

Nikaido(1956, 57, 59)による無限次元財空間 モデルのゲール・二階堂・ドブリューの 補題について*

久保田 肇^{†‡}

I はじめに

ワルラス(1874-77)によって構築された市場経済モデルは、ワルラス自身は競争均衡（または市場均衡）として表現されるモデル内の整合的な解の存在を示せずにはいたが、1930年代のワルト(1935, 36)は、カッセル(1924)によって簡略に表現されたワルラスモデルに、その競争均衡が存在する事を示した。その後、1950年代になって、アロー・ドブリュー(1954), マッケンジー(1954), ゲール(1955), 二階堂(1956)らが、より一般的なワルラスモデルにおいて競争均衡の存在する事を示した。アロー・ドブリュー(1954)による証明では、元モデルを抽象ゲーム形式における解の存在問題へ変換し、このゲームに(ナッシュ)均衡解が存在するというドブリュー(1952)による結果を利用して、競争均衡の存在証明を行った。アロー・ドブリュー(1954)が利用したドブリュー(1952)の抽象経済におけるナッシュ均衡の存在証明は、角谷の不動点定理より一般的な¹⁾アレンベルグ・モントゴメリー・ビーグルの不動点定理を用いて行われた。マッケンジー(1954)では、国際貿易における多数国多数財モデルであるグレアムモデルという枠組みにおいて、超過需要の符号に応じて価格が変動するとい

*本稿の内容を、平成18年3月17, 18日に一橋大学(佐野書院)で開催された二階堂副包先生追悼コンファレンスにおいて報告した際に、多くの参加者、特に、筑波大学の金子守教授と大阪大学の浦井憲教授、から様々なコメントを頂いた。ここに記して感謝致します。

[†]〒060-0809 札幌市北区北9条西7丁目 北海道大学大学院経済学研究科

[‡]田中穂積先生とは滋賀大学経済学部と共に平成9年4月に赴任し、それ以来筆者の赴任期間を含めて、様々な機会に大変にお世話になりました。この機会を借りて心よりお礼申し上げ、御冥福をお祈り致します。

う価格調整機構に基づく写像と角谷の不動点定理を利用して、このモデルの競争均衡である自由貿易均衡の存在を直接的に証明した。²⁾これらの点から鑑みると、アロー・ドブリュー(1954)が扱ったような市場経済モデルにおける競争均衡の存在定理の証明に対して、直接的にブラウワーや角谷の不動点定理が利用可能であると予想されるが、それがゲール(1955)や二階堂(1956a)による競争均衡の存在証明である。実際、ゲール(1955)では最も重要な補題としてゲール・二階堂の補題が述べられてKKMの補題に基づいてその証明が行われており、二階堂(1956)では、明示的には補題として独立した命題の形にはなっていないが、ゲール・二階堂の補題の結果が述べられてそれが角谷の不動点定理を利用して証明されている。³⁾特に二階堂による証明は、その後の一般均衡理論の古典的著書であるドブリュー(1959, p. 82)におけるゲール・二階堂の補題の証明として採用されており、また、二階堂(1960, p. 316)でも、ゲール・二階堂の定理の証明として取り入れられている。そして、ゲール・二階堂の補題ではユークリッド空間の非負象限が用いられたが、この条件をより一般的な閉凸錐へ拡張したのがドブリュー(1956)であり、これらの結果は通常ゲール・二階堂・ドブリューの補題と呼ばれている。

ところで、以上で考察している市場経済においては、財の数が有限個と想定されているので、それはドブリュー(1959)によって議論されているように、財の特性、取引される場所や時点、そして不確実性の状態が全て有限である。したがって、取引される時点や不確実性の状態が無限個あるような市場経済には、

1) アロー・ドブリュー(1954)で必要となる抽象経済のナッシュ均衡の存在定理は、ベルジュ(1963)の最大値定理による最適解の上半連続性によって最適戦略対応が上半連続的となるので、実際には角谷の不動点定理を利用して証明すればよく、アロー・ドブリュー(1954)が利用したドブリュー(1952)の抽象経済のナッシュ均衡の存在定理よりも容易に証明できる。

2) 角谷の不動点定理は、ナッシュ(1950)による非協力ゲームにおけるナッシュ均衡の存在証明において初めて利用された。しかし、ナッシュ(1951)ではブラウワーの不動点定理を利用する形に修正されている。

3) ゲール(1955)によるゲール・二階堂の補題の証明は、KKMの補題と、角谷(1942)がその不動点定理の証明で利用したブラウワーの不動点定理による近似の手法を、利用している。

上記の結果を適応してその競争均衡の存在を示す事はできない。ただし、ドブリュー(1954)では、無限個の財が存在するケースも含む一般的な線形空間における厚生経済学の基本定理の証明を行ったが、そのような経済における競争均衡の存在証明は行っていない⁴⁾。そして、無限個の財が存在する経済における競争均衡の存在問題は、点列の集合 $\mathfrak{A}(R^\infty)$ を財空間としたペレグ・ヤーリー(1970)や本質的に有界な可測関数族 L^∞ を財空間としたビューリー(1972)によって取り上げられ、これらの無限個の財が存在する市場経済において競争均衡の存在する事が証明された。その後、この問題は無限次元財空間モデルにおける競争均衡の存在問題として、1980年代の一般均衡理論の1つの主要な話題として取り上げられて議論された。ペレグ・ヤーリー(1970)ではコアーの非空性に関するスカーフ(1967)の定理とドブリュー・スカーフ(1963)によるコアーと競争均衡に関する極限定理を利用してその存在証明が行われ、一方ビューリー(1972)では、本来の次元が無限である無限次元財空間経済の競争均衡が、(実現可能集合と価格集合の $*$ -弱コンパクト性によって) 有限個の財を持ち次元が有限と解釈可能な有限次元財空間経済の競争均衡からなる(有向) 点列の極限になるという事を用いて、その存在証明が行われた⁵⁾。

この無限次元財空間モデルにおける競争均衡の存在問題は、既に述べた有限個の財が存在する市場経済における競争均衡で行ったような、ゲール・二階堂・ドブリューの補題に基づいてその存在証明を行うという事も考えられる。そのためには、もちろん、無限次元財空間でのゲール・二階堂・ドブリューの補題を証明する必要があるが、実はそれが二階堂(1956b 57b 59)なのである。前二者は無限次元ノルム空間を利用し、後者はより一般的な局所凸線形位相空

4) ドブリュー(1954)は、一般的な線形位相空間にける厚生経済学の第二基本定理を、後に問題となる生産集合の内部の非空性に基づいて、凸集合の分離定理を利用して証明している。二階堂(1957b)が(1956b)へ触れている部分の内容から、二階堂(1956b)から(1957b)への拡張はこの点にあったように思われる。この点は後に触れる。なお、このドブリュー(1954)の論文は、二階堂(1956b 57b 59)の参考文献に掲載されていない。

5) ビューリー(1972)の元論文(1969)やマギール(1981)では、 L^∞ を財空間とする市場経済の競争均衡の存在定理を、厚生経済学の第二基本定理に基づいて競争均衡の存在を示す根岸(1960)の手法を用いて、証明している。

間を利用している。⁶⁾前二者では、無限次元財空間経済の超過供給対応の像の(＊-弱)コンパクト性に基づいて、有限個の財を持つ有限次元財空間経済の競争均衡集合族に対して成立する有限交差性を利用して、元来の無限次元財空間経済の均衡集合の非空性を証明している。この証明は大変に簡易で理解しやすく、ビューリー(1972)とある意味で同様である。ビューリー(1972)では、有限次元部分経済に有限次元財空間モデルの競争均衡の存在定理を利用し、一方、二階堂(1956b, 57b)では、有限次元部分経済に有限次元財空間モデルのゲール・二階堂の補題を利用している。そして、二階堂(1959)では、一般的な線形位相空間におけるナッシュ均衡の存在やミニマックス定理等を含むかなり一般的な結果を証明してからその結果を利用して、前二者と同様な手法でその証明を行っている。ただし最初の一般的な結果の証明はかなり煩雑である。⁷⁾

1980年代以降に発展した無限次元財空間モデルの議論では、不思議な事に二階堂(1956b, 57b, 59)には全く触れられていない。⁸⁾理由として幾つかあると思われる。まずは、二階堂(1956b, 57b)がディスカッションペーパーであってどの雑誌にも掲載されて発表されなかった事である。次に、二階堂(1959)は日本の英文の数学雑誌には掲載されたが、無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂・ドブリューの補題の証明をその主要な結果としているのではなく、一般的な線形位相空間におけるナッシュ均衡の存在やミニマックス定理等を含むより一般的な結果を示してから、その結果に基づいて無限次元財空間モ

6) 二階堂(1956b)は二階堂(1957a, 59)の参考文献で揚げられているが、残念ながら筆者はその現物を目にしていない。ただし、二階堂(1957b)では、この論文が二階堂(1956b)の改訂版であると述べている事と二階堂(1956b)に触れている内容から、二階堂(1956b)の内容を伺い知る事が出来る。この内容については後に触れている。

7) 二階堂(1957b)の注2)において、そこで用いたノルム空間のケースの結果が容易に一般的線形位相空間にまでも拡張できると述べているが、二階堂(1959)ではこの線に沿って二階堂(1957b)の証明をそのまま拡張するという方針は取られなかった。

8) フロレンザーノ(1983)、ヤネリス(1985)、そしてメータ・タラフダー(1987)らが無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題の議論を行っているが、二階堂(1956b, 57b, 59)には何ら触れていない。最近の浦井(2000)だけが二階堂(1956b, 57b, 59)に触れている唯一の例外である。本稿では、紙数の関係で、フロレンザーノ(1983)、ヤネリス(1985)、メータ・タラフダー(1987)等の研究で得られた結果との詳しい比較は割愛するが、それについては別の機会に行う予定である。

デルにおけるゲール・二階堂・ドブリューの補題を証明していて、無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂・ドブリューの補題それ自身を主要な題材として扱ってはいない事である。更に、二階堂(1959)では無限次元財空間で表される経済モデルを明示的に議論しておらず、論文の題名が無限次元財空間における競争均衡の存在問題と関連したものになっていなかった事である。⁹⁾したがって、無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂・ドブリューの補題の結果と証明と共に、その結果が適用可能な無限次元財空間を持つ経済モデルの例を取り上げるような論文も作成されていれば、後の無限次元財空間モデルの発展にとって、大変に大きな貢献をしていたと考えられる。もちろん、経済モデルの例に触れてはいないが、有限次元空間における競争均衡の存在が示された直後に、無限次元空間において超過供給対応を想定してそれに対するゲール・二階堂の補題の定式化とその証明を行ったという点で、二階堂(1956b 57 b 59)の貢献や意義は何ら損なわれない。

本論文では、二階堂(1956b 57b 59)の無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂・ドブリューの補題を再考し、二階堂(1959)の無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂・ドブリューの補題の証明を、超過供給対応が凸値となるケースにおいて、二階堂(1956b 57b)と同様な簡潔で直接的な手法で行う。

9) 実際、無限次元財空間における均衡の存在というような題名を持つ Bojan(1974)や El-barkoky(1977)(原文ロシア語)といった論文は、マスコーレル・ゼーム(1991)の概説論文も含めて、この分野の1980年代以降の文献の参考文献に度々引用されている。二階堂(1959)は二階堂(1968)の参考文献に引用されているが、二階堂(1968)では無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂・ドブリューの補題については触れていない。二階堂(1968)はその出版後に一般均衡理論の1つの著名なテキストとなった事を考慮すると、参考文献に二階堂(1956b 57b)も引用されていれば、無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂・ドブリューの補題が二階堂先生によって議論されている事が周知されていたと思われる。

10) 実際、二階堂(1959)の第5節では、その無限次元のゲール・二階堂の補題の経済モデルへの応用に触れているが、消費者の消費集合や選好そして生産者の生産集合に基づいて具体的に構成された無限次元財空間モデルは、残念ながら、構成していない。

II 無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂・ドブリューの補題: モデル

二階堂(1959)による局所凸線形位相空間のケースでのゲール・二階堂・ドブリューの補題の証明は, 二階堂(1957b)の証明をそのまま拡張したというよりは, 抽象経済におけるナッシュ均衡の存在やミニマックス定理をその特殊ケースとして含むような一般的な結果を利用して行われている。本稿では, 二階堂(1959)の局所凸線形位相空間のケースの結果に関して, 特に超過供給対応が凸値となるケースにおいて, 二階堂(1957b)の注2)に沿う事により, 二階堂(1957b)の証明方法に沿ってより簡潔にその証明を与える。

まず, この節では二階堂(1959, 第5節)に沿ってモデルを述べてその解説を行う。本稿では必要に応じて二階堂(1957b)で触れられた議論も取り入れる。 E をここで取り扱うモデルの無限次元財空間とし, それを実ハウスドルフ局所凸線形位相空間とする。¹¹⁾この線形位相を τ とすると, この線形位相については, 凸平衡な集合から構成される原点の基本近傍系が存在する。そして, E 上の τ に関して連続な線形汎関数の集合である E の双対空間を E^* とする。¹²⁾この時, $(\cdot, \cdot): E \times E^* \rightarrow R, (x, p) \in E \times E^* \rightarrow x \cdot p$ を, $E \times E^*$ 上で定義された双線形関数とすれば, $p \in E^*$ に対して $(\cdot, p): E \rightarrow R$ を連続にするような E 上の最弱の線形位相が E の弱位相 $\sigma(E, E^*)$ であり, 同様に, $x \in E$ に対して $(x, \cdot): E^* \rightarrow R$ を連続にするような E^* 上の最弱の線形位相が E^* の $*$ -弱位相(または汎弱位相)¹³⁾ $\sigma(E^*, E)$ である。

11) 二階堂(1956b, 57b)では E として(無限次元)ノルム空間が使われていたが, 二階堂(1959)ではより一般的な局所凸線形位相空間が使われる事になった。数理経済学の文献で最初に線形位相空間を用いたのはドブリュー(1954)であるが, 弱位相や $*$ -弱位相等その線形位相の性質については明示的に述べていない。一方, 二階堂(1956b, 57b)では(無限次元)ノルム空間を利用してはいるが, その弱位相 $(\sigma(E, E^*))$ や $*$ -弱位相 $(\sigma(E^*, E))$ を用い, 更には, 双対空間の単位球が $*$ -弱位相でコンパクトになるというバナッハ・アラオグルー定理も利用している。

12) 線形位相なので, ベクトル和やスカラー積といった線形空間としてのベクトル演算がこの位相に関して連続となるが, 局所凸線形位相は更に半ノルム族によって生成される線形位相として特徴付けられる。

13) $\sigma(E, E^*)$ は E 上の半ノルム族として $\{\|x \cdot p\|: p \in E^*\}$ を利用して生成される線形位相であり, 同様に, $\sigma(E^*, E)$ は E^* 上の半ノルム族として $\{\|x \cdot p\|: x \in E\}$ を利用して生成される。

凸錐 $P(\subset E)$ に対して, その双対錐 P^* を $\{p \in E^* : \text{任意の } x \in P \text{ に対して } x \cdot p \geq 0 \text{ となる}\}$ とする。更に, P の第二双対錐 P^{**} を $\{x \in E : \text{任意の } p \in P^* \text{ に対して } x \cdot p \geq 0 \text{ となる}\}$ とする。 E における一つの凸錐 P に対して, $\langle P^* \rangle = P^* \setminus \{0\}$ として非ゼロな $p \in P^*$ の集合とする。

そして, 局所凸線形位相空間 E をその財空間とするような市場経済モデルを考えて, その超過供給対応を $\phi : \langle P^* \rangle \rightarrow E \setminus \{0\}$ とする。すると問題は, 有限次元のケースと同様にして, どのような条件の下である $\bar{p} \in \langle P^* \rangle$ が存在して $(\phi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となるか, という事である。そして, その条件を与えるのが本稿で考察する二階堂(1956b 57b 59)の無限次元財空間モデルのゲール・二階堂・ドブリューの補題である。ここでは, 有限次元財空間モデルと同様にして, 各 $p \in \langle P^* \rangle$ に対して $\phi(p) \neq \emptyset$ とする。¹⁴⁾

Ⅲ 幾つかの補題

この節では, 局所凸線形位相空間のケースのゲール・二階堂・ドブリューの補題を証明するために必要となる幾つかの補題を確立する。まず, 局所凸線形位相空間 E に対して以下の結果が成立する。

補題 1 : E と同一でない $(\tau-)$ 閉凸錐 P に対する P^* は 0 以外の点を含む。¹⁵⁾

補題 2 : P を E における一つの凸錐とすると, $x \in cl_{\tau}(P)$ となる必要十分条件は任意の $p \in P^*$ に対して $x \cdot p \geq 0$ となる事である。¹⁶⁾

補題 3 : E における凸錐 P の内点 (τ に関する) を u とすると, 任意の $p \in \langle P^* \rangle$ に対して $u \cdot p > 0$ となる。¹⁷⁾

ㄨ 線形位相である。

14) 無限次元財空間モデルでは, (超過) 需要関数が価格集合全体で定義されず, ある価格に対して需要点が決められないような例が様々な文献で指摘されているので, この点については注意が必要である。

15) 凸集合に関する分離定理の一形式による。二階堂(1957b, 補題 2), 二階堂(1959, 補題 4)。

16) 凸錐と第二双対錐に関する双対定理より $cl_{\tau}(P) = P^{**}$ である。二階堂(1957b, 補題 3), 二階堂(1959, 補題 5)。

17) $p(\neq 0) \in P^*$ に対して $u \cdot p = 0$ とすると, $(\cdot, p)$ の (τ に関する) 連続性と $u \in \text{intr}(P)$ より, ある $u' \in P$ に対して $u' \cdot p < 0$ となって $p \in P^*$ に矛盾するからである。二階堂(1957b, 補

E または E^* における凸錐 P は, それが 0 を除いては x と $-x$ を同時に含まない時に尖っている(*Pointed*)と呼ばれる。つまり, 凸錐が原点を通る直線を含まず, $P \cap (-P) \subset \{0\}$ という事である。するとこの時に以下の結果が成り立つ。

補題 4 : もしも E における凸錐 P の (τ に関する) 内部が非空ならば, P^* は尖っている。¹⁸⁾

証 明 . $p \in P^* \setminus \{0\}$ とし, また, P の内点の一つ u を取る。すると, 補題 3 より $-u \cdot p < 0$ となって, $-u \notin P^*$ であり, P^* は尖っている。□

補題 5 : もしも E における凸錐 P の内部 (τ に関する) が非空でしかも $cl_\tau(P)$ が E と同一でないならば, $\langle P^* \rangle$ ¹⁹⁾ は非空で凸である。

証 明 . $cl_\tau(P)$ が E と同一でないので補題 1 より $\langle (cl_\tau(P))^* \rangle \neq \phi$ となる。 $P \subset cl_\tau(P)$ より $(cl_\tau(P))^* \subset P^*$ なので, $p \in \langle (cl_\tau(P))^* \rangle$ とすれば $p \neq 0$ で $p \in P^*$ となって, $p \in \langle P^* \rangle \neq \phi$ となる。次に, $p, q \in \langle P^* \rangle$, $\lambda \in (0, 1)$ とする。まず P^* の凸性によって, $\lambda p + (1-\lambda)q \in P^*$ となる。そして, $u \in int_\tau(P)$ とすると, 補題 3 より $u \cdot p > 0, u \cdot q > 0$ となるので, $u \cdot (\lambda p + (1-\lambda)q) = \lambda(u \cdot p) + (1-\lambda)(u \cdot q) > 0$ となり, 故に, $\lambda p + (1-\lambda)q \neq 0$ で $\lambda p + (1-\lambda)q \in \langle P^* \rangle$ となって, $\langle P^* \rangle$ は凸である。□

P を E における $(\tau-)$ 閉凸錐で $P \cap (-P) \neq P$ となっているとする。 $P \cap (-P)$ は P に含まれる最大の線形部分空間なので, この条件は P が線形部分空間でない事を表している。また, もしも P が $(E$ における) 内点を含んでいれば, この事は $P \neq E$ と同値になる。しかし, 以下では $P \cap (-P) \neq P$ となっている一般的な P が, 非空な $(\tau-)$ 内部を持ち E と一致しないような凸錐によって外側から近似される事を示す。 $u \in P \setminus (P \cap (-P))$ を任意に 1 つ選ぶ。この時, $u \neq 0$ である。すると, $-u \notin P$ と P の $(\tau-)$ 閉性より, 0 のある凸平衡近傍 U を選べば, $(-u + U) \cap P = \phi$ となる。そこで, $V (\subset U)$ となる 0 の任意の凸平衡近傍 V に対して $Q(V)$ を $u + V$ によって張られる凸錐 $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(u + V)$ として,

1) 題 1), 二階堂(1959, 補題 6)。

18) 二階堂(1957b, 補題 4), 二階堂(1959, 補題 7)。

19) 二階堂(1959, 補題 8)では $int_\tau(P)$ が E と同一でないとしているが, ここでは $cl_\tau(P)$ が E と同一ではないと変更した。この変更によっても以降の議論には影響しない。

$P(V) = cl_{\tau}(P + Q(V)) (\supset P)$ とする。²⁰⁾すると, $P(V)$ は $(\tau-)$ 閉であり, しかも $(u + V) \subset Q(V) \subset P(V)$ なので u は $P(V)$ の $(\tau-)$ 内点で, $P(V)$ の $(\tau-)$ 内部は非空となる。この時, 次の補題が成立する。

補題 6 : (i) 0 の任意の凸平衡近傍 $V (\subset U)$ に対して, $-u \notin P(V)$, (ii) $P = \cap \{P(V) : 0 \text{ の任意の凸平衡近傍 } V (\subset U)\}$ 。²¹⁾

証明 . (i) の証明 : $-u \in P(V)$ としてみる。すると, ある $x \in P, \lambda \geq 0, a, b \in V$ に対して $-u = x + \lambda(u + a) + b$ となる。したがって, $-u = x/(1 + \lambda) + \lambda a/(1 + \lambda) + b/(1 + \lambda)$ となる。この時, P が錐なので $x/(1 + \lambda) \in P$ で, 更に, V の凸性によって $[\lambda a/(1 + \lambda) + b/(1 + \lambda)] \in V$ である。故に, V の平衡性により $(-u + V) \cap P \neq \phi$ となって, $V \subset U$ より $(-u + U) \cap P \neq \phi$ となるが, これは U の選び方に矛盾する。

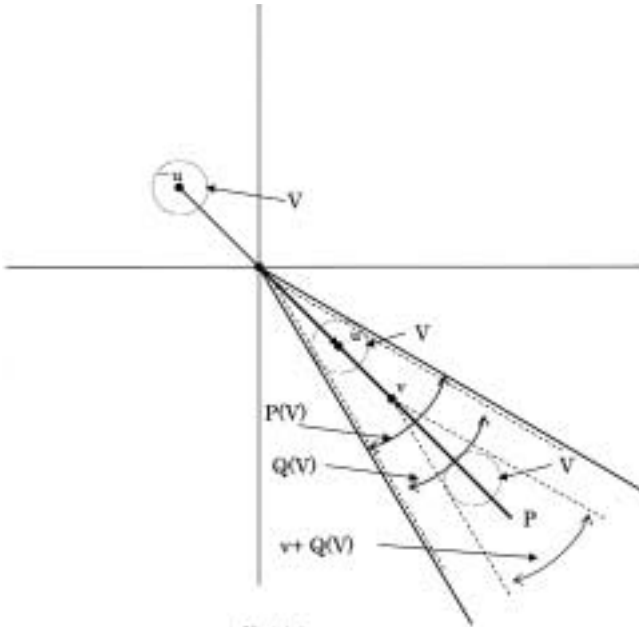
(ii) の証明 : 0 の任意の凸平衡近傍 $V (\subset U)$ に対して $P(V)$ の定義より $P(V) \supset P$ なので $P \subset \cap \{P(V) : 0 \text{ の任意の凸平衡近傍 } V (\subset U)\}$ である。そこで, 0 の任意の凸平衡近傍 $V (\subset U)$ に対して $y \in P(V)$ となるが $y \notin P$ となるとする。まず, $y \in P(V)$ より, ある $x_V \in P, \lambda_V \geq 0, a_V, b_V \in V$ に対して $y = x_V + \lambda_V(u + a_V) + b_V$ となる。すると, $y - (x_V + \lambda_V u) = \lambda_V a_V + b_V = c_V$ となるが, P が凸錐なので $x_V + \lambda_V u \in P$ である。 $y \notin P$ なので P の $(\tau-)$ 閉性より, 0 のある凸平衡的近傍 $W \subset U$ を選んで, $(y + W) \cap P = \phi$ とできる。この時, $y - c_V = (x_V + \lambda_V u) \in P$ なので, $c_V \notin W$ である。最初に, $\lambda_V \rightarrow \infty (V \rightarrow 0)$ を示す。 n を任意に固定して, 任意の $V \subset W/n$ に対して $\lambda_V > n - 1$ を示せばよい。 V の凸性によって $c_V/(1 + \lambda_V) = [(\lambda_V a_V/(1 + \lambda_V)) + (b_V/(1 + \lambda_V))]$ $\in V \subset W/n$ であり, 故に, $c_V \in W(1 + \lambda_V)/n$ となる。しかし, $c_V \notin W$ なので, $(1 + \lambda_V)/n > 1$ でなくてはならず, $\lambda_V > n - 1$ となる。そして, $c_V/(1 + \lambda_V) \in V$ なので $c_V/\lambda_V = (y/\lambda_V) - ((x_V/\lambda_V) + u) \in (1 + (1/\lambda_V))V$ であり, $(x_V/\lambda_V) + u \in (y/\lambda_V) + (1 + (1/\lambda_V))V$ となる。そして, $V \rightarrow 0$ とすると $\lambda_V \rightarrow \infty$ となるので $(y/\lambda_V) + (1 + (1/\lambda_V))V \rightarrow 0$

20) このような $P + Q(V)$ と同様に構成される開凸錐が, 内点条件が満たされない無限次元財空間のケースを考察したマスコーレル(1986)でも, プロパーネス(properness)条件として利用されている。

21) 二階堂(1957b, 補題 7), 二階堂(1959, 補題 8)。

となり, 故に, $(x_V/\lambda_V) + u \rightarrow 0$, つまり, $\lim_{V \rightarrow 0} x_V/\lambda_V = -u$ となる。すると, P が錐なので $x_V \in P$ より $x_V/\lambda_V \in P$ となって, $\lim_{V \rightarrow 0} x_V/\lambda_V = -u \in \text{cl}(P) = P$ となるが, これは $-u \notin P$ に矛盾する。したがって, $P \supset \cap \{P(V) : 0 \text{ の任意の凸平衡近傍 } V(\subset U)\}$ となって, $P = \cap \{P(V) : 0 \text{ の任意の凸平衡近傍 } V(\subset U)\}$ となる。□

補題 6 においては, $P(V)$ は τ -閉であり, しかも $-u \notin P(V)$ なので $P(V) \neq E$ であり, したがって, $P(V)$ に対して補題 5 が適応可能となる。



第 1 図

ここで, 対応 (多価写像) の上半連続性と閉性に関して議論する。 S と X を二つのハウスドルフ空間として $\varphi : S \rightarrow X \setminus \{\emptyset\}$ を対応 (多価写像) とする。この時, (1) 任意の $p \in S$ と任意の開近傍 $U(\varphi(p))$ に対して p のある開近傍 $V(p)$ が存在して任意の $q \in V(p)$ に対して $\varphi(q) \subset U(\varphi(p))$ となる時に, φ は上半連続 (u.h.c.) と呼ばれる。 (2) φ のグラフ $G_\varphi = \{(p, x) \in S \times X : x \in \varphi(p)\}$ が

$S \times X$ の直積位相で閉集合となる時に、 φ は閉(closed)と呼ばれる。連続関数の定義より、連続関数はそれに対応とみなすと上半連続である。また、二つの上半連続対応の合成写像もまた上半連続である。これらの上半連続性と閉性という条件は一般には同値ではないが、条件を付け加える事によって両者をより関連付ける事が出来る。

補題 7 : S をコンパクトとする。すると、次の二つの条件は同値である。

(a): φ は上半連続であり、全ての $\varphi(p)$ がコンパクトである。(b): φ は閉であり、 X のコンパクト集合 T が存在して全ての $\varphi(p)$ が T に含まれる。²³⁾

証明 . (a) $\rightarrow$ (b): $T = \bigcup_{p \in S} \varphi(p)$ として、 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を T の開被覆とする。 $\varphi(p)$ のコンパクト性より、任意の $p \in S$ に対してある $V_{\lambda p j}, j = 1, \dots, l(p)$ が存在して $\varphi(p) \subset \bigcup_{j=1}^{l(p)} V_{\lambda p j}$ となるが、すると φ の上半連続性から p のある開近傍 U_p が存在して、 $q \in U_p \rightarrow \varphi(q) \subset \bigcup_{j=1}^{l(p)} V_{\lambda p j}$ となる。この時、 $\{U_p\}_{p \in S}$ は S の開被覆なので、ある有限個の $p_1, \dots, p_m \in S$ が存在して $S \subset \bigcup_{i=1}^m U_{p_i}$ となる。すると、 $l = l(p_1) + \dots + l(p_m)$ として、 $q \in U_{p_i} \rightarrow \varphi(q) \subset \bigcup_{j=1}^{l(p_i)} V_{\lambda p_i j}$ によって $q \in S \subset \bigcup_{i=1}^m U_{p_i} \rightarrow \varphi(q) \subset \bigcup_{i=1}^l V_{\lambda p_i}$ となるので、 $T = \bigcup_{p \in S} \varphi(p) \subset \bigcup_{i=1}^l V_{\lambda p_i}$ となり、 T には $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の有限開被覆 $\{V_{\lambda p_i}\}_{i=1}^l$ が存在する。故に、 $T = \bigcup_{p \in S} \varphi(p)$ はコンパクトである。²⁴⁾ 次に、 $(p, x) \in cl(G_\varphi) \setminus (G_\varphi)$ とする。 T のコンパクト性と $x \notin \varphi(p)$ によって、 x の開近傍 W_x と $\varphi(p)$ の開近傍 $V(\varphi(p))$ の二つが存在して、 $V(\varphi(p)) \cap W_x = \emptyset$ となる。 φ の上半連続性から p の開近傍 U_p が存在して $q \in U_p \rightarrow \varphi(q) \subset V(\varphi(p))$ となる。 $(p, x) \in cl(G_\varphi)$ なので $(p, x) \in (U_p \times W_x)$ によってある $(q, y) \in [(U_p \times W_x) \cap G_\varphi]$ が存在するが、 $q \in U_p, y \in [W_x \cap \varphi(q)]$ な

22) $\varphi(p)$ を含む任意の開近傍 $U(\varphi(p))$ に対してではなくて、 $\varphi(p)$ を含む任意の開半空間 $H(\varphi(p))$ に対して同様な結果が成立する時に、 φ は upper demi-continuous(u.d.c)といわれ、ヤネリス(1985)において用いられた。 $\varphi(p)$ を含む任意の開半空間は $\varphi(p)$ を含む開集合なので、u.s.c.ならば u.d.c. である。ヤネリス(1985)では、本稿で扱う上半連続のケースの無限次元財空間のゲール・二階堂の補題を、凸錐 P の内部の非空性を仮定した状況で、u.d.c. のケースへ拡張している。

23) 二階堂(1957b, 補題 8), 二階堂(1959, 補題 3)。

24) これは $\varphi: S \rightarrow X$ が上半連続で S がコンパクトであれば、 $T = \bigcup_{p \in S} \varphi(p)$ がコンパクトである事を示している。

ので $V(\varphi(p)) \cap W_x \neq \emptyset$ となって矛盾が起こる。したがって、 $cl(G_\varphi) \setminus (G_\varphi) = \emptyset$ となって $(G_\varphi) = cl(G_\varphi)$ となり、 φ は閉対応である。

$(b) \rightarrow (a): x \in cl(\varphi(p)) (\subset T)$ とすると、 x の任意の開近傍 V に対して $(z_V \in)(V \cap \varphi(p)) \neq \emptyset$ となる。そこで、 p の任意の開近傍を U とすると、 $(p, x) \in U \times V, ((p, z_V) \in)[(U \times V) \cap G_\varphi] \neq \emptyset$ となって $(p, x) \in cl(G_\varphi) = G_\varphi$ となるので、 $x \in \varphi(p)$ であり、 $\varphi(p)$ は閉である。故に、 T のコンパクト性と $\varphi(p) \subset T$ より $\varphi(p)$ はコンパクトになる。次に、 φ が p で上半連続でないとする、 $\varphi(p)$ のある開近傍 V が存在して、 p の任意の開近傍 U に対して、ある $p_U \in U$ と $x_U \in \varphi(p_U)$ が存在して $x_U \notin V$ となる。そこで、 $U \subset U' \leftrightarrow U' \leq U$ によって与えられる半順序 $\leq$ を利用した有向点列(ネット) $(p_U), (x_U)$ を考えると、まず $p_U \rightarrow p$ であり、また、 $(x_U) \subset T$ で T がコンパクトなので、 (x_U) には収束部分有向点列(サブネット) (x_{U_λ}) が存在して $x_{U_\lambda} \rightarrow y \in T$ となる。そして、 $x_U \in V$ と V^c の閉性から $y \in V$ となる。ところで、 $(p_{U_\lambda}, x_{U_\lambda}) \in G_\varphi, (p_{U_\lambda}, x_{U_\lambda}) \rightarrow (p, y)$ 、そして、 φ の閉性によって、 $(p, y) \in G_\varphi$ となって $y \in \varphi(p) \subset V$ となるが、これは $y \in V$ に矛盾し、故に、 φ は p で上半連続である。□

本稿では二階堂(1957b)の証明に従っているが、そこでは二階堂(1956a)で示された、 n -次元ユークリッド空間(有限次元部分空間)におけるゲール・二階堂の補題を利用している。まず、この n -次元ユークリッド空間における結果を与える。 S^n を n -次元ユークリッド空間 R^n の基本単体 $\{p \in R^n : p \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ 、 R_+^n を R^n の非負象限 $\{x \in R^n : x \geq 0\}$ 、更に、この時の超過供給対応を $\phi : S^n \rightarrow R^n \setminus \{\emptyset\}$ とする。

補題8(ゲール・二階堂: R^n のケース): 超過供給対応 $\phi : S^n \rightarrow R^n \setminus \{\emptyset\}$ がコンパクト凸値で上半連続であり、 $p \in S^n$ に対して $x \in \phi(p) \rightarrow p \cdot x \geq 0$ (弱ワルラス法則)を満たすとする。するとある $\bar{p} \in S^n$ が存在して $\phi(\bar{p}) \cap R_+^n \neq \emptyset$ となり、故に、ある $\bar{x} \in \phi(\bar{p})$ に対して $\bar{x} \geq 0$ となる。²⁵⁾

証明. S^n がコンパクトで ϕ が上半連続でコンパクト値なので、補題7の証明で示した事によって $T = \bigcup_{p \in S^n} \phi(p)$ はコンパクトになり、故に T を含む

25) 二階堂(1957b, 補助定理)。

十分に大きな閉直方体の1つを Δ とすれば任意の $p \in S^n$ に対して $\phi(p) \subset \Delta$ と出来る。もちろん、補題7より ϕ は閉対応になる。対応 $\theta: \Delta \rightarrow S^n \setminus \{\emptyset\}$ を $\theta(x) = \{p \in S^n: \text{任意の } q \in S^n \text{ に対して } p \cdot x \leq q \cdot x\}$ によって定義する。まず、内積 $\cdot$ の連続性と S^n のコンパクト性から $\theta(x) \neq \emptyset$ である。また、内積 $\cdot$ の線形性から $\theta(x)$ は凸である。そして、補題7より θ の閉性と上半連続性は同値である。 $(x^m, p^m) \in G_\theta, x^m \rightarrow x \in \Delta, p^m \rightarrow p \in S^n$ とすると、 $\theta(\cdot)$ の作り方から任意に固定した $q \in S^n$ に対して $p^m \cdot x^m \leq q \cdot x^m$ となるので、内積 $\cdot$ の連続性より $m \rightarrow \infty$ とすると $p \cdot x \leq q \cdot x$ となって $p \in \theta(x)$ 、つまり、 $(x, p) \in G_\theta$ となって、 θ は閉であり、故に上半連続である。次に対応 $\chi: S^n \times \Delta \rightarrow (S^n \times \Delta) \setminus \{\emptyset\}$ を $\chi(p, x) = \theta(x) \times \phi(p)$ によって定義すると、 $\theta(x) \times \phi(p)$ はコンパクトで凸である。更に、 θ と ϕ の閉性から χ も閉になり、故に、 $S^n \times \Delta$ のコンパクト性と補題7から χ は上半連続である。したがって、 χ は $S^n \times \Delta$ からそれ自身の凸コンパクト部分集合へ写す上半連続対応であるので、角谷の不動点定理によって、ある不動点 $(\bar{p}, \bar{x}) \in S^n \times \Delta$ が存在して $(\bar{p}, \bar{x}) \in \chi(\bar{p}, \bar{x})$ となる。まず、 $\bar{x} \in \phi(\bar{p}) \subset \Delta, \bar{p} \in \theta(\bar{x})$ となるので、ワルラス法則によって任意の $q \in S^n$ に対して $0 \leq \bar{p} \cdot \bar{x} \leq q \cdot \bar{x}$ となるが、 $q = e^i = (0, \dots, 0, 1(i \text{ 座標}), 0, \dots, 0)$ とすれば $0 \leq e^i \cdot \bar{x} = \bar{x}_i, i = 1, \dots, n$ となって、 $(\bar{x}) \in (\phi(\bar{p}) \cap R_+^n) \neq \emptyset$ となる。□

IV 無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂・ドブリューの補題：証明

この節では、二階堂(1959)で示された、無限次元(局所凸線形位相空間)のゲール・二階堂・ドブリューの補題の証明を、特に超過供給対応が凸値のケースで行い、その内容について議論する。最初にその定理を述べる。今まで同様に、 E を局所凸線形位相空間で P を E の τ -閉凸錐で $((-P) \cap P) \neq P$ とする。

定理(Nikaido(1959): 凸値のケース): $\varphi: \langle P^* \rangle \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ が次の条件を満たすとする。(i) 任意の $p \in \langle P^* \rangle$ に対して $\varphi(p)$ は凸で弱 $(\sigma(E, E^*)-)$ コンパクトである。(ii) L を P^* の任意の有限次元の凸部分錐として $\langle P^* \rangle \cap L$ には $*$ -弱位相 $(\sigma(E^*, E))$ 、 E には弱位相 $(\sigma(E, E^*))$ を用いて、 φ を $\langle P^* \rangle \cap L$ に制限した対応 $\varphi: \langle P^* \rangle \cap L \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ が上半連続である。(iii) φ による $\langle P^* \rangle$

の像である $\cup_{p \in \langle P^* \rangle} \varphi(p)$ が弱コンパクトである。(iv) $p \in \langle P^* \rangle$ に対して $x \in \phi(p) \rightarrow p \cdot x \geq 0$ (弱ワルラス法則) を満たす。この時, ある $\bar{p} \in \langle P^* \rangle$ が存在して $\phi(\bar{p}) \cap P \neq \emptyset$ となる。

前節の補題 8 の有限次元部分空間のケースの条件と比べてみると, 一番大きな違いは, 有限次元部分空間のケースのように φ の上半連続性を定義域である $\langle P^* \rangle$ 全体で成立するとしているのではなくて, その有限次元凸部分錐 $L(\cap \langle P^* \rangle)$ 上でのみ成立するとしている事である。 P^* の有限次元凸部分錐 L は P^* の有限個の一次独立なベクトル $\{p_1, \dots, p_m\}$ によって生成される線形部分空間 $[p_1, \dots, p_m]$ と P^* の共通集合であり, 有限部分空間上では局所凸線形位相空間は m -次元ユークリッド空間 R^m のユークリッド式ノルムによる位相と同値という意味で一意的であり, また, m -次元ユークリッド空間 R^m の双対空間 $(R^m)^*$ に対しては $(R^m)^* = R^m$ が成立するので, 有限次元部分空間のケースの条件が各有限次元凸部分錐 $L(\cap \langle P^* \rangle)$ 上で成立すると想定していると考えられる。もちろん, φ の上半連続が $\langle P^* \rangle$ 全体で成立するとすれば, 有限凸部分錐 $L(\cap \langle P^* \rangle)$ 上で成立するのは言うまでもないが, この逆は一般には言えない。

定理の証明. 補題 6 の P を少し広げた $P(V)$ に対しては $P \subset P(V)$ となっているので $P(V)^* \subset P^*$ となる。また, 全ての $P(V)$ は u を共通の (τ -) 内点として含んでいるが, どれも $-u$ は含んでいないので, $P(V)$ は補題 5 の条件を満たしていて, $\langle P(V)^* \rangle$ は非空で凸となる。そこで, $\langle P(V)^* \rangle$ から任意に選んで固定した有限集合を $F = \{p_1, \dots, p_m\}$ とする。 $\langle P(V)^* \rangle$ の凸性から F の凸包に対して $co(F) \subset \langle P(V)^* \rangle$ となる。二つの連続関数を定義する。まず, $\alpha: E \rightarrow R^m$, $\alpha_i(x) = p_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ とする。 $p_i \in E^*$ は E 上の弱連続な線形汎関数なので, $\alpha_i: E \rightarrow R$ は弱連続になり, $\alpha: E \rightarrow R^m$ も弱連続である。次に, $\beta: S^m \rightarrow \langle P(V)^* \rangle$ を $\beta(w) = \sum_{i=1}^m w_i p_i$ とする。 β は p_i , $i = 1, \dots, m$ の 1 次結合なので, 線形位相の性質より値域に E^* 上の $*$ -弱位相を利用すると β は連続になる。この時, $co(F) \subset \langle P(V)^* \rangle$ なので $\beta(w) \in \langle P(V)^* \rangle$ である。そして, α, β, φ の合成写像 $\alpha \circ \varphi \circ \beta$ を $\phi: S^m \rightarrow R^m$ とする。 $\phi(w) = \alpha(\varphi(\beta(w)))$ なの

で, $\phi(w)$ は w を係数とした $p_1, \dots, p_m$ の凸結合 $\beta(w)$ によって与えられる超過供給ベクトル(集合) $\varphi(\beta(w))$ の各 $p_1, \dots, p_m$ での評価額ベクトル $(p_1(\varphi(\beta(w))), \dots, p_m(\varphi(\beta(w))))$ である。 $\beta(S^m) \subset (L \cap P(V)^*) = ([p_1, \dots, p_m] \cap P(V)^*)$ なので (iii) によって φ は $\beta(S^m)$ 上で上半連続である。

この $\phi: S^m \rightarrow R^m$ は補題 8 の条件を満たす。まず, $\beta(w) = q$ とすると $\varphi(q) \neq \emptyset$ なので $\varphi(q)$ の各 p_i による評価額も存在して $\phi(w) \neq \emptyset$ である。次に, $r, r' \in \phi(w), \gamma \in (0, 1)$ に対して $r'' = \gamma r + (1-\gamma)r'$ とする。 $r, r' \in \phi(w)$ よりある $y, y' \in \varphi(\beta(w))$ が存在して $r = \alpha(y), r' = \alpha(y')$ となる。 $\varphi(\beta(w))$ は凸なので $\gamma y + (1-\gamma)y' \in \varphi(\beta(w))$ で $\alpha(\gamma y + (1-\gamma)y') \in \phi(w)$ である。そして, α は線形なので $\alpha(\gamma y + (1-\gamma)y') = \gamma \alpha(y) + (1-\gamma)\alpha(y') = \gamma r + (1-\gamma)r' = r'' \in \phi(w)$ となり, $\phi(w)$ は凸である。そして, $\varphi(q)$ は弱コンパクトで各 p_i は弱連続なので, ワイエルシュトラスの定理より $p_i(\varphi(q)) \subset R$ もコンパクトであり, 故に, $\phi(w) \subset R^m$ もコンパクトである。 ϕ の上半連続性は, α, β が連続関数なので対応として考えると上半連続であり, 上半連続対応の合成写像が上半連続になる事によって, 成立する。最後に弱ワルラス法則について考える。 $r \in \phi(w)$ とすると, ある $z \in \varphi(\beta(w))$ が存在して $r = \alpha(z) = (p_1(z), \dots, p_m(z))$ となる。すると, (iv) より $[\beta(w)](z) \geq 0$ となるが, $w \cdot r = \sum_{i=1}^m p_i(z) w_i = (\sum_{i=1}^m w_i p_i)(z) = [\beta(w)](z) \geq 0$ となって, ϕ に対しても弱ワルラス法則が成立する。

したがって, $\phi: S^m \rightarrow R^m$ は補題 8 の条件を満たすので, ある $\bar{w} \in S^m$ が存在して $\phi(\bar{w}) \cap R_+^m \neq \emptyset$ となり, ある $\bar{x} \in \varphi(\beta(\bar{w}))$ に対して $(p_1(\bar{x}), \dots, p_m(\bar{x})) \geq 0$ となる。この時, $\beta(\bar{w}) \in \langle P(V)^* \rangle \subset \langle P^* \rangle$ なので $\bar{x} \in \varphi(\beta(\bar{w})) \subset \Delta = \bigcup_{p \in \langle P^* \rangle} \varphi(p)$ であり, $P(V, F) = \{x \in E : p_i(x) \geq 0, p_i \in F\} = \{x \in E : p_i(x) \geq 0, i = 1 \dots, m\}$ とすると, $\bar{x} \in P(V, F)$ であり, $(P(V, F) \cap \Delta) \neq \emptyset$ となる。²⁶⁾ $P(V, F)$ は p_i が弱連続なので弱閉である。この結果は $\langle P(V)^* \rangle$ の任意の有限集合 F について成立するが, そのような F に関する $P(V, F)$ の族 $\{P(V, F)$

26) この結果に関する二階堂(1959)の本来の証明は, より一般的な $\varphi(x)$ が非循環的(acyclic)なケースにおいて, ナッシュ均衡の存在定理やミニマックス定理を包含するより一般的な結果を用いて, その結果の帰結としてこの結果を示している。しかし, ここでのように $\varphi(x)$ が凸なケースでは, 二階堂(1957b)の証明方法に従えばその証明はより簡明に示せる。

: $F \subset \langle P(V)^*, >, \#F < \infty \rangle$ を考えると, その族が Δ に対して有限交差性を満たす事になる。また, 仮定から Δ は弱コンパクトなので, 故に, $([\cap_{F \subset \langle P(V)^*, > P(V, F))} \cap \Delta] \neq \emptyset$ となる。すると, 同一の双対空間を持つ線形位相は同一の閉凸集合を持ち, $P(V)$ は凸錐で τ -閉なので弱閉である。補題 2 より $P(V) = \{x \in E : p(x) \geq 0, \forall p \in P(V)^*\} = \{x \in E : p(x) \geq 0, \forall p \in \langle P(V)^*, >\} \subset P(V, F)$ ($= \{x \in E : p(x) \geq 0, p \in F, \#F < \infty\}$) となるので, $P(V) \subset (\cap_{F \subset \langle P(V)^*, > P(V, F))}$ となる。しかし, $p \in \langle P(V)^*, >$ に対して $F = \{p\}$ とすれば $(\cap_{F \subset \langle P(V)^*, > P(V, F))} \subset (\cap_{\{p\} \subset \langle P(V)^*, > P(V, \{p\})} = \{x \in E : p(x) \geq 0, \forall p \in \langle P(V)^*, >\} = P(V)$ となるので, 結局, $P(V) = (\cap_{F \subset \langle P(V)^*, > P(V, F))}$ となる。したがって, $[(\cap_{F \subset \langle P(V)^*, > P(V, F))} \cap \Delta] \neq \emptyset$ より $[P(V) \cap \Delta] \neq \emptyset$ となる。そして, これが 0 の任意の近傍 V について成立するが, $P(V)$ の族 $\{P(V) : V \text{ は } 0 \text{ の近傍}\}$ を考えると, 近傍の性質よりこの族が Δ に対して再び有限交差性を満たす事になるので $[(\cap_{V \in N(0)} P(V)) \cap \Delta] \neq \emptyset$ となる。故に, 補題 6(ii) より $(\cap_{V \in N(0)} P(V)) = P$ なので $(P \cap \Delta) \neq \emptyset$ となり, ある $\bar{p} \in P^*$ が存在して $(\varphi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となる。これが求めていた結果である。□

この定理に関して以下で幾つか議論する。まず, P を E の τ -閉凸錐で $(-P \cap P) \neq P$ を満たすように選んでいるが, この条件が満たされないと $\bar{p} \in P^*$ が存在して $(\varphi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ という帰結が成立しない事がある。今, $E = R^3$ として, P を原点 0 を通る 1 つの線形部分空間 M とすると, P^* は M と直交する原点を通る直線 l であり, 故に, $\langle P^*, > = P^* \setminus \{0\}$ はこの直線 l から原点 0 を除いた $l \setminus \{0\}$ になる。すると, $\langle P^*, >$ は M によって二つの (原点 0 を含まない) 半直線 l_1 と l_2 に分けられる。そして, $x_1 \in l_1$ と $x_2 \in l_2$ を任意に選んで固定して, $\varphi(p) = x_1(x_2)(p \in l_1(l_2) \text{ の時})$ とすれば, φ は定理の条件 (i)-(iv) を満たす。特に, φ の (上半) 連続性は l_1 と l_2 が原点 0 で繋がっていないので, φ の値が原点 0 で x_1 と x_2 の間でジャンプ出来る事より成立する。しかし, φ の作り方から $(\varphi(\langle P^*, >) \cap M) = (\varphi(l \setminus \{0\}) \cap M) = \emptyset$ なので, 定理の帰結は成立しない。

次に, (ii) と (iii) について議論する。 $E = R^m$ の有限次元のケースでは, $(R^m)^* = R^m$ によって $P^* \subset R^m$ となるので, (ii) は φ の P^* 全体上での上半連続

性になる。そして、 $\phi : \langle P^* \rangle \rightarrow R^m$ を $\phi(p) = \varphi(p/\|p\|)$ によって定義すれば、 $B^m = \{p \in R^m : \|p\| = 1\}$ を R^m の単位球として、 φ は $B^m \cap P^*$ に制限される事になる。そして、 B^m は R^m でコンパクトなので $B^m \cap P^*$ もコンパクトになり、故に、補題 7 によって、 $\phi(\langle P^* \rangle) = \bigcup_{p \in \langle P^* \rangle} \phi(p) = \bigcup_{q \in (B^m \cap P^*)} \varphi(q) = \varphi(B^m \cap P^*)$ はコンパクトになって (iii) が成立する。 $p/\|p\|$ は $\langle P^* \rangle$ 上で連続であり、上半連続な対応の合成も上半連続なので、 ψ は $\langle P^* \rangle$ 上で上半連続であり、更に、仮定から (i) (iv) も成立するので、結局 $\phi : \langle P^* \rangle \rightarrow R^m$ は定理の条件 (i) (iv) を満たす。したがって、 $\bar{p} \in \langle P^* \rangle$ が存在して $(\phi(\bar{p}) \cap P) = (\varphi(\bar{p}/\|\bar{p}\|) \cap P) \neq \emptyset$ となり、 $\varphi : \langle P^* \rangle \rightarrow R^m$ が (i) (ii) (iv) を満たすだけ $\bar{p}/\|\bar{p}\| \in \langle P^* \rangle$ に対して $(\varphi(\bar{p}/\|\bar{p}\|) \cap P) \neq \emptyset$ となる。したがって、 $E = R^m$ の有限次元のケースでは φ に対しては条件 (iii) は仮定しなくてよい。そして、 P^* が閉で尖っていれば P^{**} は内点を持つ。²⁷⁾ そこで閉で尖っている P^* を用いて、それに対応する P^{**} を P として用いるとすると、ドブリュー (1956) によるゲール・二階堂の補題 7 の S^m から尖がっている閉凸錐 P^* への一般化が得られる。

E が無限次元の一般的な局所凸線形位相空間であり、更に、 $\text{intr}(P) \neq \emptyset$ で (ii) $\langle P^* \rangle$ には $*$ -弱位相、 E には弱位相を用いて、 $\varphi : \langle P^* \rangle \rightarrow E$ が $\langle P^* \rangle$ 上で上半連続となるケースを考える。²⁸⁾ 勿論、(ii)' $\rightarrow$ (ii) である。まず、 $u \in \text{intr}(P)$ を 1 つ固定して $C_u = \{p \in P^* : p(u) = 1\}$ とする。そして、 u が P の τ -内点なので、原点 0 のある凸平衡近傍 W が存在して $(u+W) \subset P$ となる。故に、 W の平衡性によって任意の $w \in W$ と $p \in P^*$ に対して $p(u+w) \geq 0$ 、 $p(u-w) \geq 0$ となる。もちろん、 $p(u) \geq 0$ であるが、特に、 $w \neq 0$ 、 $p \neq 0$ すると $p(w) \neq 0$ となるので $p(u) = 0$ とはならず、 $p \in \langle P^* \rangle$ に対して $p(u) > 0$ となつて、 $p/p(u) \in C_u$ となる。また、 $w \in W$ を任意に 1 つ固定すると、任意の $q \in C_u$ に対して $q(u+w) = q(u) + q(w) = 1 + q(w) \geq 0$ となるので $q(w) \geq -1$ となる。そして、 W の平衡性によって $-w \in W$ でもあるので、同様にして

27) 二階堂 (1968, 定理 3.13(ii))

28) 二階堂 (1959) では、このケースをノルム空間においてしか考察していないが、実際にはここでのように局所凸線形位相空間において考察可能である。

$q(-w) \geq -1$ となって $q(w) \leq 1$ となり, 故に, $|q(w)| \leq 1$ となる。これは C_u が W の極集合 W° に含まれる事を示している。そして, アラオグルー・ブルバキの定理より W° は $*$ -弱コンパクトであり, また, C_u は $*$ -弱閉なので, 故に, C_u も $*$ -弱コンパクトになる。²⁹⁾そこで, $\phi: \langle P^* \rangle \rightarrow E$ を $\phi(p) = \varphi(p/p(u))$ によって定義すれば, $\phi(\langle P^* \rangle) = \varphi(C_u)$ となるが, C_u が $*$ -弱コンパクトで φ が C_u 上でも $*$ -弱位相で上半連続なので, 補題7によって $\varphi(C_u)$ は弱コンパクトになる。 $p/p(u)$ は $\langle P^* \rangle$ 上で $*$ -弱位相で連続なので ψ は $\langle P^* \rangle$ 上で $*$ -弱位相で上半連続であり, 更に, 仮定より $(i) \wedge (iv)$ も成立するので, 結局, $\phi: \langle P^* \rangle \rightarrow E$ は定理の条件 $(i) \wedge (iv)$ を満たす。したがって, ある $\bar{p} \in \langle P^* \rangle$ が存在して $(\phi(\bar{p}) \cap P) = (\varphi(\bar{p}/\bar{p}(u)) \cap P) \neq \emptyset$ となり, $\varphi: \langle P^* \rangle \rightarrow E$ が (i) , $(ii)' \wedge (iv)$ を満たすだけで, $\bar{p}/\bar{p}(u) \in \langle P^* \rangle$ に対して $(\varphi(\bar{p}/\bar{p}(u)) \cap P) \neq \emptyset$ となる。したがって, この場合にも φ に対して条件 (iii) を仮定しなくてよい。

そして, E が局所凸線形位相空間で $\text{intr}(P) \neq \emptyset$ のケースで $\varphi: C_u \rightarrow E$ が (i) , $(ii)' \wedge (iv)$ を満たす時に, ある $\bar{p}/\bar{p}(u) \in C_u$ に対して $(\varphi(\bar{p}/\bar{p}(u)) \cap P) \neq \emptyset$ を示したのがフロレンザーノ(1983)である。³⁰⁾ただし, フロレンザーノ(1983)の結果は $\text{intr}(P) \neq \emptyset$ の時に成立するのであるが, 本節の定理は $\text{intr}(P) \neq \emptyset$ が成立しなくても $(P \cap (-P)) \neq P$ であれば成立するので, より一般的な結果である。

そして, 二階堂(1957b)において二階堂(1956b $\wedge$ 筆者未見)に触れている点から察すると, 後者は E が無限次元ノルム空間 $\text{intr}(P) \neq \emptyset$, そして $(ii)'$: $\langle P^* \rangle$ には $*$ -弱位相, E には弱位相を用いて $\varphi: \langle P^* \rangle \rightarrow E$ が $\langle P^* \rangle$ 上で

29) アラオグルー・ブルバキの定理によると, U を E の原点の近傍とすると, $U^\circ = \{p \in E^* : |p \cdot x| \leq 1 \mid (U \text{ の極})\}$ が $*$ -弱位相 $(\sigma(E^*, E))$ でコンパクトになる。

30) フロレンザーノ(1983, 系1, p. 213-4)で, その元の結果であるフロレンザーノ(1983, 補題1, p. 212)の証明はここでの証明とほぼ同一で, 有限次元のゲール・二階堂の補題による近似を用いている。ただし, フロレンザーノの無限次元のゲール・二階堂の補題における位相の取り方は, l^∞ のようなバナッハ先双対空間を財空間とするケースへ応用する事を前提にしているために, やや工夫がされていて, 二階堂(1956b, 57b, 59)とは微妙に異なっている。そして, 無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題は, ヤネリス(1985)やメータ・タラフダー(1987)によって更に一般化されている。また, アリプランティス・ブラウン(1983)は, 線形位相束を財空間とする経済の超過需要関数を考えて, そのモデルにおける市場均衡の存在問題を扱っている。そして, これらの結果は浦井(2000)によって更に一般化されている。

上半連続，という条件の下でのゲール・二階堂の補題を示しているように思われる。³¹⁾そして，その証明はここでのような有限次元のゲール・二階堂の補題の利用した近似であったのではないと思われる。ただし， $\varphi : \langle P^* \rangle \rightarrow E$ に対する本節での定理の証明では，この二階堂(1956b)やフロレンザー ノ(1983)の証明とは違って，価格集合 C_u の $*$ -弱コンパクト性は一切利用せず，代わりに $\Delta = \bigcup_{p \in \langle p(V)^* \rangle} \varphi(p)$ の $*$ -弱コンパクト性という(iii)を利用してゐる。

V 終わりに

以上で，二階堂(1957b , p .4 , 注 2)において，そこで用いたノルム空間のケースの結果が用意に一般的線形位相空間にまでも拡張できると述べている事に基づいて，二階堂(1959)で示された局所凸線形位相空間のケースへのゲール・二階堂の補題の一般化の証明を，凸値の特殊なケースで簡潔に行った事になる。二階堂(1959)は日本の数学雑誌に掲載された事と対応の非循環値性(Acyclic-valued)を利用した証明が複雑であった事によって，その後の無限次元財空間における競争均衡の存在問題において全く触れられなかった。少なくとも，本稿のように，対応の凸値性を利用して，二階堂(1957b)のノルム空間で行ったのと同様な有限次元のゲール・二階堂の補題による近似という簡明な証明を用いた結果が独立した論文として作成されて専門雑誌に掲載されていれば，ビューレー(1972)以降に一般均衡理論の 1 つの大きな話題となった無限次元財空間における競争均衡の存在問題に対して，著しい貢献をしていたと考えられる。その結果として，無限次元財空間における競争均衡の存在問題の先駆的な研究として，ドブリュー(1954)と共に，言及される事となったと思われる。³²⁾

ただし，二階堂(1956b 57b 59)では，それらで扱った超過供給対応を持つ

31) 二階堂(1957b , p .4 , Remark 2 , p .11-2)においてである。

32) ビューレー(1972)が用いた有限次元空間の競争均衡の存在定理に基づく有限次元空間の競争均衡列による近似という証明と同じように，有限次元空間のゲール・二階堂の補題に基づく有限次元空間の競争均衡から成る(有向)点列による近似という手法を用いているので，この二階堂(1956b 57b)の証明は，ビューレー(1972)の証明の先駆けと考える事もできる。また，角谷の不動点定理をユークリッド空間から局所凸線形位相空間へ一般化したファン・グリックスバーグの不動点定理の証明では，有限次元部分空間族による元空間

ような無限次元財空間モデルの例を1つも与えていないので、ドブリュー(1954)のように、例として l^∞ をその財空間とする無限期間純粋交換経済モデルを考えて、この経済がどのような条件を満たす時に、その超過供給（需要）対応が二階堂(1956b, 57b, 59)で仮定した条件を満たすのかといった議論も入れておいてよかったと考えられる。実際、ゲール(1955)、二階堂(1956a)、そしてドブリュー(1959)は、与えられた経済モデルから導出された超過供給対応が、ゲール・二階堂の補題の条件を満たすので、その結果として競争均衡が存在するという議論の流れになっていて、ゲール・二階堂の補題それ自身を分析の対象としている訳ではないのである。³³⁾

もちろん、経済モデルの例に触れてはいないとはいえ、有限次元のユークリッド空間における競争均衡の存在が示された直後に無限次元空間において超過供給対応を想定し、それに対してゲール・二階堂の補題を定式化してその証明を行ったという点で、二階堂(1956b, 57b, 59)の貢献や意義は何ら損なわれないのである。

32) の近似を考えてその有限次元部分空間には角谷の不動点定理を用いて不動点の(有向)点列を構成し、この列の極限が元空間の不動点であるという事を示している。するとこれらの議論には、有限次元部分空間には角谷の不動点定理を用いて不動点の列を構成するか、有限次元部分空間にアロー・ドブリュー・マッケンジーの競争均衡の存在定理を用いて競争均衡の列を構成するか、または、有限次元部分空間にはゲール・二階堂の補題を用いて競争均衡の列を構成するか、といった共通点がある。そして、不動点定理に関して言えば、ファン・グリュクスバーグの無限次元の不動点定理よりもブラウワーや角谷の有限次元の不動点定理の方が本質的であるという解釈も可能であり、二階堂先生も後年このような意見を持っておられたという事である。

33) l^∞ を財空間とする経済モデルから得られた超過供給対応が前節の定理の仮定を満たさない場合には、フロレンザーノ(1983)の議論が参考になる。それに基づけば、二階堂(1956b, 57b, 59)における無限次元のゲール・二階堂の補題で用いる線形位相を、補題1から補題6までが依然として成立するように上手く選択すれば、無限次元のゲール・二階堂の補題が本稿のように証明できるので、その結果を l^∞ が財空間となっているケースの超過供給対応に対して適用すればいい。もちろん、この時の線形位相の選択において、前節の定理の証明において利用した合成写像 $\phi(=\alpha \circ \varphi \circ \beta): S^m \rightarrow R^m$ に対して、有限次元のゲール・二階堂の補題の条件の成立を保証するように上手く行う必要がある。

参考文献

- Aliprantis, C.D., and D.J. Brown(1983) “Equilibria in markets with a Riesz space of commodities.”
Journal of Mathematical Economics 11 , p .189–207 .
- _____, and O. Burkinshaw(1987) *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*(Springer-Verlag, New York)
- Arrow, K, J and G, Debreu(1954) “Existence of an equilibrium for a competitive economy.” *Econometrica* 22 , p 265–290 .
- Bewley, T(1972) “Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities.” *Journal of Economic Theory* 4 , p 514–540 .
- Bojan, P(1974) “A generalization of theorem on the existence of competitive economic equilibrium in the case of infinitely many commodities.” *Mathematica Balkanica* 4 , p 491–4 .
- Debreu, G(1954) “Valuation equilibrium and Pareto optimum.” *Proceedings of National Academy of Science* 40 , p 588–94 .
- _____(1956) “Market Equilibrium.” *Proceedings of National Academy of Science* 42 , p 876–8 .
- _____(1959) *Theory of Value*.(Wiley, New York) 邦訳：『価値の理論』丸山徹訳，東洋経済新報社，1977)
- Florenzano, M(1983) “On the existence of equilibria in economies with an infinite dimensional commodity space.” *Journal of Mathematical Economics* 12 , p 207–19 .
- Gale, D(1955) “The law of supply and demand.” *Mathematica Scandinavica* 3 , p .155–69 .
- McKenzie, L. W(1954) “On equilibrium in Graham’s model of world trade and other competitive systems.” *Econometrica* 22 , p .147–161 .
- Mehta, G. and E. Tarafdar(1987) “Infinite-dimensional Gale-Nikaido-Debreu theorem and a fixed point theorem of Tarafdar.” *Journal of Mathematical Economics* 41 , p 333–9 .
- Nikaido, H(1956a) “On the classical multilateral exchange problem.” *Metroeconomica* 3 , p .135–45 .
- _____(1956b) “On the existence of competitive equilibrium for infinitely many commodities.”
Tech. Report, No 34 ,Dept. of Econ., Stanford University.
- _____(1957a) “A Supplementary note to ‘On the classical multilateral exchange problem.’”
Metroeconomica 9 , p 209–10 .
- _____(1957b) “Existence of equilibrium based on Walras’ law.” ISER Discussion Paper No.2 ,
Institute of Social and Economic Reserch, Osaka University, Japan.
- _____(1959) “Coincidence and some systems of inequalities.” *Journal of Mathematical Society*

of Japan 11(4) , p 354–73 .

_____. (1968) *Convex Structure and Economic Theory*. (Academic Press, New York)

_____. (1987) “Fixed point theorems.” in *The New Parglave: A Dictionary of Economics* Vol. 2. ed. by J. Eatwell and et. al(Macmillan, New York)

Peleg, B. and M. E. Yaari(1970) “Markets with countably many commodities.” *International Economic Review* 11 , p 369–377 .

Urai, K(2000) “Fixed point theorems and the existence of economic equilibria based on conditions for local directions of mappings.” *Advances in Mathemetical Economics* 2 , p 87–118 .

Yannelis, N(1985) “On a market equilibrium theorem with an infinite number of commodities.” *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 108 , p 595–9 .

On Gale-Nikaido-Debreu's Lemma in an Infinite Dimensional Commodity Space by Nikaido(1956 ,57 ,59)

Kubota, Hajime

Debreu(1959 , Ch. 5) uses the famous Gale-Nikaido-Debreu's lemma for proving the existence of a competitive equilibrium in economies with n -dimensional Euclidean space R^n as the commodity space. Nikaido(1956 ,57 ,59) extend this Gale-Nikaido-Debreu's lemma in R^n to the one in some infinite dimensional spaces such as normed spaces and locally convex topological vector spaces. This is surprising since Gale-Nikaido-Debreu's lemma is generalized to the infinite dimensional spaces just after Gale-Nikaido-Debreu's lemma in R^n is established. Since the literature on the existence of competitive equilibrium in economies with an infinite number of commodities starts after Peleg-Yarri(1970) and Bewley(1972), Nikaido(1956, 57, 59) precedes at least one decade as Debreu(1954) does. The purpose of this paper, then, to reconsider Nikaido(1956, 57, 59)'s generalization of Gale-Nikaido-Debreu's lemma to some infinite dimensional spaces and proves the one established in the case of locally convex spaces of Nikaido(1959) with using the method of proof employed in Nikaido(1957) when the excess supply correspondence is convex-valued.