

ばねと剛体要素から成る積層ゴム用離散型力学モデル

A Discrete Mechanical Model Composed of Springs and Rigid Elements of Laminated Rubber Bearings

飯 塚 真 巨
高 岡 栄 治

I. はじめに

免震レトロフィットや最近検討又は一部実施されている杭頭免震では、積層ゴムの挟み込む片方の梁が無い、あるいは軽微な場合がある。このような場合、積層ゴム端部の回転が大きくなる傾向にあるが、端部回転が積層ゴムの力学挙動に及ぼす影響については、不明な点が多い。そこで、端部回転を受ける積層ゴムの力学挙動の解明に向けて、端部回転が考慮でき、積層ゴムの古典的力学理論として広く知られている Haringx 理論¹⁾との整合性を有し、非線形への拡張および架構解析への適用が容易と考えられる力学モデルを提案する。本モデルは積層ゴムの終局挙動の解析を念頭に考案したものであるが、本論では基礎的検討を目的に、線形ばねを仮定して定式化し、Haringx 理論との整合性について検討する。

II. 力学モデル

1. モデルの概要

モデルの概念図を Fig.1 に示す。積層ゴムを高さ方向に n 等分に分割する。等分割された各要素（「単位要素」と呼ぶ）は、材端の回転ばね、回転ばね同士を繋ぐ剛体要素、剛体要素と直交して配されるせん断ばねから成っている。ばね特性は全要素で共通である。単位要素の剛性方程式は、Haringx 理論の基本的考え方に倣い、P- Δ 効果による付加曲げモーメントを考慮し、また曲げで傾斜した面

に沿う鉛直荷重の分力が付加せん断力として作用する点を考慮して導出する。

2. 単位要素の剛性方程式

単位要素を Fig.2 に示す。単位要素の全長は l/n (l : 積層ゴムの全高さ(中間鋼板を含み、フランジプレートを除く)、 n : 分割数)である。材端には、鉛直荷重 P 、水平力 Q_i, Q_j 、曲げモーメント M_i, M_j が作用し、水平変位 δ_i, δ_j 、回転角 θ_i, θ_j が生じている。せん断ばねには、せん断力 Q_s が作用し、せん断変形 δ_s が生じ、各回転ばねには曲げモーメント $-M_i, -M_j$ が作用し、回転変形角 φ_i, φ_j が生じている。荷重・変形の正方向は Fig.2 のとおりである。定式化に際し、鉛直方向の変位を無視し、回転角は微小であるとする。また、材料は線形であると仮定する。

力のつり合いは下式で表される。

$$Q_s = P(\theta_i + \varphi_i) + Q_i \quad (1)$$

$$M_i + M_j + P(\delta_i - \delta_j) + Q_i(l/n) = 0 \quad (2)$$

$$Q_i + Q_j = 0 \quad (3)$$

変形の幾何学的関係は下式で表される。

$$\delta_i - \delta_j = (\theta_i + \varphi_i)(l/n) + \delta_s \quad (4)$$

$$\theta_i + \varphi_i = \theta_j + \varphi_j \quad (5)$$

ばねの荷重-変形関係は下式である。

$$Q_s = K_s \delta_s \quad (6)$$

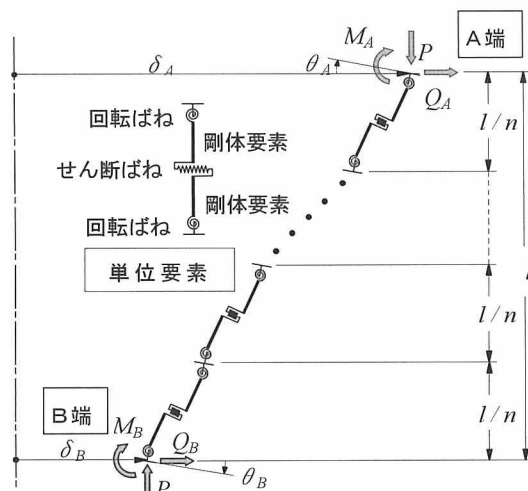


Fig.1 ばね-剛体離散型モデルの概念図
(A Discrete Model Composed of Springs and Rigid Elements)

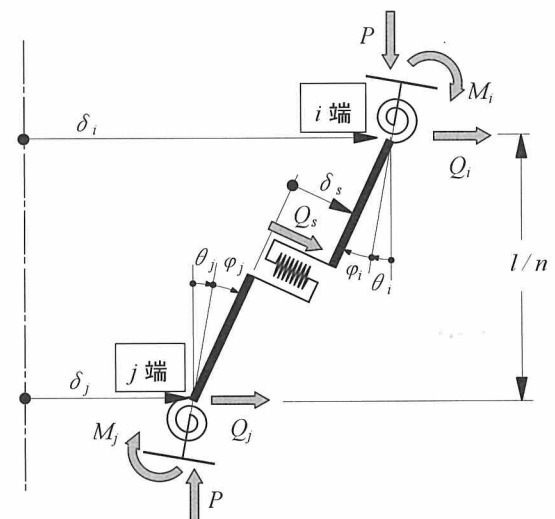


Fig.2 単位要素の概念図
(A Unit Element)

本報は、日本建築学会構造系論文集 607 号 (2006.9) 掲載論文の要約である。

キーワード：免震構造、積層ゴム、力学モデル、架構解析

$$M_i = -K_R \varphi_i \quad (7)$$

$$M_j = -K_R \varphi_j \quad (8)$$

ここで、 K_S はせん断ばねの剛性、 K_R は回転ばねの剛性である。

(1)～(8)式より、以下の剛性方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_0} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & -k_1 & k_2 \\ & k_3 & -k_2 & k_4 \\ & & k_1 & -k_2 \\ \text{sym.} & & & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \theta_i \\ \delta_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここに、

$$k_0 = 2K_R + K_S(l/n)^2 + P(l/n) \quad (10.a)$$

$$k_1 = 2K_R K_S - K_S(l/n)P - P^2 \quad (10.b)$$

$$k_2 = -K_R \{K_S(l/n) + P\} \quad (10.c)$$

$$k_3 = K_R [K_R + (l/n)\{K_S(l/n) + P\}] \quad (10.d)$$

$$k_4 = -K_R^2 \quad (10.e)$$

なお、 $n=1$ のモデルの剛性マトリクスの(1,1)要素 k_{11} は、Koh-Kelly モデル²⁾の水平剛性式と同じである。

3. ばね定数

せん断ばねの剛性は下式で与えられる。

$$K_S = \frac{S_s}{l/n} = \frac{GA}{h/n} \quad (11)$$

ここで、 S_s はせん断剛性、 G はせん断弾性係数、 A は断面積、 h はゴム層の総厚さである。

回転ばねの剛性は、以下のようにして求められる。せん断ばねを剛としたモデルで、一端固定他端水平移動自由回転拘束の境界条件および鉛直荷重ゼロを考える。このモデルの両端 A 端・B 端の自由度に縮約した剛性マトリクスを K_R の関数として求め、その k_{11} 要素を曲げ要素の理論式 ($12S_b/l^3$) に等しくおいて、回転ばねが求められる。分割数 n に対する回転ばね定数は下式で与えられる。

$$K_R = 2n \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \frac{S_b}{l} = 2n \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \frac{E_b I}{h} \quad (12)$$

ここで、 S_b は曲げ剛性、 E_b は曲げに関する見かけの縦弾性係数、 I は断面 2 次モーメントである。

4. 解法

単位要素の剛性マトリクスから積層ゴム全体の剛性マトリクスを組み上げ、想定している端部境界条件から、すべての節点荷重、節点変位を求める。このように、本モデルの解法は、一般の架構解析と同じである。したがって、建物全体系の架構解析にも容易に組み込むことができるものと考えられる。

III. 事例検討

両端(A端,B端)の自由度だけに縮約した剛性マトリクスの要素を Haringx 理論に基づく結果¹⁾と比較する。検討用積層ゴムの形状と主な特性は、直径 $D=800\text{mm}$ 、全高さ $l=356\text{mm}$ 、ゴム層の総厚 $h=5.0\text{mm} \times 40$ 枚 $=200\text{mm}$ 、ゴムのせん断弾性係数 $G=0.392\text{N/mm}^2$ 、曲げに関するみかけの縦弾性係数 $E_b'=742\text{N/mm}^2$ 、座屈応力度 $\sigma_{cr}=53.2\text{N/mm}^2$ である。

分割数は $n=1, 2, 4, 8$ の 4 ケースとした。(9)式から、剛性マトリクスは基本的には $k_{11}, k_{12}, k_{22}, k_{24}$ の 4 要素で成り立っている。両端の自由度だけに縮約した剛性マトリクスでも同様である。 $k_{22} \approx -k_{24}$ であったので、 k_{11}, k_{12}, k_{22} について結果を示す。 k_{11} を S_s/l で、 k_{12} を P_{cr} で、 k_{22} を S_b/l でそれぞれ無次元化し、 P/P_{cr} との関係を図.3 に示す。ただし、 P_{cr} ($=\sigma_{cr}A$) は座屈荷重である。図.3 から、 k_{11}, k_{12}, k_{22} に関して、以下のことがわかる。

$k_{11}: P/P_{cr}$ が 0.8 程度以下の領域で、 n を問わず本モデルは Haringx 理論とほとんど一致している。 $n=8$ では P/P_{cr} が 1 以上の領域でも Haringx 理論とほとんど一致している。

$k_{12}: P/P_{cr}$ が 1 を大きく超えた領域まで、 n を問わずに本モデルは Haringx 理論とほとんど一致している。

$k_{22}: n=1$ および $n=2$ では、 P/P_{cr} の全領域で本モデルは Haringx 理論との隔たりが大きい。しかし、 $n=4$ ではその隔たりはかなり小さくなり、 $n=8$ では P/P_{cr} が 1 を大きく超えた領域でも Haringx 理論とほとんど一致している。

IV. まとめ

ばねと剛体要素から成る積層ゴム用の離散型力学モデルを提案した。このモデルは積層ゴムの端部回転が考慮でき、架構解析への適用が容易であると考えられる。検討の結果、モデルの要素分割を細かくすれば、Haringx 理論の結果に一致することが確認された。

参考文献

- 1) 飯塚真巨；積層ゴムの剛性マトリクス，建築学会大会学術講演梗概集，構造 B 巻，(1995)，pp.619-620.
- 2) C.G.Koh., J.M.Kelly ; A simple mechanical model for elastomeric bearings used in base isolation, Int. j.mech.sci., 30, (1988), pp.933-943.

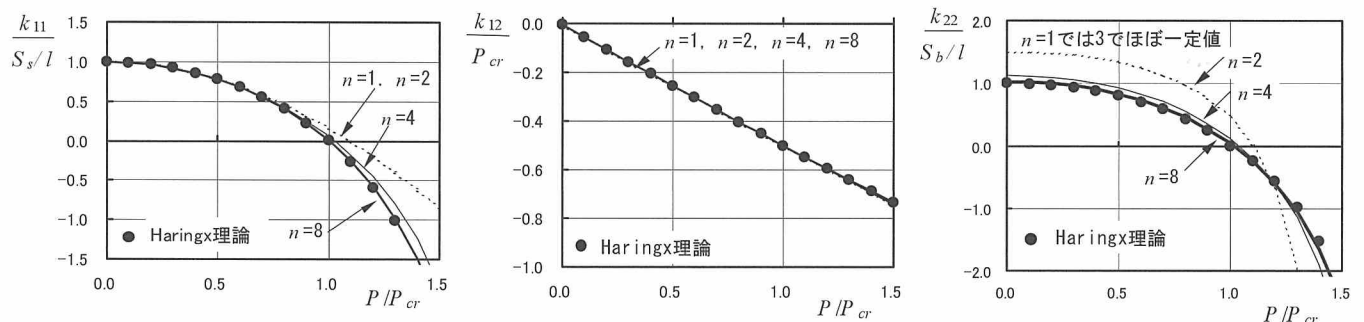


Fig.3 剛性マトリクスの要素におけるばね-剛体離散型モデルと Haringx 理論の比較
(Comparison of Elements of Stiffness Matrix for the Discrete Model with Those for the Haringx Theory)