7-2 雑音環境下における非古典的量子状態の連続量量子テレポーテーション

7-2 Continuous variable teleportation of nonclassical states in noisy environment

武岡正裕　番　雅司　佐々木雅英
Masahiro TAKEOKA, Masashi BAN, and Masahide SASAKI

要旨

連続量量子テレポーテーションによる非古典的量子状態の伝送について議論する。雑音環境下における2モードスクイズド状態による量子テレポーテーションのプロトコルを、Glauber-SudarshanのP関数を用いて定式化し、「非古典深度」を伝送性能の評価パラメーターとした雑音のある通信路におけるテレポーテーションと直接伝送の比較を行った。雑音には真空場との結合によるモデルを用いた。その結果、あるパラメーター領域においてはテレポーテーションが直接伝送よりも優れた能力を持っていることがわかった。また、テレポートされた量子状態が非古典性を失わないような条件の境界についてや、非古典的性質の伝送についての現実的な実験の可能性についても議論する。

Transmission of nonclassical quantum states by quantum teleportation of continuous variables is studied. Protocol of quantum teleportation via a two-mode squeezed-vacuum state in a noisy environment is formulated by the Glauber-Sudarshan P-function. Using the nonclassical depth as an estimation parameter of transmission performance, we compare the teleportation scheme with the direct transmission through a noisy channel. The noise model is based on the coupling to the vacuum field. We find that the teleportation channel has better transmission performance than the direct transmission channel in a certain region. The bounds for such region and for obtaining the nonvanished nonclassicality of the teleported quantum states are also discussed. We also mention the required conditions for transmitting nonclassical features in real experiments.

[キーワード]
量子テレポーテーション，連続量，2モードスクイズド状態，非古典深度
quantum teleportation, continuous variable, two-mode squeezed-vacuum, non-classical depth

1 序論

量子コンピュータ、量子暗号などの情報処理技術は物質の量子力学的性質（量子状態）までもを自在に制御することにより始めて実現可能となる技術であり、量子力学を考慮しない従来の計算理論や暗号理論では到達不可能な性能を有する事が知られている[1]。このような量子状態を保持、制御するシステムやデバイスを構築していく上では、古典的な情報理論と同様に、量子状態そのもの、つまり「量子情報」をやりとり（伝送）する際に指針となる理論が必要と考えられるが、残念ながらその理論はまだ最終的に確立しているとはいえない。

一方、量子テレポーテーションと呼ばれる、間接的に量子状態を遠隔地に伝送する概念が近年注目されている。「テレポーテーション」という変わったネーミングは、次のような理由に由来する。今、任意に準備された量子状態を直接伝送することなしに、遠隔地で再現したいとする。古典的な理論の範囲内では、これは簡単である。その状態の再現に必要なパラメータを測

定し、それを遠隔地に伝送して再現すればよい。しかし物質の量子状態まで考えた場合、一見それは不可能なように見える。なぜなら、量子状態を決定するパラメータは一度の測定からその値を正確に知ることはできず、また複製を作ることも量子力学の原理により禁止されているからである[2]。しかしながら、Bennettらは1993年に、もつれ合い状態と呼ばれる量子状態と同時測定と呼ばれる測定法を用いることによってこの間接的な量子状態の伝送が可能であることを、有限な次元を持つ量子状態を対象とした理論によって示し、これを「量子テレポーテーション」と名付けた[3]。その理論は後に無限次元の空間に広がる連続量を持つ量子状態のテレポーテーションの理論へと一般化された[4]。この連続量テレポーテーションの理論を実際に実現するため、連続量もつれ合い状態に2モードスクイズド状態を利用するスキームが提案され[5]、光の量子状態を用いた実験により、実際にコヒーレント状態の量子テレポーテーションが実現された[6]。

このように、量子テレポーテーションは多くの研究者により精力的に研究されているが、これを量子状態の伝送技術のひとつとして見た場合、その性能に優位性があるのかどうかはまだほとんど明らかにされていない。古典論と対応可能な状態であるコヒーレント状態のテレポーテーションは実験的な面ではいくつかの利点を持つが、本来量子テレポーテーションは古典的対応を持たない非古典的な状態を含めた任意の量子状態を間接的に伝送する能力を持っている。本研究では、Glauber、Sudarshanにより定義されたP 関数表現と呼ばれる量子力学的な表現と、量子状態の非古典性の強さを定量化するために提案された「非古典深度(nonclassical depth)」と呼ばれるパラメータ[7]を用いて、雑音環境下における連続量量子テレポーテーションが状態の非古典的性質をどのように伝送するのかを理論的に解析し、またテレポーテーションによる伝送の能力が直接量子状態を伝送する場合に比べて優れているのかどうかを議論した[8]。理論モデルでは、通常光量子通信ネットワークを考える上で支配的と考えられている真空状態にある環境と系との相互作用によりもたらされる雑音を想定した。解析の結果、テレポーテーションの状態の非古典的性質に対する伝送性能は、2モードスクイージングや通信路の損失の度合い、そして伝送される量子状態が持つ非古典性の強さなどに強く依存することが明らかとなった。またこれらのパラメータに依存して、テレポーテーションが直接伝送よりも優れた伝送性能を示す領域が存在することも明らかとなった。以下ではこれらの内容について、数式を用いて厳密に議論する。

2 連続量量子テレポーテーションのプロトコル

連続量量子テレポーテーションの概念図を図1に示す[5][6]。送信者アリスと受信者をボブの間では、2モードスクイズド状態 $|\Psi_{SV}^{AB}\rangle$ をシェアすることによりテレポーテーションが実行される。

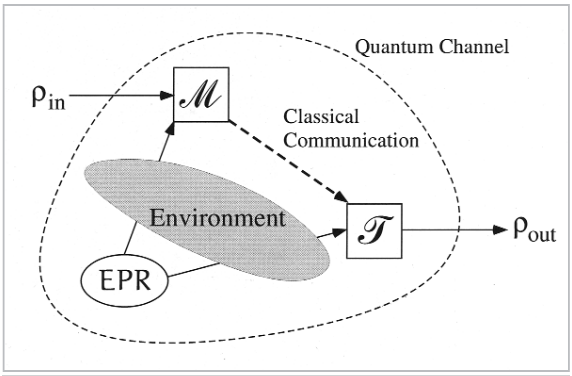


図 1 連続量量子テレポーテーションのプロトコル

“M”は送信者による量子測定。“T”は受信者によるユニタリー変換。“EPR”は送受信者間でシェアするエンタングルメントをそれぞれ表す。

2モードスクイズド状態 $|\Psi_{SV}^{AB}\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
|\Psi_{SV}^{AB}\rangle &= \exp\left[r(\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger - \hat{a}\hat{b})\right]|0^A\rangle\otimes|0^B\rangle \\
&= \sqrt{1-\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n|n^A\rangle\otimes|n^B\rangle,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

で与えられる。ここで $\hat{a}(\hat{b})$、$\hat{a}^\dagger(\hat{b})$ は、モードA(B)におけるボーズ粒子の生成、消滅演算子である。$|n^A\rangle$、$|n^B\rangle$ はそれぞれモードA、Bの光子数固有状態を表し、パラメータ λ は $\lambda=\tanh\ r$ で定義される。ここで(1)式のスクイージングパラメータ r は、簡単のため正値であると仮定した。また、モードA、Bはそれぞれアリス、ボブに割

り当てられるとする。

現実の実験においては、2モードスクイズド状態は両者にシェアされる過程において外部環境の影響を必然的に受け、準備された純粋状態から混合状態へと変化し、量子もつれ合いも弱まってしまうものと考えられる。外部環境による量子状態の変化は、完全正値写像（completely positive map：CP写像）によって記述することができる[9]。よってアリス、ボブによりシェアされる混合状態$\hat{\rho}^{AB}_{SV}$は、

$$\hat{\rho}^{AB}_{\rm SV} = \left(\hat{\mathcal{L}}^A \otimes \hat{\mathcal{L}}^B\right)|\Psi^{AB}_{\rm SV}\rangle\langle\Psi^{AB}_{\rm SV}|, \tag{2}$$

と表すことができる。ここで、$\hat{\mathcal{L}}^A$、$\hat{\mathcal{L}}^B$はそれぞれモードA、BのCP写像であり、ここでは両者は同じ性質を持つものと仮定する。また光の周波数領域では熱雑音の影響はほとんど無視できるため、外部環境は真空状態にあるものとした。これらの仮定のもとでは、CP写像$\hat{\mathcal{L}}^A$、$\hat{\mathcal{L}}^B$は

$$\hat{\mathcal{L}}^{A,B} = \exp\left[g\left(\hat{\mathcal{K}}^{A,B}_{-} - \hat{\mathcal{K}}^{A,B}_{0} + \frac{1}{2}\right)\right] \tag{3}$$

で与えられる[10]。ここでgは正値のパラメータで、超作用素$\hat{\mathcal{K}}^A_-$、$\hat{\mathcal{K}}^A_0$は任意の作用素$\hat{X}$に対し

$$\hat{\mathcal{K}}^A_- \hat{X} = \hat{a}\hat{X}\hat{a}^\dagger \quad \hat{\mathcal{K}}^A_0 \hat{X} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{X} + \hat{X}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{X}), \tag{4}$$

のように作用するものと定義する。また、$\hat{\mathcal{K}}^B_-$、$\hat{\mathcal{K}}^B_0$についても$\hat{b}$、$\hat{b}^\dagger$を用いて同様に定義する。CP写像$\hat{\mathcal{L}}^A$、$\hat{\mathcal{L}}^B$は、コヒーレント状態を振幅の減衰したコヒーレント状態

$$\hat{\mathcal{L}}|\alpha\rangle\langle\beta| = E(\alpha,\beta)|\alpha\sqrt{T}\rangle\langle\beta\sqrt{T}|, \tag{5}$$

へと写像する性質を持つ。ここで$T=\exp(-g)$であり、$E(\alpha、\beta)$は

$$E(\alpha,\beta) = \exp\left[-\frac{1}{2}(1-T)\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha\beta^*\right)\right]. \tag{6}$$

で表される関数である。パラメータTは雑音のある通信路における実効的な透過率を表している。この量子通信路の雑音モデルは単純であるが、実験での状況を非常によく記述できると考えられている。

さて、アリスが任意の量子状態$\hat{\rho}^C_{in}$をボブにテレポートすることを考える。作用素$\hat{\rho}^{ABC} = \hat{\rho}^{AB}_{SV} \otimes \hat{\rho}^C_{in}$はアリス、ボブ全体の量子状態を表すものとする。量子状態$\hat{\rho}^C_{in}$をテレポートするため、アリスはモードA、Bに対して射影作用素$\hat{X}^{AC}(x, p) = |\Phi^{AC}(x, p)\rangle\langle\Phi^{AC}(x, p)|$で記述される同時測定を行う[12]。ベクトル$|\Phi^{AC}(x, p)\rangle$は

$$|\Phi^{AC}(x,p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} {\rm d}y\, |x^C + y^C\rangle \otimes |y^A\rangle {\rm e}^{ipy}. \tag{7}$$

で表される$\hat{x}^C - \hat{x}^A$と$\hat{p}^C + \hat{p}^A$の同時固有状態である。アリスが測定結果(x, p)を得る確率$P(x, p)$は

$$P(x,p) = {\rm Tr}_{ABC}\left[\left(\hat{X}^{AC}(x,p)\otimes\hat{1}^B\right)\left(\hat{\rho}^{AB}_{\rm SV}\otimes\hat{\rho}^C_{\rm in}\right)\right]. \tag{8}$$

で与えられ、その測定結果(x, p)は古典的な通信によってボブに送られる。量子状態の縮約に関する公式[9]から、ボブの受け取る量子状態$\hat{\rho}^B(x, p)$は

$$\hat{\rho}^B(x,p) = \frac{{\rm Tr}_{AC}\left[\left(\hat{X}^{AC}(x,p)\otimes\hat{1}^B\right)\left(\hat{\rho}^{AB}_{\rm SV}\otimes\hat{\rho}^C_{\rm in}\right)\right]}{{\rm Tr}_{ABC}\left[\left(\hat{X}^{AC}(x,p)\otimes\hat{1}^B\right)\left(\hat{\rho}^{AB}_{\rm SV}\otimes\hat{\rho}^C_{\rm in}\right)\right]}, \tag{9}$$

のように表される。ボブはアリスの同時測定結果(x, p)を受け取った後、量子状態$\hat{\rho}^B(x, p)$にユニタリー作用素$\hat{D}^B(x, p) = e^{i(p\hat{x}^B - x\hat{p}^B)} = e^{\mu\hat{b}^\dagger - \mu^*\hat{b}}$から成る変換を施す。ここで、$\mu = (x+ip)/\sqrt{2}$である。その結果最終的にボブの得る状態は、

$$\hat{\rho}^B_{\rm out}(x,p) = \hat{D}^B(x,p)\hat{\rho}^B(x,p)\hat{D}^{B\dagger}(x,p). \tag{10}$$

で与えられる。この出力$\hat{\rho}^B_{out}(x, p)$を(8)式で表される確率分布$P(x, p)$で平均化すれば、ボブの受け取る平均化された出力$\hat{\rho}^B_{out}$は

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^B_{\rm out} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp\, P(x,p)\hat{\rho}^B_{\rm out}(x,p)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} {\rm d}x \int_{-\infty}^{\infty} {\rm d}p\, \hat{D}^B(x,p)\\ &{\rm Tr}_{AC}\left[\left(\hat{X}^{AC}(x,p)\otimes\hat{1}^B\right)\left(\hat{\rho}^{AB}_{\rm SV}\otimes\hat{\rho}^C_{\rm in}\right)\right]\hat{D}^{B\dagger}(x,p).\end{aligned} \tag{11}$$

で表すことができる。

3　P関数表現による定式化

任意の量子状態はコヒーレント状態で対角化された表現、すなわちP関数表現で表すことができる[10]。本節では、テレポーテーションのプロトコルをP関数表現で定式化する。この表現はテレポーテーションの物理的な描像を我々に与えてくれるだけでなく、非古典深度により入力量子状態の非古典性の伝搬を解析する上でも必要となる。量子状態が非古典的であるとき、P関数は負の値を持つかまたは特異な関数となることがよく知られている。任意の量子状態$\hat{\rho}_{\rm in}^{C}$に対するP関数表現は、

$$\hat{\rho}_{\rm in}^{C}=\int {\rm d}^2\alpha\, P_{\rm in}(\alpha)|\alpha^{C}\rangle\langle\alpha^{C}|. \tag{12}$$

で与えられる。(12)式から、コヒーレント状態の入力に対するテレポーテーションの出力が求まれば、任意の入力に対する出力の形も自動的に与えられることがわかる。計算を実行すれば、テレポートされた量子状態$\hat{\rho}_{\rm out}^{B}(x,\ p)$は

$$\hat{\rho}_{\rm out}^{B}(x,p)=\frac{\int {\rm d}^2\alpha\, P_{\rm in}(\alpha){\rm e}^{-\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2(1-T)}|\alpha-\mu|^2}\hat{D}^{B}(\mu_{\alpha\lambda T})\hat{\rho}_{\bar{n}_{\lambda T}}^{B}\hat{D}^{B\dagger}(\mu_{\alpha\lambda T})}{\int {\rm d}^2\alpha\, P_{\rm in}(\alpha)\exp\left[-\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2(1-T)}|\alpha-\mu|^2\right]}. \tag{13}$$

となることがわかる。また確率分布$P(x,\ p)$で平均化された出力量子状態は

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\rm out}^{B}&=\int_{-\infty}^{\infty}{\rm d}x\int_{-\infty}^{\infty}{\rm d}p\, P(x,p)\hat{\rho}_{\rm out}^{B}(x,p)\\&=\int {\rm d}^2\alpha\, P_{\rm in}(\alpha)\hat{D}^{B}(\alpha)\hat{\rho}_{\bar{n}_{\lambda T}}^{B}\hat{D}^{B\dagger}(\alpha),\end{aligned} \tag{14}$$

で与えられる。ここで、密度演算子$\hat{\rho}_{\bar{n}\lambda T}^{B}$は

$$\bar{n}_{\lambda T}=1-\frac{2\lambda T}{1+\lambda}=1-\left(1-{\rm e}^{-2r}\right)T. \tag{15}$$

で与えられる平均光子数$\bar{n}_{\lambda T}$の熱平衡状態を表す。例えば、コヒーレント状態の入力$P_{\rm in}(\beta)=\delta^{(2)}(\alpha-\beta)$に対する出力状態は$\hat{\rho}_{\rm out}^{B}=\hat{D}^{B}(\alpha)\hat{\rho}_{\bar{n}\lambda T}^{B}\hat{D}^{B\dagger}(\alpha)$なる熱コヒーレント状態で与えられる。より一般的には、損失のあるテレポーテーション通信路は、入力状態$\hat{\rho}_{\rm in}^{C}$のコヒーレント状態で展開された基底$|\alpha\rangle\langle\alpha|$が熱コヒーレント状態$\hat{D}(\alpha)\hat{\rho}_{\bar{n}\lambda T}\hat{D}^{\dagger}(\alpha)$へと変換される過程であるといえる。ここで、テレポーテーション通信路における環境は、伝送される量子状態$\hat{\rho}_{\rm in}$を直接劣化させているのではないことに注意する必要がある。$\hat{\rho}_{\rm in}$の劣化は、2モードスクイズド状態の不完全性と環境によるデコヒーレンスによって間接的にもたらされている。その結果、テレポーテーション通信路における損失は$P_{in}(\alpha)$((14)式)の直接の劣化ではなく、平均光子数$\bar{n}_{\lambda T}$の熱雑音として混入されるのである。この点が、後述する直接伝送路とテレポーテーションの大きな違いである。

テレポーテーション通信路は、

$$P_{\rm in}(\alpha)\ \longrightarrow\ P_{\rm out}(\alpha)=\frac{1}{\pi\bar{n}_{\lambda T}}\int {\rm d}^2\beta\, P_{\rm in}(\beta){\rm e}^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{\bar{n}_{\lambda T}}} \tag{16}$$

のようなP関数の変換としても表現することができる。ただし$P_{\rm out}(\alpha)$は、$\hat{\rho}_{\rm out}$に対するP関数である。この変換は、損失のあるテレポーテーションが熱雑音混入の過程であることを非常にシンプルに表現している。

4　伝送の忠実度

純粋状態$\hat{\rho}_{\rm in}^{C}=|\psi^{C}\rangle\langle\psi^{C}|$を入力の状態とした場合、テレポーテーションによる伝送の忠実度は

$$\begin{aligned}F^{\rm tel}&=\langle\psi^{C}|\hat{\rho}_{\rm out}^{B}|\psi^{C}\rangle\\&=\frac{1}{\bar{n}_{\lambda T}}\int {\rm d}^2\alpha\int {\rm d}^2\beta\, Q_{\rm in}(\alpha)P_{\rm in}(\beta){\rm e}^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{\bar{n}_{\lambda T}}},\end{aligned} \tag{17}$$

で表される。ここで、$Q_{\rm in}(\alpha)=(1/\pi)|\langle\alpha^{C}|\psi^{C}\rangle|^2$は入力状態の$Q$関数である。この忠実度が次のような極限

$$\lim_{T\to1}\lim_{\lambda\to1}F^{\rm tel}=1\qquad \lim_{\lambda\to0}F^{\rm tel}=\pi\int {\rm d}^2\alpha\, Q_{\rm in}^2(\alpha)<1. \tag{18}$$

をとることは容易に示される。入力がコヒーレント状態の場合、テレポーテーションの忠実度は

$$F_{\rm coh}^{\rm tel}(\bar{n}_{\lambda T})=\frac{1}{1+\bar{n}_{\lambda T}}=\frac{1+\lambda}{2(1+\lambda-\lambda T)}. \tag{19}$$

である。理想的な量子テレポーテーション(T=1)の場合、(19)式は[11]で得られた結果と同様になる。同様に入力が光子数状態 $|n\rangle$、Schrödingerの猫状態 $(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle)/\sqrt{2(1-e^{-2|\alpha|^2})}$ などの場合、忠実度は

$$F_n^{\rm tel}(\bar{n}_{\lambda T}) = \frac{1}{1+\bar{n}_{\lambda T}}\left(\frac{1-\bar{n}_{\lambda T}}{1+\bar{n}_{\lambda T}}\right)^n P_n\left(\frac{1+\bar{n}_{\lambda T}^2}{1-\bar{n}_{\lambda T}^2}\right), \quad (20)$$

や

$$F_{\rm cat}^{\rm tel}(\bar{n}_{\lambda T}) = \frac{1}{2(1+\bar{n}_{\lambda T})}\left\{1+\left[\frac{\sinh\left(\frac{1-\bar{n}_{\lambda T}}{1+\bar{n}_{\lambda T}}|\alpha|^2\right)}{\sinh(|\alpha|^2)}\right]^2\right\}, \quad (21)$$

で与えられる。ここで P_n は n 次のルジャンドル陪関数である。(19)－(21)式で得られた忠実度は、たとえ T=0(入力状態は全て失われ、代わりに真空状態が侵入する)でも有限の値を取るのが特徴的である。その理由は、ボブはアリスからの古典的な通信を元にしてあるエネルギーを持つ出力状態を作ることが可能だからである。

5　非古典深度

量子状態の非古典的性質は、量子光学や量子情報理論について考える上で非常に重要な性質である。本節では、まず非古典深度の定義について簡単に述べた後に、テレポーテーションにおける状態の非古典深度の伝送特性について議論する。ある量子状態 ρ の非古典深度 τ_c は、次のように定義される関数 $R(\alpha, \tau)$ が全ての α について非負となるようなパラメータ τ の最小値で定義される[7]。

$$R(\alpha,\tau) = \frac{1}{\pi\tau}\int d^2\beta\, P(\beta)\exp\left(-\frac{|\alpha-\beta|^2}{\tau}\right), \quad (22)$$

ここで $P(\alpha)$ は量子状態 $\hat{\rho}$ の P 関数、τ は実数のパラメータである。τ_c は不等式 $0 \le \tau_c \le 1$ を常に満足する。例えば光子数状態、Schrödingerの猫状態では、常に τ_c=1となり、シングルモードのスクイズド状態では、スクイージングパラメータを $\zeta = re^{i\theta}$ とすれば

$$\tau_c = \frac{\tanh|\xi|}{1+\tanh|\xi|} = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2|\xi|}\right), \quad (23)$$

で与えられ、スクイージングの強い極限で1/2となる。

テレポートされた量子状態 $\hat{\rho}_{\rm out}$ の非古典深度は(14)式から容易に求めることができる。(14)式を(22)式に代入すれば、テレポートされた量子状態 $\hat{\rho}_{\rm out}$ の R 関数は

$$R(\alpha,\tau) = \frac{1}{\pi(\tau+\bar{n}_{\lambda T})}\int d^2\beta\, P_{\rm in}(\beta)\exp\left(-\frac{|\alpha-\beta|^2}{\tau+\bar{n}_{\lambda T}}\right), \quad (24)$$

のように計算される。この式から、元の状態の非古典深度 $\tau_c^{\rm in}$ とテレポートされた後の状態に対する $\tau_c^{\rm out}$ は次の関係で結ばれていることがわかる。

$$\tau_c^{\rm out} = \max\left[\tau_c^{\rm in} - \bar{n}_{\lambda T}, 0\right]. \quad (25)$$

よって、テレポートされた後の量子状態 $\hat{\rho}_{\rm out}$ が非古典的性質を少しでも保つためには、アリスとボブでシェアされる2モードスクイズド状態のスクイージングパラメータ r が次の条件

$$r > -\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1-\tau_c^{\rm in}}{T}\right). \quad (26)$$

を満足しなければならないことが明らかとなる。$T \le 1-\tau_c^{\rm in}$ の場合、送られた状態には非古典的性質は一切残らない。例えば r=0(スクイージングなし)の場合、非古典的性質をテレポートすることは不可能である。図2(A)では、テレポートされた後の状態 $\hat{\rho}^{\rm out}$ の非古典深度 $\tau_c^{\rm out}$ が、スクイージングパラメータ r、損失パラメータ T を関数としてプロットされている。また、有限の $\tau_c^{\rm out}$ を保つための r の下限を図2(B)に示す。(25)式によれば、非古典深度の伝送特性を考える場合、送られる非古典的状態の種類に対する依存性はないことがわかる。つまり二つの量子状態が同じ非古典深度を持つ場合、その具体的な状態が異なっていても非古典的性質に対する伝送特性は同一になるということである。例えば、光子数状態とSchrödingerの猫状態は同じ非古典深度(τ_c=1)を持つ。そのため互いのテレポーテーション忠実度は明らかに異なるにも関わらず((20)、(21)式)、その非古典的性質に対しては同じ伝送特性を示すのである。

6　テレポーテーションと直接伝送

本節では忠実度、非古典深度の二つの評価量

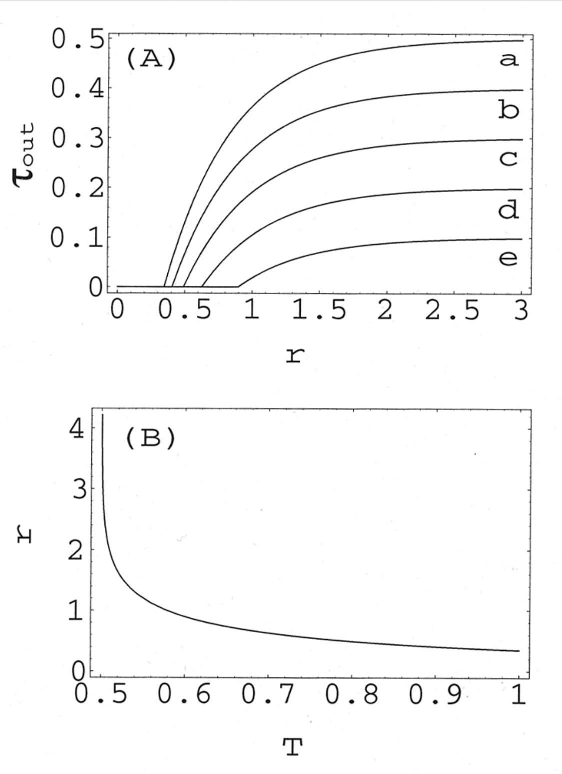


図2 テレポーテーション通信路伝送後の非古典深度

(A) テレポートされた量子状態の非古典深度 τ_{out} a、b、c、d、eはそれぞれ τ= 1.0、0.9、0.8、0.7、0.6に対応する。(B) $\tau_{out}>0$ となるための境界線。ただし (A)、(B) 共に τ_{in} = 0.5である。

を用いて、テレポーテーション通信路と直接通信路による連続量の伝送について比較する。直接伝送の通信路に対するCP写像は、テレポーテーション通信路における2モードスクイズド状態の伝送((3)式)と同一にするのが妥当であると思われる。この仮定により直接伝送のCP写像Lは、実効的透過率Tで特徴づけることができる。前節まで、2モードスクイズド状態の生成源はテレポーテーション通信路の中間点に位置し、二つのモードに対する量子通信路は同じ長さであるものと暗に仮定していた。よって、2モードスクイズド状態、直接伝送路に対する通信路のCP写像はそれぞれ$L^{A,B}(T)$、$L(T^2)$とするのが妥当であると考えられる。ここでは、まずパラメータTが与えられた場合の直接伝送路における忠実度、非古典深度を定式化した後に、テレポーテーション通信路との比較を行う。

透過率がTで与えられる直接伝送路のにおける出力の量子状態は、(5)式から

$$\hat{\rho}_{\rm out}^{\rm dir}=\frac{1}{T}\int d^2\alpha\, P_{\rm in}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{T}}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|, \tag{27}$$

のように計算される。ここで、入力状態は(12)式で与えられる。伝送の忠実度についても前節までと同様にして

$$F^{\rm dir}=\frac{\pi}{T}\int d^2\alpha\, Q_{\rm in}(\alpha)P_{\rm in}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{T}}\right). \tag{28}$$

と求められる。テレポーテーションでは損失は熱過程で表されていた((14)、(17)式)のに対し、直接伝送では、入力状態のP関数は伝送中に環境によって直接劣化させられることが(27)、(28)式からわかる。実際光子数状態、Schrödingerの猫状態を直接伝送した場合の忠実度は、Tを関数としてそれぞれ

$$F_{\rm cat}^{\rm dir}(T)=\left[\frac{\sinh(\sqrt{T}|\alpha|^2)}{\sinh(|\alpha|^2)}\right]^2\cosh\left((1-T)|\alpha|^2\right), \tag{29}$$

と

$$F_n^{\rm dir}(T)=\exp[n\log T]=e^{-gn}, \tag{30}$$

で与えられる。これらが(20)、(21)式と異なるのは明らかである。図3では、いくつかのスクイージングパラメータrに対するテレポーテーション忠実度$F_{\rm cat}^{\rm tel}(\overline{n}_{\lambda T}(r,T))$、$F_n^{\rm tel}(\overline{n}_{\lambda T}(r,T))$と、直接伝送路の忠実度$F_{\rm cat}^{\rm dir}(T^2)$、$F_n^{\rm dir}(T^2)$を$T$の関数として比較している。

直接伝送された量子状態のR関数は

$$R^{\rm dir}(\alpha,\tau)=\frac{1}{\pi\tau}\int d^2\beta\, P_{\rm in}(\beta)\exp\left(-\frac{|\sqrt{T}\beta-\alpha|^2}{\tau}\right), \tag{31}$$

と求められる。ここで、Tは直接伝送の実効的透過率である。この$R^{\rm dir}(\alpha\sqrt{T},\tau)$と前述の非古典深度の定義から、直接伝送路における出力の非古典深度$\tau_{\rm out}^{\rm dir}$は

$$\tau_{\rm out}^{\rm dir}(T)=\tau_{\rm in}T. \tag{32}$$

で表されることが導ける。この通信路では、入力が非古典的状態にある場合少なくともその一部は常に伝送される。

このようにテレポーテーション、直接伝送における非古典深度の伝送特性は(25)式と(32)式のように簡単な形で与えられるため、これらは

解析的に比較することができる。この二つの量子通信路の差 $\tau_D(T)$ を

$$\tau_D(T) = \tau_{out}^{tel}(r,T) - \tau_{out}^{dir}(T^2) = -\tau_{in}T^2 + (1-e^{-2r})T + \tau_{in} - 1 \quad (0 \le T \le 1). \tag{33}$$

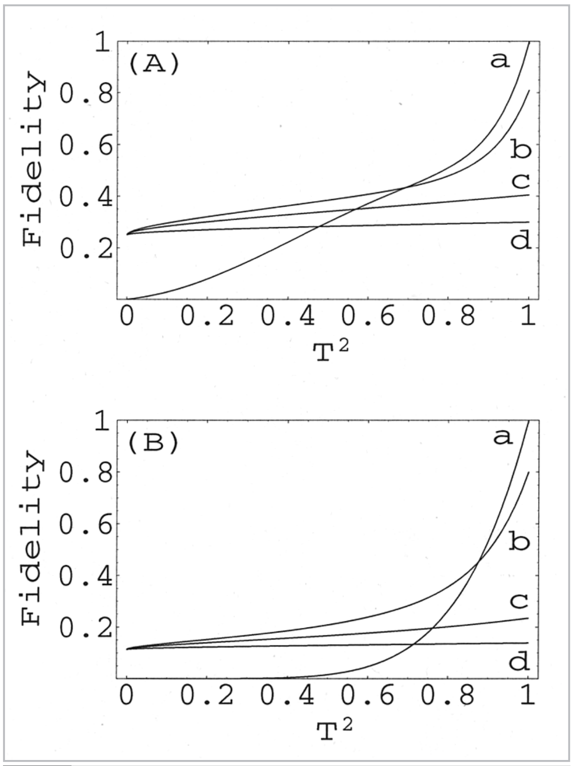


図3 テレポーテーション通信路と直接通信路伝送後の入力量子状態の忠実度の比較

入力量子状態は(A)Schrödingerの猫状態、(B)光子数状態でaは直接通信路、b、c、dはテレポーテーション通信路（r = 2.0、0.7、0.2）を表す。
また $\bar{n} = |\alpha|^2 = 6.0$ である。

で定義する。$\tau_D(T)$ が正となる限界は

$$(1-e^{-2r})^2 > 4\tau_{in}(1-\tau_{in}). \tag{34}$$

のように導かれる。(34)式が満たされている場合、$\tau_D(T)$ が正となる範囲は

$$\frac{(1-e^{-2r}) - \sqrt{(1-e^{-2r})^2 + 4\tau_{in}(\tau_{in}-1)}}{2\tau_{in}} < T < \frac{(1-e^{-2r}) + \sqrt{(1-e^{-2r})^2 + 4\tau_{in}(\tau_{in}-1)}}{2\tau_{in}}. \tag{35}$$

で与えられる。(35)式の T は不等式 $0 \le T \le 1$ を同時に満たす必要があるため、(34)、(35)式における τ_{in} には $1/2 \le \tau_{in} \le 1$ という条件が付加されることがわかる。図4に、非古典深度 τ_{out}^{tel} (r、T)、τ_{out}^{dir} (T^2) の T 依存性と、(34)式による限界を示す。入力状態の非古典的性質が最も強い場合（$\tau_{in} \to 1$）、(35)式は

$$0 < T < (1-e^{-2r}), \tag{36}$$

のように単純化され、スクイージングが強い極限（$r \to \infty$）では全ての T に対して $\tau_D(T)$ が正となることがわかる。

これらの結果から非古典的量子状態の伝送に対するより良い伝送路の選択は、通信路の損失の大きさや送る状態自身の非古典深度の大きさに強く依存して決まることが示唆される。

7 結論

本稿では、雑音環境下における連続量テレポーテーション通信路における非古典的量子状態の伝送特性について、非古典深度と呼ばれるパラメータを用いて議論した。雑音は系と真空場との相互作用によって生じるものと仮定した。そしてその結果を直接伝送路による伝送と比較し、テレポーテーションの方が優れた伝送領域を持つ領域があることを確認した。また、これら二つの通信路におけるデコヒーレンスの物理的な性質の違いも明らかにした。テレポーテーションでは、デコヒーレンスは真空場との相互作用で生じると仮定したにも関わらず、実効的には平均光子数 $\bar{n}_{\lambda T}$ の熱状態による熱過程で表されることがわかった。

最後に、この解析結果の実際の実験状況への適用を試みる。古沢ら[6]の実験では、2モードスクイズド状態を振幅効率0.9で伝送することにより、コヒーレント状態を忠実度 F=0.58 ± 02でテレポートすることに成功した。この実験セットアップでは最大6dBのスクイージングが観測されていたが[13]、テレポーテーション実験特有の技術的な限界などにより実際に使われたスクイージングの度合いは3dBにとどまった。これらの状況を考え T=0.81と3dBのスクイージング（r=0.34）を(19)式に代入すると、コヒーレント状態のテレポーテーションに対し F=0.62の忠実度が得られる。これは実際の実験より若干の過大評価となるが、おおむね良い一致を見ているといえるだろう。

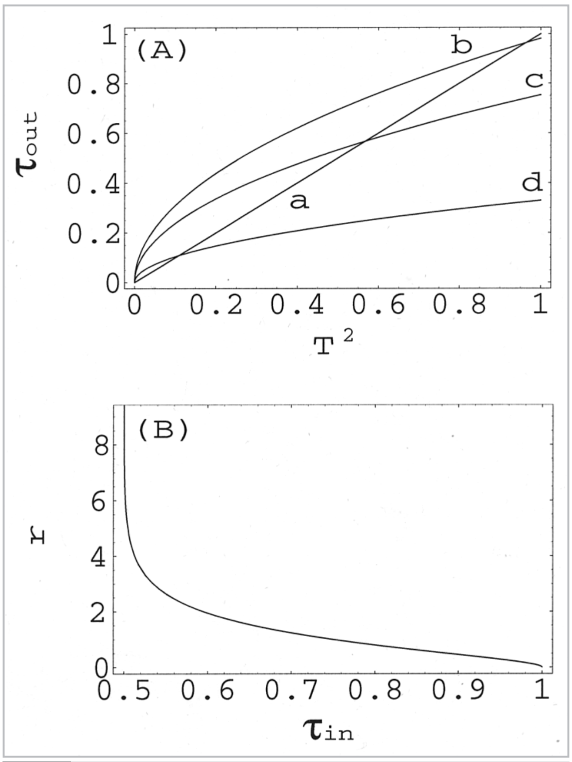


図4 テレポーテーション通信路と直接通信路伝送後の量子状態の非古典深度の比較

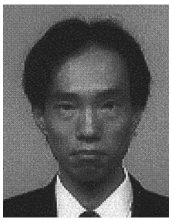
(A)伝送後の非古典深度 τ_{out}
aは直接通信路、b、c、dはテレポーテーション通信路（r = 2.0、0.7、0.2）を表す。
ただし τ_{in} = 1.0。(B)$0 \leq T \leq 1$ において正の $\tau_D(T)$ が存在するための条件。

そこで、これらの現在の実験技術を考慮し、6dBのスクイズド状態（r=0.69、τ_c^{in}=0.38に相当）を6dBの2モードスクイズド状態を使ってテレポートするような状況を試算してみる。(25)式から、テレポーテーションの出力状態が有限の非古典深度を持つためには透過率が少なくとも T＞0.83である必要があることがわかる。また図4(B)から、このようなテレポーテーション通信路が実現されれば、光子数状態などの非古典性の強い状態の伝送については同じ損失を持つ直接通信路よりも良い伝送特性を示すであろうことも見て取れる。

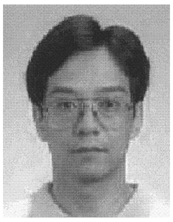
このように、連続量テレポーテーションを量子通信のための通信路と考えてその伝送特性を評価した場合、その伝送特性は、通信路の特性だけでなくどのような量子情報を送りたいのかということにも強く依存することがわかった。量子情報をどのような通信路で送るのが最適なのかは、まだ一般に明らかとなっていない問題である。またさらに今後は、このようなテレポーテーションや直接伝送、またその他の量子状態伝送のシナリオにおいて、雑音をどのような符号化により回避していくのかということも非常に重要な問題であろう。

参考文献

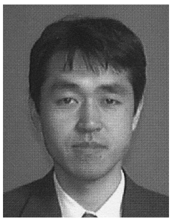
1 M. A. Nielsen and I. L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press: Cambridge).
2 W. K. Wootters and W. H. Zurek, Nature 299, 802 (1982).
3 C. H. Bennet, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993).
4 L. Vaidman, Phys. Rev. A49 (1994).
5 S. L. Braunstein and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. 80, 869 (1998).
6 A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble and E. S. Polzik, Science 282, 706 (1998).
7 C. T. Lee, Phys. Rev. A44, R2775 (1991).
8 M. Takeoka, M. Ban and M. Sasaki, J. Opt. B 4, 114 (2002).
9 E. B. Davies: *Quantum Theory of Open Systems* (Academic Press, New York 1976).
10 D. F. Walls and G. J. Milburn: *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin 1994).
11 H. F. Hofmann, T. Ide, T. Kobayashi and A. Furusawa, Phys. Rev. A62, 062304 (2000).
12 U. Leonhardt: *Measuring the Quantum State of Light* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 1997).
13 E. S. Polzik, J. Carri and H. J. Kimble, Appl. Phys. B55, 279 (1992).



武岡正裕
基礎先端部門量子情報技術グループ専攻研究員　博士(工学)
量子情報理論
takeoka@crl.go.jp



番　雅司
日立製作所基礎研究所　理学博士
量子情報理論
m-ban@crl.go.jp



佐々木雅英
基礎先端部門量子情報技術グループリーダー　博士（理学）
量子情報理論
psasaki@crl.go.jp