

平均－分散平面上における裁定評価理論*

堀 本 三 郎

I はじめに

市場ポートフォリオの観測という厄介な問題を抱えた資産評価理論(CAPM)のオルターナティブとして登場してきた検証モデルが、Ross[6]の提示した裁定評価理論(Arbitrage Pricing Theory: APT)であった。危険資産の分散共分散行列がファクターモデルにより表現されるとき、その期待収益率が因子負荷行列の線形近似式によって与えられることを唱ったものであった。

そしてその後、Chamberlain and Rothschild[1]において、APT構造の数学的解明が見事になされてきた。彼らの底意にあった問題意識は、資産市場における無裁定均衡はリスクとリターンのトレード・オフを表現しているはずだ、という当たり前のものであった。しかしながら、ヒルベルト空間上における数学的記述は多くの財務論研究者にとって難解なものであり、彼らの提示した世界を共有するには多くの時間を必要とした。

本稿においては、ポートフォリオ理論で馴染みの平均－分散平面上においてAPTを表現することを試みる。そして、Chamberlain and Rothschild[1]の問題意識に従いながら、彼らの提示したいくつかの命題を確認することにする。数学的表現を簡単化するため、1ファクター・モデルを想定し、議論をすすめていく。より一般的なモデルについては、別稿に譲ることにしたい。

* 本稿は、第15回日本経営財務研究学会での報告(資産評価理論の検証に関する一考察－Yes, it's testable－)を書き改めたものである。その際、貴重なコメントを頂いた森平爽一郎氏(慶応大学)に感謝致します。もちろん、未だ残る誤謬がありますならば、すべて筆者の責任に帰するものであります。

II 裁定評価理論

n 種類の危険資産が存在するものとしよう。その収益率ベクトルを $\tilde{R}$ ($n \times 1$) で表す。1 ファクター・モデルの分散共分散行列 V ($n \times n$) は

$$(1) \quad V = \mathbf{b}\mathbf{b}' + D$$

と記される。ここで、 n 次元ベクトル $\mathbf{b}$ は因子負荷行列である。そして、 D は固有攪乱項の分散共分散行列であり、 n 次非特異対角行列とする。さらに、各要素は有界である。

いっぽう、 n 次元期待収益率ベクトル μ の近似線形式は

$$(2) \quad \mu = r_0 \mathbf{I} + r_1 \mathbf{b} + \varepsilon$$

となる。 $\mathbf{I}$ はすべての要素が 1 からなる n 次元ベクトルであり、 r_0, r_1 は一般化最小二乗法

$$(3) \quad \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} D^{-1} [\mathbf{I} \ \mathbf{b}] \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} D^{-1} \mu$$

により計算される。¹⁾そして、 ε は評価誤差である。

Ross[6], Huberman[2]の提示した裁定評価理論は、漸近的無裁定の下では、資産数が無限($n \rightarrow \infty$)に増えるとしても、評価誤差の2乗和が有限

$$(4) \quad \varepsilon' \varepsilon < \infty$$

であることを述べたものであった。すなわち、ほとんどの評価式は誤差がないもの(もしくは、平均的には評価誤差がほとんど0である)と判断してよいことになり、称して、近似的線形式が成立することを示した。

通常、漸近的無裁定の定義については、費用0の裁定ポートフォリオを想定するのであるが、以下においては、Jarrow[4], Ingersoll[3]にならい、費用1のポートフォリオを考える。ポートフォリオ理論で馴染みの平均一分散平面上での表現を考察するためである。こうした枠組みの上で、漸近的無裁定条件式(4)を確認する。そのために、まず漸近的無裁定の定義から始めよう。

1) 一般化最小二乗法は後の計算を簡単化するためであり、単純最小二乗法としても結果は変わらない

漸近的無裁定

危険資産への n 次元投資比率ベクトルを $\mathbf{x}$ で表す。

$$(5) \quad \mathbf{x}'\mathbf{I} = 1$$

$$(6) \quad n \rightarrow \infty, \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \rightarrow 0$$

なる無リスク極限ポートフォリオが存在するものとする。

(A) 無危険資産が存在し、その利子率を R_f とするとき、無リスク極限ポートフォリオの期待収益率が

$$(7) \quad \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} \rightarrow r_0 = R_f > 0$$

を満足する。

(B) 無危険資産が存在しないとき

$$(8) \quad \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} \rightarrow r_0 > 0$$

を満足する。このとき、漸近的に裁定機会が存在しないことになる。

(1)式より、ポートフォリオの分散は

$$\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} = (\mathbf{x}'\mathbf{b})^2 + \mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}$$

と計算される。ここで、資産数 n が無限になるとき、 $\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{x}'\mathbf{x}\|\mathbf{D}\|$ であり、 $\|\mathbf{D}\| < \infty$ であるから

$$(9) \quad \mathbf{x}'\mathbf{b} \rightarrow 0, \mathbf{x}'\mathbf{x} \rightarrow 0$$

を満たす $\mathbf{x}$ が存在するとき、無リスク極限ポートフォリオが存在することになる。そして、その期待収益率は、(2)式より

$$\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} \rightarrow r_0 + \mathbf{x}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

となる。

$|\mathbf{x}'\boldsymbol{\varepsilon}| \leq \sqrt{(\mathbf{x}'\mathbf{x})(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})}$ であるから、(9)式より、 $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$ のとき、 $|\mathbf{x}'\boldsymbol{\varepsilon}| \rightarrow 0$ となり、(7)式もしくは(8)式の漸近的無裁定定義式が成立することが知れる。

いっぽう、 $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \infty$ になるとき、(9)式を満足しながら、少なくとも、

2) いま、 $\mathbf{x}'\mathbf{I} = 1$ なるポートフォリオを考えているわけであるから、 $\mathbf{b} = \mathbf{I}$ であるならば、 $\mathbf{x}'\mathbf{b} \rightarrow 0$ となるポートフォリオは存在しない。ここでは、 $\mathbf{b} \neq \mathbf{I}$ と仮定しておく。 $\mathbf{b} = \mathbf{I}$ については裁定ポートフォリオを用いての証明に頼らざるを得ない。

$|\mathbf{x}'\boldsymbol{\varepsilon}| \geq s > 0$ となる $\mathbf{x}$ を見い出すことが可能となる。このとき, (7)式もしくは(8)式の漸近的無裁定定義式は成立しなくなる。

以上により, 線形評価式における誤差 2 乗和の有界性が漸近的無裁定のための必要条件であることが確認された。さらに, われわれのアプローチにおいては, これまでの検証においてほとんど注意が払われなかった r_0 の推定値についても, 検定仮説の対象となることを示した。とりわけ, 無危険資産が存在しないときの(8)式の不等号は検定されるべき仮説であると言える。

Ⅲ 漸近的平均一分散平面

危険資産数 n が有限であるとき, 任意のポートフォリオは, 平均一分散(標準偏差)平面上での有効フロンティアを境界とする実行可能領域にプロットされることが知られている。 n が無限大になるとき, 総投資額 1 単位円のポートフォリオはどの位置にプロットされるのであろうか。これが出発点である。

いま, ポートフォリオの期待収益率 μ_p と標準偏差 σ_p は

$$(10) \quad \begin{aligned} \mu_p &= r_0 + r_1(\mathbf{x}'\mathbf{b}) + (\mathbf{x}'\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \sigma_p &= \sqrt{(\mathbf{x}'\mathbf{b})^2 + \mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}} \end{aligned}$$

と表される。このとき, 大きく分ければ, つぎの 4 つのケースに分類される。

- (i) $|\mu_p| < \infty, \sigma_p < \infty$
- (ii) $|\mu_p| < \infty, \sigma_p \rightarrow \infty$
- (iii) $|\mu_p| \rightarrow \infty, \sigma_p < \infty$
- (iv) $|\mu_p| \rightarrow \infty, \sigma_p \rightarrow \infty$

ここで, ケース(iii)に注目されたい。有限のリスクに対して無限の期待収益率が約束されるポートフォリオが存在するのである。裁定機会が存在しないならば, このようなポートフォリオは存在しない筈だと考えても不思議ではない。ポートフォリオのリスクとリターンのトレード・オフを表す物差しとして, シャープの尺度を考えることにしよう。そして, 無リスク極限ポートフォリオを除くポートフォリオについて, ここでは, シャープの尺度が

$$(11) \quad \delta_p = \frac{\mu_p - r_0}{\sigma_p}$$

で測定されるものとしよう。このとき、各ケースについてのシャープの尺度 δ_p は、(i) $|\delta_p| < \infty$, (ii) $|\delta_p| \rightarrow 0$, (iii) $|\delta_p| \rightarrow \infty$, (iv) $|\delta_p| < \infty$ もしくは $|\delta_p| \rightarrow \infty$, となる。

当然ながら、漸近的無裁定条件式(4)が成立するとき、 $|\delta_p| < \infty$ となっているであろう。そして、 $|\delta_p| \rightarrow \infty$ であるポートフォリオが作成されるとき、漸近的裁定機会が存在することになろう、という推測がなされる。このことが、まさに Chamberlain and Rothschild [1] の問題意識でもあった。これらのことを、漸近的無裁定条件式(4)を用いて確認することにしよう。

まず、 $\sigma_p < \infty$ のケース(i)と(iii)について検討してみよう。

$$\sigma_p \leq \sqrt{(\mathbf{x}'\mathbf{b})^2 + (\mathbf{x}'\mathbf{x})\|\mathbf{D}\|}$$

であるから、 $\sigma_p < \infty$ であるためには

$$\mathbf{x}'\mathbf{x} < \infty, \quad |\mathbf{x}'\mathbf{b}| < \infty$$

でなければならない。このとき

$$\begin{aligned} |\mu_p - r_0| &\leq |r_1| |\mathbf{x}'\mathbf{b}| + |\mathbf{x}'\boldsymbol{\varepsilon}| \\ &\leq |r_1| |\mathbf{x}'\mathbf{b}| + \sqrt{(\mathbf{x}'\mathbf{x})(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})} \end{aligned}$$

であるから、 $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$ のとき、 $|\mu_p - r_0| < \infty$ (すなわち、 $\delta_p < \infty$) が保証される。ケース(i)に該当する。いっぽう、 $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \infty$ のとき、 $|\mu_p - r_0| \rightarrow \infty$ (すなわち、 $\delta_p \rightarrow \infty$) となる $\mathbf{x}$ が存在する。すなわち、ケース(iii)ということになる。

つぎに、ケース(ii)と(iv)の $\sigma_p \rightarrow \infty$ については、 $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$ のとき $\delta_p < \infty$ が保証されることを確認すればよい。(10)式より、 $\sigma_p \rightarrow \infty$ となるケースとして、つぎの3つの場合

$$(a) \quad |\mathbf{x}'\mathbf{b}| < \infty, \quad \mathbf{x}'\mathbf{x} \rightarrow \infty$$

$$(b) \quad |\mathbf{x}'\mathbf{b}| \rightarrow \infty, \quad \mathbf{x}'\mathbf{x} \rightarrow \infty$$

$$(c) \quad |\mathbf{x}'\mathbf{b}| \rightarrow \infty, \quad \mathbf{x}'\mathbf{x} < \infty$$

が考えられる。

ケース(a)の場合, (10), (11)式より

$$\begin{aligned}
 (12) \quad |\delta_p| &= \frac{|r_1(\mathbf{x}'\mathbf{b}) + \mathbf{x}'\boldsymbol{\varepsilon}|}{\sqrt{(\mathbf{x}'\mathbf{b})^2 + \mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}}} \\
 &\leq \frac{|r_1| \left| \frac{\mathbf{x}'\mathbf{b}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} \right| + |\rho_n \sqrt{(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})}|}{\sqrt{\frac{(\mathbf{x}'\mathbf{b})^2}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}}}}, \quad (\mathbf{x}'\boldsymbol{\varepsilon} = \rho_n \sqrt{(\mathbf{x}'\mathbf{x})(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})})
 \end{aligned}$$

となり, $0 < s \leq \frac{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} < \infty$ であるから, $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$ のとき, $\delta_p < \infty$ が保証されることになる。

つぎに, ケース(b), (c)の場合

$$(13) \quad |\delta_p| \leq \frac{|r_1| + \left| \frac{\rho_n \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}}}{\varphi_n \sqrt{\mathbf{b}'\mathbf{b}}} \right|}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}}{\varphi_n^2 (\mathbf{x}'\mathbf{x})(\mathbf{b}'\mathbf{b})}}}, \quad (\mathbf{x}'\mathbf{b} = \varphi_n \sqrt{(\mathbf{x}'\mathbf{x})(\mathbf{b}'\mathbf{b})})$$

と表され, $\mathbf{b}'\mathbf{b} \rightarrow \infty$ であるから, ここでも, $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$ のとき, $\delta_p < \infty$ が確認される。

以上の分析により, 漸近的無裁定条件 $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} < \infty$ が成立するとき, 任意のポートフォリオのシャープの尺度 δ_p は有界であり, その結果, リスクとリターンのトレード・オフを表象する位置にプロットされることがわかった。逆に, 漸近的裁定機会が存在するとき, シャープの尺度が発散するポートフォリオが存在することになる。すなわち, リスクとリターンのトレード・オフを定義できないポートフォリオを作成することが可能である。

危険資産数が有限な世界においては, その価格付けが市場の均衡を反映したものであるか否かを問わず, シャープの尺度は有限であり, それが当たり前の平均-分散(標準偏差)平面である。評価誤差の2乗和も常に有限である。無限の資産数の世界においてはじめて主張できる条件式を, 現実の世界において

いかなような表現と解釈すればいいのであろうか。APTの検証として定式化されている線形関係式の統計的有意性は、資産数が無限に増えるときの残差2乗和の有界性を保証するものではない。むしろ、残差2乗和の有界性は、ほとんどの資産評価式についてその決定係数が1に近い値であることを主張しているのではなかろうか。

IV 漸近的有効フロンティア

危険資産数が無限になるとき、十分に分散化された($\mathbf{x}'\mathbf{x} \rightarrow 0$)ポートフォリオを作成することにより、固有項の貢献をいくらかでも小さくすることが可能である。そして、そのような二つのポートフォリオを考えると、リスクの源泉は共通ファクターのみになり、それらの相関係数を1もしくは-1に限りなく近づけることができる。

有限な資産数において、平均一分散平面上の離れた二点に、相関係数の絶対値が1となる資産(もしくはポートフォリオ)が存在するとき、その有効フロンティアは折れ線型直線で表現されることがよく知られている。漸近的有効フロンティアはこうした直線式に収束する形で表現される。本節においては、無リスク極限ポートフォリオが存在する場合とそうでない場合の、2種類のフロンティアが存在することを確認するとともに、それぞれの漸近的有効フロンティア式を導出する。

Ⅲ節でみたように、漸近的無裁定条件が成立するとき、平均一分散(標準偏差)平面上において有効フロンティアを定義することが可能となる。これまで再々利用してきた無リスク極限ポートフォリオが存在するならば、それは大域的最小分散ポートフォリオの収束点であると予想される。まず、そのポートフォリオから調べてみることにしよう。

大域的最小分散ポートフォリオの分散は

$$(14) \quad \sigma_G^2 = \frac{1}{S_n} = \frac{1}{\mathbf{I}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{I}}$$

である。ここで、(1)式より

$$(15) \quad \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{D}^{-1} - \frac{1}{1 + \mathbf{b}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{b}'\mathbf{D}^{-1}$$

であるから, (14)式における S_n は

$$(16) \quad S_n = \mathbf{I}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{I} \left\{ 1 - \frac{\frac{(\mathbf{I}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b})^2}{(\mathbf{I}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{I})(\mathbf{b}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b})}}{\frac{1}{\mathbf{b}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}} + 1} \right\}$$

となる。いま

$$(17) \quad \mathbf{b} = \phi\mathbf{I} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{I}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v} < \infty, \quad \mathbf{v}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v} < \infty$$

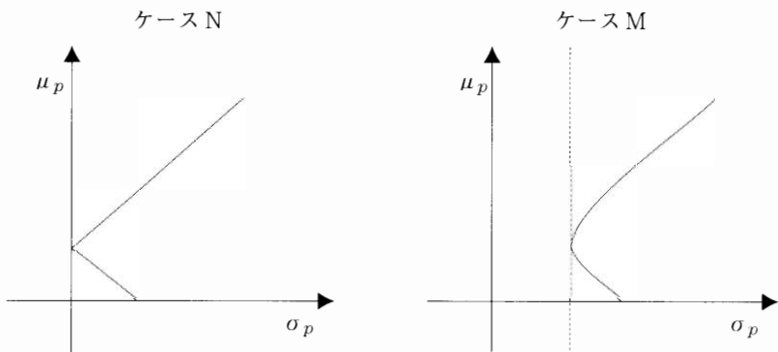
と表されるとき, すなわち, $\mathbf{b}$ と $\mathbf{I}$ の漸近的相関係数が1の近傍に入るときをケースMとよび, そうでない場合をケースNとよぶことにしよう。

一般的と考えられるケースNのとき, $S_n \rightarrow \infty$ となり, (14)式より, 大域的最小分散ポートフォリオは無リスク極限ポートフォリオに収束することがわかる。

他方, ケースMの場合

$$S_n = \frac{\frac{(\mathbf{I}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v})^2}{\mathbf{I}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{I}} + 1}{\frac{1 + 2\phi(\mathbf{I}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v}) + \mathbf{v}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v}}{\mathbf{I}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{I}} + \phi^2} \rightarrow \frac{1}{\phi^2} > 0$$

となり, 無リスク極限ポートフォリオが存在しないケースとなる。二つのケースについて, 漸近的有効フロンティアを図示すれば



と描かれる。これらの場合分けは、まさに、Chamberlain and Rothschild[1]の命題2と同じである。

つぎに、これらの漸近線の式を求めることにしよう。資産数が有限のとき、上記二つのケースのどちらであれ、有効フロンティアは

$$(17) \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{1}{P_n S_n - Q_n^2} (P_n - 2Q_n \mu_p + S \mu_p^2)}$$

と表される。ここで

$$(18) \quad P_n = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}, \quad Q_n = \mathbf{I}' \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

である。

(3)式を考慮しながら、先と同様に、(2)、(15)式を用いて展開すれば

$$\begin{aligned} P_n &= r_0^2 S_n + r_1^2 \frac{\mathbf{b}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}}{1 + \mathbf{b}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}} + 2r_0 r_1 \frac{\mathbf{I}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}}{1 + \mathbf{b}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}} + \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \\ Q_n &= r_0 S_n + r_1 \frac{\mathbf{I}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}}{1 + \mathbf{b}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}} \end{aligned}$$

と計算される。

$$P_n S_n - Q_n^2 = \left(r_1^2 \frac{\mathbf{b}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}}{1 + \mathbf{b}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}} + \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \right) S_n - r_1^2 \left(\frac{\mathbf{I}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}}{1 + \mathbf{b}' \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}} \right)^2$$

であるから、これらを(17)式に代入すれば、 $n \rightarrow \infty$ のとき、ケースNについては、 $S_n \rightarrow \infty$ であるから

$$\sigma_p \rightarrow \sqrt{\frac{(r_0 - \mu_p)^2}{r_1^2 + \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}}}$$

を得る。すなわち、漸近的有効フロンティアの式は

$$(19) \quad \mu_p = r_0 \pm \sqrt{r_1^2 + \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \sigma_p$$

となる。直線式になるであろうとの予想のもとで、図を描いていたのであるが、それが確認されたことになる。

いっぽう、ケースMの場合、ここでは簡単化のため

$$\mathbf{V} = \phi^2 \mathbf{I} \mathbf{I}' + \mathbf{D}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \lambda \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

の場合について、漸近的有効フロンティア式を求めることにしよう。このとき、(18)式より

$$P_n = \lambda^2 S_n + \boldsymbol{\epsilon}' \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}$$

$$Q_n = \lambda S_n$$

であり、 $S_n \rightarrow \frac{1}{\phi^2}$ であるから、これらを(17)式に代入すれば、漸近的有効フロンティアは

$$(20) \quad \sigma_p^2 = \frac{1}{\boldsymbol{\epsilon}' \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}} (\mu_p - \lambda)^2 + \phi^2$$

と表現される。ケース N と異なり、それが直線式でないのは、相関係数が 1 の近傍に入る十分離れた二つのポートフォリオを作成することができないためである。

ケース N と M の両者において、漸近的有効フロンティアの傾き (タンジェンシー) がほとんど評価誤差 2 乗和に依存していることが示された。すなわち、評価誤差 2 乗和の有界性はタンジェンシーの有界性と同等である。すなわち、Chamberlain and Rothschild [1] の命題 3 を確認したことになる。

V おわりに

本稿においては、裁定評価理論が平均-分散平面上においてどのような世界を描くのかについて検討してきた。そして、漸近的無裁定条件が成立するときには、危険資産数が有限の通常平均-分散平面と同じ有効フロンティアが描かれることを確認した。

Roll [5] が主張したことは、リスクとリターンの線形関係式は数学的性質に依るものであり、代理ポートフォリオによるその統計的有意性を検定することは意味のないことである、ということであった。APT の検証においても、同様なことが言える。Shanken [7]、村松 [8] においても論じられているように、検証されるべきことは、線形性の統計的有意性ではなく、評価誤差 2 乗和の有界性である。

評価誤差 2 乗和の有界性のみでは、ほとんど検証不可能な命題である。なぜなら、現実の有限な資産数を前にするとき、それは常に成立することであるからである。われわれは、IV 節において、評価誤差 2 乗和の平方根がほとんどタンジェンシーになることを確認した。有限な資産数の下では評価誤差 2 乗和の平方根は有限であるが、1% のリスクに 50% の期待収益率が約束されるタンジェンシーが存在するとき、平均的リスク許容度を有する投資家から見れば、そうした価格付けは均衡を逸脱したものであると判断されるかも知れない。

リスクとリターンのトレード・オフを表象するタンジェンシーについて、ある仮説的制約を置くことにより、より裁定評価理論に根ざした検証を行うことになると言えるであろう。

参考文献

- [1] Chamberlain, G. & M. Rothschild, 1983, "Arbitrage, Factor Structure, and Mean-Variance Analysis On Large Asset Markets", *Econometrica*, 51.
- [2] Huberman, G., 1982, "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Economic Theory*, 28.
- [3] Ingersoll, J., 1984, "Some Results in the Theory of Arbitrage Pricing", *Journal of Finance*, 39.
- [4] Jarrow, R., 1988, *Finance Theory*.
- [5] Roll, R., 1977, "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests: Part I", *Journal of Financial Economics*, 4.
- [6] Ross, S., 1976, "The Arbitrage Pricing Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, 13.
- [7] Shanken, J., 1982, "The Arbitrage Pricing Theory: Is It Testable?", *Journal of Finance*, 37.
- [8] 村松郁夫, 1998, 「APT の検証仮説 —— 対角化ゼロ・ファクター・モデルと検証可能性 ——」, 滋賀大学経済学部研究年報, Vol. 5.