数 Π を、温度（気温） T の代わりに温位 θ を用いる。Eksner 関数は、以下のように定義する。

$$\Pi = C_p(P/P_0)^{\kappa} \quad (9)$$

ここで、 C_p は大気の熱容量、 κ は比熱比で、 P_0 は標準大気圧である。上式を空間的に微分すると、

$$\partial \Pi / \partial x = C_p \partial (P/P_0)^{\kappa} / \partial x = C_p (\kappa P^{\kappa-1} / P_0^{\kappa}) \partial P / \partial x = (\kappa \Pi) / P \partial P / \partial x$$

となる。これと、温位 θ の定義式(10)式、空気の状態方程式(11)式、ガス常数 R_d の定義(12)式から、

$$\theta = (P_0/P)^{\kappa} T = C_p T / \Pi \quad (10)$$

$$P = \rho R_d T \quad (11)$$

$$\kappa C_p = R_d \quad (12)$$

(2)式中の圧力の微分項を整理すると、

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{P}{\kappa \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\rho R_d T}{\rho_0 \kappa \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho_0} \theta \frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad (13)$$

となる。また、(3)式、(4)式中の圧力の y 、 z 方向微分項についても同様に変換する。

さらに、 $\rho/\rho_0 \theta$ は Boussinesq 近似により、

$$\begin{aligned} \rho/\rho_0 \theta &= [1 + \Delta \rho/\rho_0] \theta \approx [1 - \Delta \theta/\theta_0] \theta = [1 - \Delta \theta/\theta_0] [\theta_0 + \Delta \theta] \\ &= \theta_0 [1 - \Delta \theta/\theta_0] [1 + \Delta \theta/\theta_0] = \theta_0 [1 - (\Delta \theta/\theta_0)^2] \approx \theta_0 \end{aligned} \quad (14)$$

と近似できる。ここで、下添え字 0 は領域の代表値を表す。したがって、

$$\rho/\rho_0 \theta \approx \theta_0/\theta \quad (15)$$

から、(2)～(4)式は以下ようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -ADV(U) - \theta_0 \frac{\partial \Pi}{\partial x} + fV + DIF(U) \quad (16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -ADV(V) - \theta_0 \frac{\partial \Pi}{\partial y} - fU + DIF(V) \quad (17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -ADV(W) - \theta_0 \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\theta_0}{\theta} g + DIF(W) \quad (18)$$

3. 座標変換

本シミュレーションでは、Fig.1のように地形に沿った座標系に変換して計算を行う。用いる座標系は z^* 座標系とよばれ、以下に示すように定義される。

$$z^* = (z - z_g) z_T / h \quad (19)$$

$$h = z_T - z_g \quad (20)$$

ここで、 z_T は計算領域高さ、 z_g は地表の標高である。

前述の支配方程式、(1)、(5)、(6)、(16)～(18)式を座標変換する。

各式の偏微分項は Chain Rule に則って変換する。

$$\partial/\partial t = \partial/\partial t^* + \partial z^*/\partial t \partial/\partial z^* = \partial/\partial t^* \quad (21)$$

$$\partial/\partial x = \partial/\partial x^* + \partial z^*/\partial x \partial/\partial z^* = \partial/\partial x^* + Gx/Gz \partial/\partial z^* \quad (22)$$

$$\partial/\partial y = \partial/\partial y^* + \partial z^*/\partial y \partial/\partial z^* = \partial/\partial y^* + Gy/Gz \partial/\partial z^* \quad (23)$$

$$\partial/\partial z = \partial z^*/\partial z \partial/\partial z^* \quad (24)$$

$$Gz = h/z_T \quad (25)$$

$$Gx = (z^*/z_T - 1) \partial z_g / \partial x \quad (26)$$

$$Gy = (z^*/z_T - 1) \partial z_g / \partial y \quad (27)$$

ここで、上添え字 $*$ は座標変換後の変数である。これらの関係式に従って各項をまとめると、以下ようになる。

なお、水平方向成分変数(x , y , U , V)と時間 t は座標変換後も変化しないので、上添え字 $*$ を省略している。

$$\frac{\partial GzU}{\partial x} + \frac{\partial GzV}{\partial y} + \frac{\partial GzW^*}{\partial z^*} = DIV^*(U, V, W) = 0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{1}{Gz} ADV^*(U) - \frac{\theta_0}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Pi}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Pi}{\partial z^*} \right] \\ &\quad + fV + \frac{1}{Gz} DIF^*(U) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{1}{Gz} ADV^*(V) - \frac{\theta_0}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Pi}{\partial y} + \frac{\partial Gy \Pi}{\partial z^*} \right] \\ &\quad - fU + \frac{1}{Gz} DIF^*(V) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{Gz} ADV^*(W) - \frac{\theta_0}{Gz} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial z^*} \right] - \frac{\theta_0}{\theta} g + \frac{1}{Gz} DIF^*(W) \quad (31)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{Gz} ADV^*(\theta) + \frac{1}{Gz} DIF^*(\theta) \quad (32)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{1}{Gz} ADV^*(Q) + \frac{1}{Gz} DIF^*(Q) \quad (33)$$

$$ADV^*(\Phi) = \frac{\partial GzU\Phi}{\partial x} + \frac{\partial GzV\Phi}{\partial y} + \frac{\partial GzW^*\Phi}{\partial z^*} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} DIF^*(\Phi) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(Gz K_{h\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gz K_{h\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{1}{Gz} \frac{\partial}{\partial z^*} \left[K_{v\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$W^* = (W + GxU + GyV)/Gz \quad (36)$$

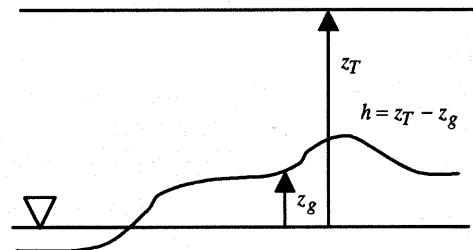


Fig. 1 鉛直方向座標系
(Terrain-Following Coordinates)

4. 気圧と温位の取り扱い

(29), (30)式の右辺第2項と(31)式の右辺第2, 3項にある Π と Θ に、
 次のような計算領域の代表値からの変化量 Π' , Θ' を導入する。

$$\Pi(x, y, z, t) = \Pi_0(z) + \Pi'(x, y, z, t) \quad (37)$$

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta' \quad (38)$$

ここで、気圧の代表値 $\Pi_0(z)$ は静力学平衡を仮定して次のように定義する。

$$\partial \Pi_0 / \partial z^* = -Gz g / \Theta_0 \quad (39)$$

(31)式の右辺第2項の圧力項と第3項の浮力項は次のようになる。

$$\begin{aligned} & -\Theta_0 / Gz \left[\partial \Pi / \partial z^* \right] - g \Theta_0 / \Theta \\ & = -\Theta_0 / Gz \left[\partial \Pi_0 / \partial z^* + \partial \Pi' / \partial z^* \right] - g \Theta_0 / (\Theta_0 + \Theta') \\ & = -\Theta_0 / Gz \left[-Gz g / \Theta_0 + \partial \Pi' / \partial z^* \right] - g \Theta_0 / (\Theta_0 + \Theta') \\ & = -\Theta_0 / Gz \partial \Pi' / \partial z^* - g (\Theta_0 - \Theta_0 - \Theta') / (\Theta_0 + \Theta') \\ & = -\Theta_0 / Gz \partial \Pi' / \partial z^* + g \Theta' / (\Theta_0 + \Theta') \\ & \equiv -\Theta_0 / Gz \partial \Pi' / \partial z^* + g \Theta' / \Theta_0 \end{aligned} \quad (40)$$

となる。ここで、 $\Theta' \ll \Theta_0$ とした。

また、(29)式の圧力項である右辺第2項は、

$$\begin{aligned} & -\Theta_0 / Gz \left[\partial Gz \Pi / \partial x^* + \partial Gx \Pi / \partial z^* \right] \\ & = -\Theta_0 / Gz \left[\partial Gz \Pi_0 / \partial x^* + \partial Gz \Pi' / \partial x^* \right. \\ & \quad \left. + \partial Gx \Pi_0 / \partial z^* + \partial Gx \Pi' / \partial z^* \right] \\ & = -\Theta_0 / Gz \left[Gz Gx g / \Theta_0 + \Pi_0 \partial Gz / \partial x^* + \partial Gz \Pi' / \partial x^* \right. \\ & \quad \left. - Gx Gz g / \Theta_0 + \Pi_0 \partial Gx / \partial z^* + \partial Gx \Pi' / \partial z^* \right] \\ & = -\Theta_0 / Gz \left[\partial Gz \Pi' / \partial x^* + \partial Gx \Pi' / \partial z^* \right] \end{aligned} \quad (41)$$

となる。上式中の $\partial \Pi_0 / \partial x^*$ は z^* 座標系の変換式(22)式と(39)式より

$$\begin{aligned} \partial \Pi_0 / \partial x & = \partial \Pi_0 / \partial x^* + Gx / Gz \partial \Pi_0 / \partial z^* \\ & = \partial \Pi_0 / \partial x - Gx g / \Theta_0 = 0 \\ \therefore \partial \Pi_0 / \partial x & = Gx g / \Theta_0 \end{aligned} \quad (42)$$

となる。また、(25)~(27)式から、

$$\partial Gz / \partial x = \partial Gx / \partial z^* \quad (43)$$

の関係を用いている。(30)式中の圧力項も同様に変換すると、支配方程式は、以下のようになる。

$$\frac{\partial Gz U}{\partial x} + \frac{\partial Gz V}{\partial y} + \frac{\partial Gz W^*}{\partial z^*} \equiv \text{DIV}^*(U, V, W) = 0 \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} & = -\frac{1}{Gz} \text{ADV}^*(U) - \frac{\Theta_0}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Pi}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Pi}{\partial z^*} \right] \\ & \quad + fV + \frac{1}{Gz} \text{DIF}^*(U) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} & = -\frac{1}{Gz} \text{ADV}^*(V) - \frac{\Theta_0}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Pi}{\partial y} + \frac{\partial Gy \Pi}{\partial z^*} \right] \\ & \quad - fU + \frac{1}{Gz} \text{DIF}^*(V) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{Gz} \text{ADV}^*(W) - \frac{\Theta_0}{Gz} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial z^*} \right] + \frac{\Theta}{\Theta_0} g + \frac{1}{Gz} \text{DIF}^*(W) \quad (47)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{1}{Gz} \text{ADV}^*(\Theta) + \frac{1}{Gz} \text{DIF}^*(\Theta) \quad (48)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{1}{Gz} \text{ADV}^*(Q) + \frac{1}{Gz} \text{DIF}^*(Q) \quad (49)$$

$$\text{ADV}^*(\Phi) = \frac{\partial Gz U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial Gz V \Phi}{\partial y} + \frac{\partial Gz W^* \Phi}{\partial z^*} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \text{DIF}^*(\Phi) & = \frac{\partial}{\partial x} \left(Gz K_{h\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gz K_{h\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ & \quad + \frac{1}{Gz} \frac{\partial}{\partial z^*} \left[K_{v\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} \right] \end{aligned} \quad (51)$$

ただし、 Π と Θ は(37), (38)式のような代表値からの変化量(Π' , Θ')であるが、以降は上添え字(' , *)を省略する。

III. シミュレーション方法

1. 速度、温位、水蒸気量の計算方法(松野法)

(44)~(51)式を基礎式としてシミュレーション計算を行う。時間進行は、松野法を用いる。各式を以下のように整理する。

$$\frac{\partial Gz \Phi}{\partial t} = -\text{ADV}^*(\Phi) + \text{PRS}(\Phi) + \text{RHS}(\Phi) \quad (52)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Theta \\ Q \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\text{PRS} = \begin{bmatrix} -\Theta_0 [\partial Gz \Pi / \partial x + \partial Gx \Pi / \partial z^*] \\ -\Theta_0 [\partial Gz \Pi / \partial y + \partial Gy \Pi / \partial z^*] \\ -\Theta_0 [1 / Gz \partial Gz \Pi / \partial z^*] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\text{RHS} = \begin{bmatrix} fGzV + \text{DIF}^*(U) \\ -fGzU + \text{DIF}^*(V) \\ Gz \frac{\Theta_0}{\Theta} g + \text{DIF}^*(W) \\ \text{DIF}^*(\Theta) \\ \text{DIF}^*(Q) \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\text{ADV}^*(\Phi) = \partial Gz U \Phi / \partial x + \partial Gz V \Phi / \partial y + \partial Gz W^* \Phi / \partial z^* \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \text{DIF}^*(\Phi) & = \frac{\partial}{\partial x} \left(Gz K_{h\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gz K_{h\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ & \quad + \frac{1}{Gz} \frac{\partial}{\partial z^*} \left[K_{v\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} \right] \end{aligned} \quad (57)$$

$$W^* = (W + GxU + GyV) / Gz \quad (58)$$

変数 Φ の時間前進を松野法⁵⁾で以下のように離散化する。

$$\begin{aligned} Gz / \Delta t (\Phi^n - \Phi^{n-1}) & = -\text{ADV}(\Phi^n) + \text{PRS}^n + \text{RHS}^n \\ Gz / \Delta t (\Phi^{n+1} - \Phi^n) & = -\text{ADV}(\Phi^n) + \text{PRS}^n + \text{RHS}^n \end{aligned} \quad (59)$$

ここで、 Δt は計算時間ステップである。

松野法の時間前進は移流項に関して多段の陰解法であるが、移流項以外の速度と圧力に関しては陽解法である。しかし、圧力に関する計算では誤差が含まれやすいので、計算精度を向上させる必要がある。そこで、圧力に関して計算精度を向上させるため、時刻 n と $n+1$ の圧力を混在させて時間的な平均勾配を考えた、次のような半陰解法により計算を行う。

2. 圧力の計算方法

(59)式の第2式により求めた値 Φ^{n+1} は精度の高い予測値であるが、連続の式を保障していないので次時刻の値として採用せず予測値 Φ^n として、この予測値が連続の式を満足するように修正して正しい

Φ^{n+1} を求める。

$$\begin{aligned}\Phi^+ &= \Phi^n + \Delta t / Gz \left(-ADV(\Phi') + PRS^n + RHS^n \right) \\ \Phi^{n+1} &= \Phi^n + \Delta t / Gz \left(-ADV(\Phi') + PRS^{n+1} + RHS^n \right)\end{aligned}\quad (60)$$

上式の U 成分は以下になる。

$$\begin{aligned}U^+ &= U^n + \Delta t / Gz \left(-\Theta_0 \left[\frac{\partial Gz \Pi^n}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Pi^n}{\partial z^*} \right] \right. \\ &\quad \left. - ADV(U') + RHS(U)^n \right) \\ U^{n+1} &= U^n + \Delta t / Gz \left(-\Theta_0 \left[\frac{\partial Gz \Pi^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Pi^{n+1}}{\partial z^*} \right] \right. \\ &\quad \left. - ADV(U') + RHS(U)^n \right)\end{aligned}\quad (61)$$

上記2式の差をとると、

$$U^{n+1} - U^+ = \Delta t \Theta_0 / Gz \left(\frac{\partial Gz \Pi^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Pi^{n+1}}{\partial z^*} \right. \\ \left. - \frac{\partial Gz \Pi^n}{\partial x} - \frac{\partial Gx \Pi^n}{\partial z^*} \right) \quad (62)$$

となる。

V 及び W 成分も同様に、

$$V^{n+1} - V^+ = \Delta t \Theta_0 / Gz \left(\frac{\partial Gz \Pi^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial Gy \Pi^{n+1}}{\partial z^*} \right. \\ \left. - \frac{\partial Gz \Pi^n}{\partial y} - \frac{\partial Gy \Pi^n}{\partial z^*} \right) \quad (63)$$

$$W^{n+1} - W^+ = -\Delta t \Theta_0 / Gz^2 \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \quad (64)$$

ここで、 $\Delta \Pi$ は圧力の修正量

$$\Delta \Pi = \Pi^{n+1} - \Pi^n \quad (65)$$

である。

次に、(62)式～(64)式の Divergence を求め、 z^* 座標系へ変換する。

$$\frac{\partial}{\partial x} [U^{n+1} - U^+] = -\frac{\Delta t \Theta_0}{Gz} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{Gx}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right\} \quad (66)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [V^{n+1} - V^+] = -\frac{\Delta t \Theta_0}{Gz} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial y} + \frac{\partial Gy \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{Gy}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial y} + \frac{\partial Gy \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right\} \quad (67)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [W^{n+1} - W^+] = -\frac{\Delta t \Theta_0}{Gz^3} \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial z^*} \quad (68)$$

(66)～(68)式を足し合わせると、左辺 (LHS) と右辺 (RHS) は以下になる。

$$LHS = RHS \quad (69)$$

$$RHS = -\frac{\Delta t \Theta_0}{Gz} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{Gx}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial y} + \frac{\partial Gy \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{Gy}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial y} + \frac{\partial Gy \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{Gz^2} \right) \frac{\partial^2 (Gz \Delta \Pi)}{\partial z^*{}^2} \right\} \quad (70)$$

$$\begin{aligned}LHS &= \frac{1}{Gz} \left\{ \frac{\partial Gz U^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial Gz V^{n+1}}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z^*} (W^{n+1} + Gx U^{n+1} + Gy V^{n+1}) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{Gz} \left\{ \frac{\partial Gz U^+}{\partial x} + \frac{\partial Gz V^+}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z^*} (W^+ + Gx U^+ + Gy V^+) \right\} \\ &= DIV(U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1}) / Gz - DIV(U^+, V^+, W^+) / Gz \\ &= -DIV(U^+, V^+, W^+) / Gz\end{aligned}\quad (71)$$

ここで、 DIV は連続の式 (44) 式からの残差を表し、上式は時刻 $n+1$ での DIV^{n+1} が連続の式を満足しているとして 0 と考える。

以上から、

$$DIV(U^+, V^+, W^+) = \Delta t \Theta_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{Gx}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial y} + \frac{\partial Gy \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{Gy}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi}{\partial y} + \frac{\partial Gy \Delta \Pi}{\partial z^*} \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{Gz^2} \right) \frac{\partial^2 (Gz \Delta \Pi)}{\partial z^*{}^2} \right\} \quad (72)$$

次に、(62)～(64)式を用いて U, V, W を反復修正しながら、圧力と速度の同時緩和により計算する。(62)式より、

$$U^{n+1^{l+1}} - U^+ = -\frac{\Delta t \Theta_0}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi^{l+1}}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Delta \Pi^{l+1}}{\partial z^*} \right] \quad (73)$$

$$U^{n+1^l} - U^+ = -\frac{\Delta t \Theta_0}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \Delta \Pi^l}{\partial x} + \frac{\partial Gx \Delta \Pi^l}{\partial z^*} \right] \quad (74)$$

ここで、上添え字 l は反復回数をあらわし、 $\Delta \Pi$ は、

$$\Delta \Pi^l = \Pi^{n+1^l} - \Pi^n \quad (75)$$

である。なお、反復計算の初回は、 $U^{n+1^1} = U^+$ 、 $\Pi^{n+1^1} = \Pi^+$ であり、反復計算の結果は、 $U^{n+1^\infty} = U^{n+1}$ となる。(73)、(74)式の差をとり、

$$\delta U = U^{n+1^{l+1}} - U^{n+1^l} \quad (76)$$

$$\delta \Pi = \Pi^{n+1^{l+1}} - \Pi^{n+1^l} \quad (77)$$

とすると、

$$\delta U = -\frac{\Delta t \Theta_0}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \delta \Pi}{\partial x} + \frac{\partial Gx \delta \Pi}{\partial z^*} \right] \quad (78)$$

が成り立ち、 $\delta \Pi$ が分かれば、速度 U の補正量 δU が計算できる。 V, W も同様にあらわす。

$$\delta V = -\frac{\Delta t \Theta_0}{Gz} \left[\frac{\partial Gz \delta \Pi}{\partial y} + \frac{\partial Gy \delta \Pi}{\partial z^*} \right] \quad (79)$$

$$\delta W = -\frac{\Delta t \Theta_0}{Gz^2} \left[\frac{\partial Gz \delta \Pi}{\partial z^*} \right] \quad (80)$$

$\delta \Pi$ と δU の関係は、 $l+1$ 回目の残差も連続の式を満たすと考え、(78)式が(62)式と同型であることから、同様に Divergence をもとめる。

$$\begin{aligned} & DIV(\delta U, \delta V, \delta W) \\ &= DIV(U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1})^{*+1} - DIV(U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1})^* \quad (81) \\ &= -DIV(U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1})^* \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} & -DIV(U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1})^* \\ &= -\Delta t \Theta_0 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial G_z \delta \Pi}{\partial x} + \frac{\partial G_x \delta \Pi}{\partial z^*} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{G_x}{G_z} \left[\frac{\partial G_z \delta \Pi}{\partial x} + \frac{\partial G_x \delta \Pi}{\partial z^*} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial G_z \delta \Pi}{\partial y} + \frac{\partial G_y \delta \Pi}{\partial z^*} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{G_y}{G_z} \left[\frac{\partial G_z \delta \Pi}{\partial y} + \frac{\partial G_y \delta \Pi}{\partial z^*} \right] \\ & + \frac{1}{G_z^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{\partial G_z \delta \Pi}{\partial z^*} \end{aligned} \right\} \quad (82) \end{aligned}$$

上式は Poisson 方程式であり、次のような点 SOR 法により計算する。実際に Fig.2 に示すメッシュ上の変数を離散化した計算式は以下のようになり、Gz はメッシュ中央で定義する。なお、上添え字 $n+1$ は省略している。

(ステップ 1)

松野法により計算した予測値 U^l, V^l, W^l の残差 DIV^l を中心差分により計算する。

$$\begin{aligned} DIV_{i,j,k}^l &= \frac{\partial G_z U^l}{\partial x} + \frac{\partial G_z V^l}{\partial y} + \frac{\partial G_z W^l}{\partial z^*} \\ &= \frac{(G_{z_{i+1,j}} + G_{z_{i,j}})U_{i+1,j,k}^l - (G_{z_{i,j}} + G_{z_{i-1,j}})U_{i,j,k}^l}{2\Delta x} \\ &+ \frac{(G_{z_{i,j+1}} + G_{z_{i,j}})V_{i,j+1,k}^l - (G_{z_{i,j}} + G_{z_{i,j-1}})V_{i,j,k}^l}{2\Delta y} \\ &+ \frac{1}{\Delta z_k} [G_{z_{i,j}} W_{i,j,k+1}^l - G_{z_{i,j}} W_{i,j,k}^l] \end{aligned} \quad (83)$$

(ステップ 2)

(82) 式により残差による圧力の増加量を求める。

$$\delta \Pi_{i,j,k} = \frac{\omega DIV_{i,j,k}^l}{\Delta t \Theta_0 M(\Delta x, \Delta y, \Delta z, G_x, G_y, G_z)} \quad (84)$$

ここで、 $M(\Delta x, \Delta y, \Delta z, G_x, G_y, G_z)$ は (82) 式を 2 次中心差分で離散化して優対角近似した係数、 ω は加速係数である。

(ステップ 3)

速度の修正量を (78)~(80) 式から計算する。

$$\begin{aligned} U_{i,j,k}^{l+1} &= U_{i,j,k}^l - \frac{\Delta t \Theta_0}{G_{z_{i,j}}} \left[\frac{G_{z_{i,j}} \delta \Pi_{i,j,k}}{\Delta x} + \frac{G_{x_{i,j,k}} \delta \Pi_{i,j,k}}{\Delta z_k} \right] \\ U_{i+1,j,k}^{l+1} &= U_{i+1,j,k}^l + \frac{\Delta t \Theta_0}{G_{z_{i,j}}} \left[\frac{G_{z_{i,j}} \delta \Pi_{i,j,k}}{\Delta x} + \frac{G_{x_{i,j,k}} \delta \Pi_{i,j,k}}{\Delta z_k} \right] \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} V_{i,j,k}^l &= V_{i,j,k}^l - \frac{\Delta t \Theta_0}{G_{z_{i,j}}} \left[\frac{G_{z_{i,j}} \delta \Pi_{i,j,k}}{\Delta y} + \frac{G_{y_{i,j,k}} \delta \Pi_{i,j,k}}{\Delta z_k} \right] \\ V_{i,j+1,k}^{l+1} &= V_{i,j+1,k}^l + \frac{\Delta t \Theta_0}{G_{z_{i,j}}} \left[\frac{G_{z_{i,j}} \delta \Pi_{i,j,k}}{\Delta y} + \frac{G_{y_{i,j,k}} \delta \Pi_{i,j,k}}{\Delta z_k} \right] \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} W_{i,j,k}^{l+1} &= W_{i,j,k}^l - \frac{\Delta t \Theta_0}{G_{z_{i,j}}^2} \left[\frac{G_{z_{i,j}} \delta \Pi_{i,j,k}}{\Delta z_k} \right] \\ W_{i,j,k+1}^{l+1} &= W_{i,j,k+1}^l + \frac{\Delta t \Theta_0}{G_{z_{i,j}}^2} \left[\frac{G_{z_{i,j}} \delta \Pi_{i,j,k}}{\Delta z_k} \right] \end{aligned} \quad (87)$$

(ステップ 4)

圧力を (77) 式から修正する。

$$\Pi_{i,j,k}^{k+1} = \Pi_{i,j,k}^k + \Delta \Pi_{i,j,k} \quad (88)$$

(ステップ 5)

予測値 U^k, V^k, W^k の残差 DIV^k が無視できるまでステップ 1 からステップ 4 を繰り返す。

なお、式中の下添え字 i, j, k は Fig.2 に示すメッシュ上の定義点での値を表し、 $\Delta x, \Delta y$ は等間隔の水平方向メッシュ幅、 Δz は不等間隔の鉛直方向メッシュ幅である。

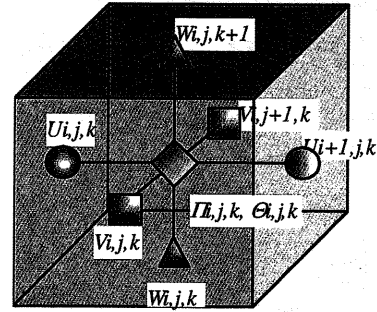


Fig.2 メッシュレイアウト
(Mesh Layout)

IV. 境界条件他

1. 地表境界条件

地表面、海表面の境界条件は、各表面を幾つかのカテゴリーに分類し、各カテゴリーの表面が独立に大気と運動量、熱エネルギー及び水蒸気のフラックスの交換を行うと考える。各計算方法の詳細は紙面の都合上省略するが、詳しくは文献(6)を参照願いたい。

なお、本シミュレーションではこれらの境界条件により、地表面の状態を平均化した境界を想定しているため、構造物の形状に起因する街区内構造物でのビル風など、個々の構造物の形状を直接考慮することはできない。

2. 側面境界条件

側面境界での変数 ϕ_{bnd} は次のようにあたえる。

$$\phi_{bnd} = \alpha \phi_{ext} + (1 - \alpha) \phi_{RAD} \quad (89)$$

ここで、 ϕ_{ext} は側面境界での参照値で、ネスティングしない場合は地衡風、ネスティングする場合は大領域での計算結果の内挿値である。 ϕ_{RAD} は以下に示す放射条件に基づく境界値である。 α は重み係数で、

$$\begin{aligned} \alpha &= 1.0 && \text{流入時} \\ \alpha &= 0.5 && \text{流出時} \end{aligned} \quad (90)$$

である。流入流出は境界面に直行する風速成分により判断する。

(1) 境界面に直交する風速成分 (Normal Wind)

境界面に直交する風速成分の境界条件は Orlanski の open boundary⁷⁾を修正して用いる。

境界面に直交する風速成分 $\phi_b (U, V)$ の境界条件に、次のような放射条件を用いる。

$$\partial \phi_b / \partial t + C \partial \phi_b / \partial x = 0 \quad (91)$$

ここで、 C は位相速度である。

上式を時間に関して陽的に、空間に関して領域内部方向へ離散化して、位相速度 C について整理すると以下ようになる。

$$\frac{\phi_b^{n+1} - \phi_b^n}{\Delta t} + C \frac{\phi_b^n - \phi_{in}^n}{\Delta x} = 0, C = -\frac{\phi_b^{n+1} - \phi_b^n}{\phi_b^n - \phi_{in}^n} \frac{\Delta x}{\Delta t} = C^* \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (92)$$

ここで、 C^* は無次元位相速度であり、 $C^*=1$ のとき $\phi_b^{n+1} = \phi_{in}^{n+1}$ となり自由流出条件となる。

しかし、上式で求められる位相速度には、単一点での計算のため単一モードによる数値誤差が含まれ易い。そこで、境界面から内部の3点での平均無次元位相速度を用いる。

$$C^*_{bl} = \frac{\phi_{in-1,j}^{n+1} - \phi_{in-1,j}^n}{\phi_{in-2,j}^n - \phi_{in-1,j}^n}, C^* = \min \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 C^*_{bi}, 1.0 \right) \quad (93)$$

ここで j は鉛直方向メッシュ番号、 $in-1$ は境界面から1つ内側のメッシュ番号である。

時間前進は松野法とし、鉛直方向の輸送は陰的に離散化して、次のように計算する。境界点 in 、時刻 $n+1$ での物理量 $\phi_{in,j}$ は、

$$\phi_{in,j}^* = \phi_{in,j}^n - C^* \left(\phi_{in,j}^n - \phi_{in-1,j}^n \right) \quad (94)$$

$$\phi_{RAD}^{n+1} = \phi_{in,j}^n - C^* \left(\phi_{in,j}^* - \phi_{in-1,j}^* \right) + \Delta t VDF(\phi_{in,j}^{n+1}) \quad (95)$$

$$C^*_{bi} = \frac{\phi_{in-1,j}^* - \phi_{in-1,j}^n}{\phi_{in-2,j}^n - \phi_{in-1,j}^n}, C^* = \min \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 C^*_{bi}, 1.0 \right) \quad (96)$$

となる。ここで $VDF(\phi)$ は物理量 ϕ の鉛直方向拡散量である。

(2) その他の変数 (境界面に平行な速度成分、温位、水蒸気)

境界面に直行する風速成分以外の変数は、次のように放射条件の値を計算して、(89)式から境界値を求める。

$$\phi_{RAD}^{n+1} = \phi_{in-1}^n \quad ; \quad \text{流入時} \quad (97a)$$

$$\phi_{RAD}^{n+1} = 2\phi_{in-1}^n - \phi_{in-2}^n \quad ; \quad \text{流出時} \quad (97b)$$

3. 上部境界条件と乱流拡散モデル

上部の境界条件は自由流出条件とし、風速成分、温位、水蒸気量は鉛直方向に勾配なしとする。

各変数の拡散項(51)式の中にある乱流拡散係数は、マクロ大気モデルに準じて⁹⁾、水平方向乱流拡散係数については Deardorff の SGS モデル、鉛直方向乱流拡散係数については Mellow & Yamada の Level.2 を用いる。

V. おわりに

現在、ベル型山岳地形による山岳波の数値シミュレーションを行い、本シミュレーション手法の検証を行っている。本シミュレーションでは上部の圧力境界条件に自由流出条件を設定しているが、成層した大気状態を考慮すると、気圧変動に起因する重力波の影響を受けやすく、非静力学近似の境界条件としては不合理な点が多い。また、2日間の現象のシミュレーション計算に高速 EWS を用いても10日程度かかっており、計算時間負荷も適用の面から大きな問題である。

今後は、圧力の境界条件に改良を加えらるとともに計算時間短縮に向けた改良も行う予定である。

参考文献

- 1) 高木賢二, 太田勝矢, 吉田正邦; 広域環境予測シミュレーションの研究, 鹿島技術研究所年報, 46, (1998), pp.177-182.
- 2) Kazuo Saito, Teruyuki Kato, Hisaki Eito and Chiashi Muroi; Numerical Prediction Division unified Nonhydrostatic Model, Doc. Of the Meteorological Research Institute, (2000).
- 3) K. Tsuboki, A. Sakakibara and N. Kamiya; Parallel Computing of Cloud Resolving Storm Simulator (CRSS) for Simulation Experiments of Severe Storms, Proc. of the 3rd Int. Workshop on Next Generation Climate Models for Advanced High Performance Computing Facilities, (2001), pp.28-30.
- 4) 吉田正邦, 太田勝矢, 高木賢二; 台風時の風向風速を評価する大気境界層モデル, 鹿島技術研究所年報, 49, (2000), pp.137-142.
- 5) 高木賢二, 山田大彦, 植松康; 局地風数値シミュレーションの計算方法および乱流モデルの比較検討—大気と海洋の3次元数値シミュレーションに関する研究—その1—, 日本風工学会誌, 72, (1997.7), pp.59-72.
- 6) 吉田正邦, 太田勝矢, 高木賢二; 大気境界層の数値シミュレーションにおける下部境界モデルと雲モデル, 鹿島技術研究所年報, 50, (2001)
- 7) I. Orlanski; A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, J. Computational Physics, 21, (1976), pp.251-269.