論文

公債蓄積と新古典派的経済成長、財政支出による安定化制御

鈴木康夫
Yasuo Suzuki
滋賀大学 経済学部 / 教授

I 序

アメリカにおいてサブプライム・ローン等の破綻で生じたバブル崩壊と金融危機に対応するために、近年、欧米諸国を始めとして多くの国々で景気対策が行われて来た。その結果、それらの国々では、他の理由もあるが、累積的な財政赤字が発生し、少なからず問題となっている。日本においても、長年にわたり膨れ上がったために、近年にあっては一層そうであるが、財政の累積赤字が問題にされてきた。こうした累積的な財政赤字と政府の政策の関係については、これまで多くの、あるいは、膨大な数の研究が展開されてきた。本稿でも、この問題を取り上げるが、高度な理論および応用研究が多い中、旧式のモデル（武野・山崎「[1977]、佐　藤[1979]、Stiglitz and Uzawa [1969]、Burmeister and Dobell [1970]、Romer [1998, chap.2]、Jones[1975]、Jones [1998, chap.2] 等）を用いた素朴な問題意識で、部分的によく類似するが、しかし幾分異なる視点からの基礎的な研究を試みる（Barro and Sala-I-Martin [1995] 等の内生的成長の枠組みは用いず、秋山[1999] 等のデータによる分析も行われない）。

本稿の研究では、公債蓄積を伴う新古典派的な経済成長下にある経済を想定するとき、こうした完全雇用の（モデル）経済において、財政支出を政策的に操作することにより経済と財政収支や赤字残高の状態を安定化させ、かつ、長期的に維持可能となるような持続的制御または持続可能制御の理論的な可能性が存在するか否かという考察が、貨幣や他の資産等の問題（齊藤[2006]（第2章））を伴わない単純な旧式のモデルで試行される。また、そのために、財政支出の政策的操作にとってどのような明確な条件が十分であるかも分析され、この十分条件の特徴や性質も考察され

る。この種の初期の研究では、ハロッド-ドーマー的なケインジアン・モデル(Domar[1946, 1957]、鈴木[2001a]「第4章」pp.79-93等)を用いるにせよ、あるいは新古典派的なモデル(Carlberg[1988], chap.4, pp.56-78等)を用いるにせよ、動学的なモデルにおける長期均衡点への安定性分析として展開されるのが常である。

1980年代以後の研究では、特定の評価関数として何らかの経済政策目標関数を設定して、これを動学的に最適化するように財政政策を操作するというモデルから、財政支出等の最適制御を導出する考察等が行われたりするというように最適成長理論(Ramsey[1929]-Cass[1965]-Koopmans[1965]、大住[1985])や最適制御理論を用いたものがほとんどとなっている。しかしながら、こうした研究は、極めて抽象化された評価関数(例えば、労働力1単位当りの社会的効用関数等)を社会厚生関数として用いるか、あるいは、かなり特定化された経済政策目標関数を設定してこれから最適制御を導出している。それゆえ、そうして得られる最適制御が、抽象的で政策的な特徴や性質がはっきりしないものであったり、あるいは、その性質がある程度はっきりしていても特定化された経済政策目標関数に依存しているものであったりするわけである。こうした研究方法は確かに有効なものではあるが、分析で結果的に引き出されたものが抽象的過ぎたり、または特定化され過ぎたりしているため、どこか不十分な部分がそれらの考察の中に残留することになり、分析の及ばない側面や不可避的な限界がそれらの研究の中では放置されることとなる。

本稿での研究においては、経済状態の動学的な評価関数が採用されない、つまり社会厚生関数や経済政策目標関数等が使用されないので、本稿での試みないし以下の内容は、経済分析でよく見られるタイプの応用最適制御理論による研究や考察ではない。本稿の研究における考察は、(特殊な最適制御論とも言えるが、しかし古典的)自動制御論的な趣のそれであり、動学的モデル経済の持続的な長期均衡を達成するためには、すなわちその動学的モデル体系が弱い制御で安定化するか、または、強い制御で長期均衡到達軌道上だけを進むように経済を運行させるために、どのように財政支出が政策的に自動制御できるか、あるいは政策的に運営されればよいかということ、また、この動学的安定化を可能にする財政政策の自動制御的な定性的性質等を明らかにすることである。

こうした考察から、以下の分析のほとんどで、資本の限界生産性よりも財政支出の資本に対する限界的変化分が絶対値で大きいことが安定化条件として重要かつ有効であることが確認されている。持続性のための弱い制御については動学的に安定な長期均衡の可能性の存在は確認されるが、公債蓄積が進むと財政支出の削減が必要であり、税率の財政政策や金融政策を援用しても、財政支出の操作についてあまり明確な動学的安定(化)条件は導出できない。一方、持続性のための強い制御についても動学的に安定な長期均衡の可能性の存在が確認され、財政支出の操作について、定性的にではあるが、比較的に明確な動学的安定(化)条件が導出される。その際、安定化条件の成立は、税率の財政政策や金融政策を援用するものの、公債蓄積が経済成長や財政支出増加等と共に進行する場合でも可能であり、したがって経済成長の安定化のために公債や財政支出を急激に削減しなくてもその経済成長安定化の可能性があるということがわかる。

本稿の考察から得られる大まかな示唆は、完全雇用が確保されている場合には、財政赤字が続き

公債蓄積が進んでいる経済であっても、経済成長の長期的安定化のためには、急激な緊縮財政と公債償還は必ずしも必要ではなく、その安定化達成のために適切な金融政策と適度な財政運営が存在するということである。とはいえ、以下の考察は、論文全体の紙幅の制限のために、極めて単純な場合のモデル分析にとどまったので、別の機会に一層の展開が望まれる。

Ⅱ　新古典派的な経済成長モデルと制御された公債ストックの蓄積

以下で考察するマクロ経済モデルとして、典型的な新古典派経済成長モデル、すなわち、ソロー-スワン型経済成長モデル（Solow [1956]-Swan [1956]、Solow[2000, chap.8, 9]）を若干拡張したモデルが、以下の分析で用いられるが、この基本的なモデル構造は、先行論文（鈴木 [2003a, pp.205-210] ないし鈴木[2003b, Ⅲ, pp.56-61] および、同[2003c, Ⅲ, pp.149-155]）に依存している。

以下の分析で用いられる主なマクロ経済変数について記せば、労働力Nと、資本ストック量Kの比を$k \equiv K/N$と表し、実質（国内）総生産を与える集計的新古典派生産関数をF、及び、労働力1単位あたりのその水準は、全ての労働力が雇用されるときは、$f(\equiv F/N) = F(K/N, 1)$と表記されるが、自然失業率$u_N$で完全雇用を定義し、かつ、これをモデルの前提として想定すれば、完全雇用率は$1-u_N$（ただし$0<1-u_N<1$）となるから、当該の新古典派（集計的）生産関数は、$f \equiv F(K/N, 1-u_N) = f(k, 1-u_N)$となる（下で記すが、通常のように限界生産力逓減が仮定される）。つまり、全労働力（存在量）は完全雇用量と自然失業量の和に等しく定義されている。

以下の諸分析は、資本減耗などを伴う標準的なソロー-スワン型（経済）成長モデル（Solow [1956]-Swan[1956]）を拡張して、自然失業率や社会保障給付だけでなく、gで表示される「労働力1単位当たり政府支出」を導入する。ただし単純化のために、この政府支出はマクロ経済学的な変数であるが、もっぱら政府の消費かあるいは生活関連社会資本のみに充てられるものと仮定されている。それゆえ、政府支出は生産関連社会資本の投資を含まず、当該のモデル経済には生産関連社会資本が、何らかの理由で一定の水準で定常的に持続されているか、あるいは全く存在していないことになる。また、政府がその水準を経済状態と関係付けて直接的に操作するものと想定されている。したがって、当該の新古典派経済成長の動学方程式は次のようになる（なお以下では$dk/dt \equiv \dot{k}$とも表現し、他の変数についての時間微分も同様に表示する）。

$$(2.1)\quad dk/dt = s\{(1-\tau) f(k, 1-u_N) - \beta_1 u_N\} - g - (v_N + \delta) k,$$

where$(s, \tau, \beta_1, u_N, v_N, \delta)$: const.$>0$, and also,
$\partial f/\partial(\cdot) > 0$,
$\partial^2 f/\partial(\cdot)^2 < 0$,
the initial condition $k_0 =$ const. > 0.

ここで、sは（平均）貯蓄率であり、τは比例税の平均税率である。$v_N>0$は、自然成長率を表し、一方、$\delta>0$は単純な資本減耗率を表している。また、$\beta_1>0$は、労働力1単位あたりの失業保険の給付（率）水準であるが、政府財政と別建てで機能している社会保険基金が存在するものと想定されているので、社会保険基金によってβ_1が徴収かつ給

付されているものと想定されている。それゆえ、こうした社会保険給付は、当該のモデルでは、政府の財政とは別に扱われることになると考えられるので、β_1は政府の財政支出には全く含まれていない。また、k_0は、初期条件であり、kの$t=0$時点での初期水準を表す。

他方、政府の予算制約式は、「労働力1単位当たり公債ストック」をbとして、公債利子率を$r_1>0$と表せば、政府支出gと公債費$r_1 b$が政府財政の支出面であり、他方、政府財政の収入面が税収τfと新規公債発行db/dtで支えられている。「労働力1単位当たり財政赤字」はdb/dtとなるから、労働力1単位当たりの公債ストック成長率$(db/dt)/b$が、公債ストックの成長率から労働力成長率を差し引いたものにちょうど等しいことに注意すると、次のように単純かつ動学的な定式化がbについて可能となる($db/dt\equiv\dot{b}$)。

(2.2) $db/dt=g+r_1 b-\tau f(k,\ 1-u_N)-\nu_N b,$
where $(\tau,\ u_N,\ \nu_N)$:
const.>0, and also,
$\partial f/\partial(\cdot)>0$,
$\partial^2 f/\partial(\cdot)^2<0$, the initial
conditionb_0 =const.>0.

ただし、その右辺第2項の公債利子率r_1については、内生変数の変化に対してあまり変化しない場合も考えられ得るが、債券市場について考慮すれば、むしろ、内生変数に依存する関数の形で決まるものと考えることの方が相応しいかもしれない。それゆえ、これらは、gなどの変数の想定についての差異の可能性にも触れながら、以下で場合分けして分析される。また、b_0は、初期条件であり、bの$t=0$時点での初期水準を表す。

政府の(労働力1単位当り)財政支出率gは、政府がこの水準を決定して支出するわけだから、政府が完全に操作可能な変数と考えられる。それゆえ、このgは、政府にとって動学的に適切ないし最適に制御可能な変数と考えられるから、鈴木[2003b, Ⅲ, pp.56-61]および、同[2003c, Ⅲ, pp.149-155]のような最適経済成長の分析手法を用いてgの最適経路に関する基礎的な分析を展開することもできる。しかしながらそうした分析はしばしば抽象度が高く有用な解釈が困難であることも珍しくない。そこで、ここでの考察では、平均貯蓄率sをパラメータと仮定するなどの単純化の諸想定も加えて、そうした最適経路の基礎研究は行わず他の機会に委ねることとして、むしろその基本的な設定での適切または最適な経路の存在条件にとって重要な性質を経済成長の長期的持続性達成のための、すなわち長期均衡達成のための動学的安定(化)条件の中で模索しさらには見出すことで、そうした重要な諸性質を特定するという動学的安定化政策の分析が展開される。

換言すれば、動学的安定化に適切な経路や最適経路の存在を前提するとき、(前提から動学的に適切または最適となっている)gが、政府が操作する動学的安定化制御または持続安定化制御、あるいは動学的持続可能制御として、動学的安定性の面からするとどんな性質を持っていなければならないかを明らかにすることが、以下の考察の主な内容となっている。これらの内容を扱う分析は(2.1)と(2.2)の連立体系に基づき次節以降で展開される。

Ⅲ 公債蓄積を伴う新古典派的な経済成長と財政支出政策の安定化制御可能性

まず、モデル経済の動学的安定化制御体系または持続的安定化制御体系、あるいは動学的持続可能制御体系(2.1)と(2.2)において、gは前節での前提からすでに政府によって完全に操作され、最適な場合も含み適切にまたは安定化制御されていると考えられているから、最適制御の場合の少なくとも基本的な問題設定である無限計画期間問題の場合には、最適制御の必要条件である横断性条件から、最適候補経路は初期条件から長期均衡点へと向かい、かつ、計画期間内にその均衡点へ到達する経路でなければならない。したがって、連立方程式の形のその動学的安定化制御体系における長期均衡点は、動学的に(漸近)安定となっているか、または、鞍点となっているかのいずれかでなければならない。

しかも、最適経済成長の最適経路がしばしばそうであるように(ここでの考察でも予想できるが)、当該の安定化制御が期首ストックからフローへのフィードバック制御であると考えれば、仮定からgが安定化制御であるから、dg/dtは少なくともgとkとbの関数で導かれることになる。さらにここでは、このフィードバック関係を単純化して、gが、kとbだけの連続的に2階微分可能な陽表的な関数で導かれるようにできるものと仮定する。

(3.1)　$g = g(k,b)$, $g \in C^2-$class

換言すれば、このような関数が存在するという前提は、dg/dtの方程式が解けてgがkとbの陽表的な関数で導かれるものと仮定することか、あるいは、この方程式が適当な方法で近似でき結果的にgがkとbの陽表的な関数で得られるものと仮定することと同じである。むしろ、このことは比較的にそれほど困難ではなく、少なくとも近似の度合いを調整すれば可能と考えられる。それゆえ、以下の分析では、gが安定化制御で、かつフィードバック制御であり、同時にkとbの陽表的な関数で少なくとも近似的に表現できるものと仮定される。

このようなg関数の仮定、つまり(3.1)を用いれば、当該の動学的安定化制御体系または動学的持続安定化制御体系、あるいは動学的安定化成長体系(2.1)と(2.2)の安定性に関する分析が可能となり、いくつかの重要な性質が導かれる。このために、当該の動学的安定化成長体系(2.1)と(2.2)のヤコビ行列$J_{3.2}$を求めれば、その各要素は次のようになる。

(3.2.1)　$\partial\dot{k}/\partial k = s(1-\tau)\,\partial f/\partial k - \partial g/\partial k - (v_N + \delta)$
<0 or ?

(3.2.2)　$\partial\dot{k}/\partial b = -\partial g/\partial b$: ?
(or>0 when $\partial g/\partial b<0$)

(3.2.3)　$\partial\dot{b}/\partial k = \partial g/\partial k - \tau\,\partial f/\partial k$: ?

(3.2.4)　$\partial\dot{b}/\partial b = \partial g/\partial b + r_1 - v_N$: ?
(or<0 when $\partial g/\partial b<0$ and r_1 is sufficiently small.)

したがって、明らかなように、諸パラメータの仮定と共に、このヤコビ行列要素でその符合が確定しているものは一つも無い。まず、それらの(3.2.1)と(3.2.2)では、新古典派経済成長モデルの性質に注目すると、右辺のs $(1-\tau)$は共に1より小さい値のパラメータ同士の積であり、kが比較的に大きめであれば限界生産力が逓減して十分に低くなるのに対して$\partial g/\partial k$が正値である可能性が高く、か

つこの絶対値はそれほど低くならないと考えられるので、1行1列目要素の(3.2.1) <0も比較的に高い可能性がある(均衡成長を達成する長期均衡点が存在すればその近傍では特にこの可能性が高く十分に可能である) のがわかる。また、その1行2列目要素の(3.2.2) の符合は$\partial g/\partial b$の符合と同じなのでこの符合次第である。他方、それらの第2行目では、2行1列目要素(3.2.3) の符合は、$\partial g/\partial k$が正値である可能性が高いので多分に不明であるが、多くの国々でよく起こるのではないかと推測されるが(資本の増加に伴い) 財政赤字を出し易い傾向が強い国では正値になる可能性が高い。2行2列目要素の(3.2.4) も、公債利子率$r1$や労働力成長率v_Nは通常小さい値なので、おおよそではあるが$\partial g/\partial b$の符合次第であろう。

これらの可能性を踏まえて考えると、当該のヤコビ行列$J_{3.2}$のトレース (：tr) はその対角要素の和であるから(:$\partial\dot{k}/\partial k+\partial\dot{b}/\partial b$)、(3.2.1) +(3.2.4) で求められるから、このトレース (tr) は、次のようになる。

(3.3) $$\mathrm{tr}(J_{3.2}) = s(1-\tau)\partial f/\partial k-\partial g/\partial k -(v_N+\delta)+\partial g/\partial b +r_1-v_N : ?$$

このトレースの符合は、(3.2.1) と (3.2.4) の符合についての上記の可能性をまとめると、少なくとも均衡成長をもたらす長期均衡点を含むある程度の内生変数の領域で(3.2.1) <0と考えることが可能であり、かつ (3.2.4) の符合も、v_Nやr_1の絶対値が一般に小さいのに対して$\partial g/\partial k$と$\partial g/\partial b$の絶対値がある程度の大きさ以上の値ならば、負値となる可能性が高い。したがって、均衡成長が可能で、同時に$\partial g/\partial k$と$\partial g/\partial b<0$の各絶対値がある程度以上の値(例えば、kの適当な水準に対しては大よそではあるが、先進国の場合ならばそれぞれ10%を超える数値か、あるいは途上国の場合では20%を超える数値) であれば、当該のトレースの符合は負値となる ($\mathrm{tr}(J_{3.2})<0$)。形式的ではあるが、少なくとも、$s(1-\tau)\partial f/\partial k+r_1-v_N<\partial g/\partial k+(v_N+\delta)+\partial g/\partial b$であれば、このトレースの符合は負となる。

ヤコビ行列$J_{3.2}$の行列式$|J_{3.2}|$(の値) は、(3.2.1) ×(3.2.4) −(3.2.2) ×(3.2.3)、つまり、$\partial\dot{k}/\partial k\cdot\partial\dot{b}/\partial b-\partial\dot{k}/\partial b\cdot\partial\dot{b}/\partial k$、であるから、次のようになる。

(3.4) $$\begin{aligned}|J_{3.2}| = {} & s(1-\tau)(r_1-v_N)\partial f/\partial k-(r_1-v_N)\partial g/\partial k \\ & -(r_1-v_N)(v_N+\delta) \\ & +s(1-\tau)\partial f/\partial k\cdot\partial g/\partial b \\ & -(v_N+\delta)\partial g/\partial b \\ & -\tau\partial f/\partial k\cdot\partial g/\partial b : ?\end{aligned}$$

このままでは、この行列式 (3.4) の符合は確定しない。もしも、この符合が正値であれば、トレースが負として、当該の動学的安定化成長体系(2.1) と(2.2) が動学的に安定となる可能性があることが分かる。このことはgが最適に決定されているためには必要である。そこで、この行列式の値の符合についてもう少し詳しく検討する必要がある。

(3.4´) $$\begin{aligned}|J_{3.2}| = {} & \{(s-s\tau-\tau)\partial g/\partial b \\ & +s(1-\tau)(r_1-v_N)\}\partial f/\partial k \\ & -(r_1-v_N)\{(v_N+\delta) \\ & +\partial g/\partial k\}-(v_N+\delta)\partial g/\partial b \\ & : ?\end{aligned}$$

この表現 (3.4´) では、$\partial g/\partial k>0$および$\partial g/\partial b<0$としても、$(s-s\tau-\tau)\partial g/\partial b>-s(1-\tau)(r_1-$

v_N)、かつ、$-(r_1-v_N)\{(v_N+\delta)+\partial g/\partial k\}>(v_N+\delta)\partial g/\partial b$ならば、$|J_{3.2}|>0$となる。この後者の条件は$(r_1-v_N)<0$ならば即座に成り立つが、反対に、$(r_1-v_N)>0$ならば、$0>(r_1-v_N)\{-(v_N+\delta)-\partial g/\partial k\}$となり、$|-(r_1-v_N)\{(v_N+\delta)+\partial g/\partial k\}|<|(v_N+\delta)\partial g/\partial b|$でなければならない。このことは、どのパラメータの絶対値も1より小さいことから、$|J_{3.2}|>0$のためには、特にその後者では、比較的に十分な程度に$|\partial g/\partial k|<|\partial g/\partial b|$でなければならないことを意味している。その前者では、$|\partial g/\partial b|$が大きいならば、$s-s\tau-\tau<0$でないと、後者の条件が充たされるとしても$|J_{3.2}|>0$が難しくなる。

換言すれば、大まかではあるが、r_1が比較的に高く$r_1>v_N$ならば、$|\partial g/\partial k|$と$|\partial g/\partial b|$が共に十分に大きいとしても、この場合に、比較的に適度に$|\partial g/\partial k|<|\partial g/\partial b|$であり、かつ$s-s\tau-\tau<0$であれば、$tr(J_{3.2})<0$かつ$|J_{3.2}|>0$となり（対角要素の積がゼロでないかあるいは非対角要素の積がゼロでなく）、微分方程式の漸近安定性についてのオレッチの定理（和田［1989］、pp.44-50）が適用できるから、安定化制御下の当該の動学的安定化成長体系（2.1）と（2.2）が動学的に安定となるようにできる。かくして、次のように、存在問題を含まない形で、当該の安定化財政制御ないし安定化成長に関する特徴化命題が主張できる。

命題1：安定化制御を伴う動学的安定化制御（成長）体系（2.1）と（2.2）及び（3.1）が存在するとき、$\partial g/\partial k>0$および、$\partial g/\partial b<0$であり、かつ$|\partial g/\partial k|$と$|\partial g/\partial b|$を共に十分に大きく、しかし、比較的に適度に$|\partial g/\partial k|<|\partial g/\partial b|$となるように財政支出gを政府が的確かつ適切に動学的に制御できるとき、同時に課税についての財政政策で、$s-s\tau-\tau<0$（つまり$s/(s+1)<\tau$）とできるならば、($tr(J_{3.2})<0$かつ$|J_{3.2}|>0$等の条件を充たすようにできるから）当該体系が動学的に安定となるようにできる。■

つまり、この命題は、当該のgが安定化制御であることと、ここで提示された動学的安定化条件とが整合し得ることを主張している。換言すれば、（2.1）と（2.2）及び（3.1）などで定式化できる新古典派的な安定化成長問題で、政府支出の安定化制御が存在するときには、この安定化制御が、ここで提示された$s/(s+1)<\tau$などと共に$\partial g/\partial k>0$および、$\partial g/\partial b<0$ の性質を持つようにすることができる。あるいは、こうした条件の中で、実際に可能と思われる$\partial g/\partial k>0$および、$\partial g/\partial b<0$ のときでも、これらの程度や税率（例えば$s=0.4$ならば$s/(s+1)=0.28571\cdots\fallingdotseq0.286<\tau=30\%$未満でもよい）を調整すれば、政府支出の安定化制御ないし安定化成長が可能であるということがわかる。

このように、命題1によれば、経済成長に伴い資本蓄積が進み、労働力1単位当たりで資本が増加するとき、労働力1単位当たりで政府支出を増やす傾向があっても、労働力1単位当たりで政府公債ストックの増加に対して労働力1単位当りでの政府支出が削減される傾向が確保されるときには、適度な税率が可能ならば、安定化成長の可能性が政府の財政運営次第で十分にあるということがわかる。

とはいえ、政府にとって$|\partial g/\partial k|$が大きいのはよいが、$|\partial g/\partial b|$も十分に大きくするのは財政運営上難しい。しかも、比較的に適度に$|\partial g/\partial k|<|\partial g/\partial b|$となるように財政支出$g$を政府が的確に動学的に操作するということは、政府がgをbに対して敏感に削減できるような財政運営が可能な場合であるが、これは公債ストックが低水準の国や財政赤字が低水準の政府、基礎的な財政状態が比較的に

健全な政府でなければ困難であり、赤字傾向がよく見られる政府にとっては大変難しいことである。それゆえ、実際の財政運営からすれば、これらの条件はあまり現実的ではないように見える。なお、この節の最後に、現実的な解釈がし易い明確な条件、すなわち金融政策条件$r_I \leqq v_N$を導入して命題をやや書き換える。これによって、命題1から、比較的に適度に$|\partial g/\partial k|<|\partial g/\partial b|$となるという条件が除去されるが、このささいな具体化にもかかわらず、書き換えられる命題はむしろ特殊な場合の結果となる。

命題2（命題1の系）：安定化制御を伴う動学的安定化制御（成長）体系（2.1）と（2.2）及び（3.1）が存在するとき、$\partial g/\partial k>0$および、$\partial g/\partial b<0$であり、かつ$|\partial g/\partial k|$と$|\partial g/\partial b|$を共に十分に大きくなるように、財政支出gを政府が的確かつ適切に動学的に制御できるとき、同時に、課税についての財政政策で、$s-s\tau-\tau<0$（つまり$s/(s+1)<\tau$）とでき、しかも金融政策で$r_I \leqq v_N$とできるならば、（$\mathrm{tr}(J_{3.2})<0$かつ$|J_{3.2}|>0$等の条件を充たすようにできるから）当該の体系が動学的に安定となるようにできる。■（なお、$r_I<v_N$のときは$\partial g/\partial b \leqq 0$でもこの命題2は成立する。）

この命題2の条件を満たす金利は、ゼロ金利に近く、先進国の場合には低すぎる水準であるから、実際には大不況のような極めて特殊な場合にしか達成できない。命題2は、現実の経済にあっては、政府が覚悟を決めて中央銀行の協力を取り付け、かつ密接に調整するのでなければ実現しないであろう。この命題2にもう少し強い仮定を持ち込むと、経済的な解釈上でもそうだが、もっと明確で分かり易い主張が可能となる。

命題3（命題1の系）：安定化制御を伴う動学的安定化（成長）体系（2.1）と（2.2）及び（3.1）が存在するとき、$\partial g/\partial k>0$および、$\partial g/\partial b<0$であり、かつ、$\partial f/\partial k<\partial g/\partial k$となるように、財政支出$g$を政府が的確かつ適切に動学的に制御できるとき、同時に、課税についての財政政策で、$s-s\tau-\tau \leqq 0$（つまり$s/(s+1) \leqq \tau$）とでき、しかも金融政策で$r_I \leqq v_N$とできるならば、（$\mathrm{tr}(J_{3.2})<0$かつ$|J_{3.2}|>0$等の条件を充たすようにできるから）当該体系は動学的に安定である。■（なおこの場合、$s-s\tau-\tau=0$かつ$r_I=v_N$となる極めて特殊な状況でも、この命題の主張が成立するのは上記の各式から明らかであり、また上の命題と同じく、$r_I<v_N$のときは$\partial g/\partial b \leqq 0$でもこの命題3は成立する。）

この命題3の場合には、同様に$\partial g/\partial b<0$の仮定は保持されるが、他方$|\partial g/\partial b|$についての仮定は除去されており、$\partial f/\partial k<\partial g/\partial k$の条件が追加され、超低金利という特殊な金融政策が要求されているものの、内容が比較的に明確になったことも含めて、現実的な経済からすれば条件が緩和されたかのように見える。$|\partial g/\partial b|$についての不明瞭な仮定がいらなくなるというのは、現実的な経済や財政の観点では実際上において政策条件が軽減されたのと等しく、また$\partial f/\partial k<\partial g/\partial k$という条件は実際的に政策実施ないし運営可能である。命題3は現実的に特殊な仮定も含まれているが、しかし実際的には他の命題よりも経済政策的に有効な情報を提供していると言える。

これらの3つの命題は、抽象的な面が多々あり、その命題3にしても特殊な条件に依存している。もっと有効な命題を求めて、次の節では、もう1つの可能性を模索し、すなわち長期均衡点が鞍点になる場合が検討される。

IV 公債蓄積と新古典派的な経済成長軌道と財政支出の安定化政策

前節と同様に、モデル経済の動学的安定化制御体系(2.1)と(2.2)は、gの政府による完全操作を前提して、新古典派的経済成長が安定的に適切に制御されているという意味で、ここでは動学的安定化制御体系とか動学的安定化(制御)成長体系と呼ばれている。その最適な場合の基本的な問題設定(無限計画期間問題)の場合に必要な横断性条件から、最適候補経路は初期条件から長期均衡点へと向かいかつ計画期間内に到達する経路であり、当該の動学的安定化制御(成長)体系の長期均衡点は、動学的に(漸近)安定であるか、または、鞍点とならなければならない。前節の分析ないし考察はその前者の場合を検討したが、以下ではその後者の可能性を扱う。

以下でも同様に、当該の動学的安定化制御経済成長の安定化経路がフィードバック制御でありかつ単純化できるものと想定して、(3.1)が仮定される。当該の動学的安定化制御成長体系の長期均衡点が鞍点となる場合というのは、無限計画期間問題で最適経路が一義的に存在する場合である。換言すれば、この節での分析は前節の場合よりも明確な政策運営目標が存在する場合なのであり、むしろ一層明瞭に経済政策が運営できる場合である。この意味では、この節の分析や考察は前節の内容よりも一層重要である。

前節の分析のように、当該の動学的安定化制御成長体系(2.1)と(2.2)及び(3.1)がどのような条件の下で鞍点の長期均衡点を有するかという問題は、その当該の動学的体系のヤコビ行列の各要素(3.2.1)から(3.2.4)までについて調べることで分かる。ここで、2変数システムの連立微分方程式体系が、鞍点となる長期均衡点を持つための一般的な条件を確認しておく。

補題(解釈): 2状態変数システムの連立微分方程式体系に長期均衡点(平衡点)が一義的に存在するとき、その長期均衡点が鞍点となるためには、対象となるその連立微分方程式体系のヤコビ行列の行列式が負の符合となることが必要十分である。■(こうした解釈は微分方程式論の標準的な数学書の解説等で見られる。)

なお、この補題は数学的な解釈に過ぎないが、一見して特殊な場合についてのみ有効な条件のように見えるかもしれないが、むしろ数学的にも一般的な内容である。というのは、この補題の主張は、局所的には明らかだが、微分方程式の(初期値問題において)解軌道のベクトル場の位相的性質(ベクトルの相流)から、局所的にその平衡点が鞍点となる場合には、大域的にも同じ性質をその平衡点が持つということが知られている。したがって、微分方程式の解軌道について、局所的な鞍点性相流の存在は直ちに大域的なそれを意味する。

そこで、その補題を問題となっている当該の体系に適用すれば、当該の体系では(3.4)ないし(3.4´)で得られた行列式ついて$|J_{3.2}|<0$となることが、当該の動学的体系の長期均衡点が鞍点となるための局所的かつ大域的条件となっている。特に、(3.4´)の右辺の諸項を詳しく見れば、その行列式が負値となる条件が導出でき、しかもこれについて経済的解釈を与えることも可能になる。ここでの安定性の分析は、命題1から命題3とは異なり、もっぱら$|J_{3.2}|<0$の条件にのみ関心を集中すればよいから、むしろ一層明瞭な内容の命題を導くことができる。次にその条件に関する命題を検討し、その導出を試みる。

前節と同様に、(3.4´) の右辺の諸項を$\partial g/\partial b<0$の仮定の下で考えると、前節と反対に$s-s\tau-\tau>0$の仮定を採用するならば、$(s-s\tau-\tau)\partial f/\partial k>(\nu_N+\delta)$であるかあるいは$|\partial g/\partial b|$を十分に小さくできれば、その第1項前半と第3項の和は負値あるいは無視できる小さな値にできる。また、前節末と反対に $r_1>\nu_N$であるとしても、前節と同様に$\partial f/\partial k<\partial g/\partial k$ならば、その第1項後半と第2項の和は負値にできる。これらの仮定の下では次の命題が得られる。

命題4：安定化制御を伴う動学的安定化制御(成長) 体系(2.1) と(2.2) 及び(3.1) が存在するとき、$\partial g/\partial k>0$および、$\partial g/\partial b\leqq 0$ であり、かつ、十分に大きな$|\partial g/\partial k|$と、十分に小さい$|\partial g/\partial b|$と、しかし、比較的に適度に$|\partial g/\partial k|<|\partial g/\partial b|$かつ$\partial f/\partial k<\partial g/\partial k$となるように、財政支出$g$を政府が的確かつ適切に動学的に制御できるとき、同時に、課税についての財政政策で、$s-s\tau-\tau>0$ (つまり$s/(s+1)>\tau$) とでき、しかも金融政策で $r_1>\nu_N$とできるならば、(tr$(J_{3.2})<0$かつ$|J_{3.2}|>0$等の条件を充たすようにできるから) 当該体系が動学的に安定になるようにできる。■

前節およびこの命題4と反対に、(3.4´) の右辺の諸項を$\partial g/\partial b>0$ (または$\geqq 0$) の仮定の下で考えると、前節と同様に$s-s\tau-\tau\leqq 0$の仮定を採用するならば、その第1項前半と第3項は負値にできる。また、前節末と反対に$r_1\geqq\nu_N$であるとしても、前節と同様に$\partial f/\partial k<\partial g/\partial k$ならば、その第1項後半と第2項の和は負値にできる。これらの仮定の下では次の命題が得られる。

命題5：安定化制御を伴う動学的安定化制御(成長) 体系(2.1) と(2.2) 及び(3.1) が存在するとき、$\partial g/\partial k>0$および、$\partial g/\partial b>0$であり、かつ、$\partial f/\partial k<\partial g/\partial k$となるように、財政支出$g$を政府が的確かつ適切に動学的に制御できるとき、同時に、課税についての財政政策で、$s-s\tau-\tau\leqq 0$ (つまり$s/(s+1)\leqq\tau$) とでき、しかも金融政策で $r_1\geqq\nu_N$とできるならば、(tr$(J_{3.2})<0$かつ$|J_{3.2}|>0$等の条件を充たすようにできるから) 当該体系は動学的に安定である。■ (なおこの場合、$s-s\tau-\tau=0$かつ$r_1=\nu_N$となる極めて特殊な状況でも、この命題の主張が成立するのは上記の各式から明らかであり、また、$r_1>\nu_N$のときは$\partial g/\partial b\leqq 0$でもこの命題5は成立する。)

これらの命題を比較すると、命題4の内容はあまり明確でなく、貯蓄率がどうでも財政政策的に低い税率をいつも容認できるが、同時に超低金利の金融政策がないと実現できないわけで、経済政策で適切なまたは安定化制御成長を実施かつ動学的に政策運営することは実際上かなり困難である。一方、命題5では、命題4よりも比較的に内容が明確であり、現実の貯蓄率によっては比較的に高い税率が必要になるが容認できる範囲に留まり (例えば$s=0.5$ならば$s/(s+1)=0.3333\cdots\fallingdotseq 0.334\leqq\tau=34\%$未満でもよい)、同時に、通常の金利水準でよいので特別な金融政策を必要としない (例えば先進国ならば1%以上の金利でもよい)。したがって、その命題5に従う動学的経済政策は現実的に実現し易いわけだから、命題5の経済政策で安定化成長を実施かつ動学的に政策運営することは実際上かなり可能であることがわかる。また、$\partial g/\partial k>0$という仮定は現実的な経済でも見られる自然な性質であり、命題4と反対の、命題5の仮定$\partial g/\partial b>0$は、安定化制御成長が正に進行している状況下でさえも、労働力1単位当りで公債ストックの増加と共に労働1単位当たりで政府支出

も同時に増加させることができるということを意味し、実際によく見られるような財政状況を動学的安定化制御成長政策において許容しているから、現実的な性質であり、もしも実現するのであれば、実際の政府の財政政策運営に自由度を与えることになる。

また、命題5は、命題4だけでなく前節の命題1から命題3までと比較しても、内容が明瞭であり、提示されている諸条件も明確であり、かつ実際の経済的性質からすると、比較的に自然な内容である。しかも、均衡点が鞍点となる場合の考察であり、一義的な安定化制御成長経路の存在を前提とする分析結果である。命題5は、もしも（所定の社会厚生汎関数を伴う無限計画期間問題の最適成長の場合を含む）一義的な安定化制御成長が存在するときは、したがって政府によって財政支出が動学的に適切または最適に制御されている限りにおいては、労働1単位当りの水準で見ると、政府の財政が経済成長と資本蓄積が財政支出の増大を伴い、かつ、財政赤字を出し続けても良いということを（これらの程度の問題はあるにせよ）基本的に保証している。

このように、当該の考察では、当該のモデルと考察の意味で新古典派的な動学的安定化制御経済成長が存在するのであれば、普通の日常的な財政や金融の運営の範囲の中で、適切で自由度のある現実的な条件に従って、適切または最適な実際の財政運営が見出せるということを、正に命題5は主張ないし保証しているのである。

参考文献

⊙秋山裕(1999)『経済発展論入門』(経済学研究双書)／東洋経済新報社。

⊙Barro, R.J. and X. Sala-I-Martin(1995) / *Economic Growth* / McGraw-Hill / 大住圭介 訳(1997)『内生的経済成長論』(I・II)／九州大学出版会。

⊙Burmeister, E. and A.R. Dobell(1970) / *Mathematical Theories of Economic Growth* / The Macmillan Company / 邦訳：佐藤隆三&大住英治(共訳)(1976)／『テキストブック現代経済成長理論』／勁草書房

⊙Carlberg, Michael(1988) / *Public Debt / Taxation and Government Expenditures in a Growing Economy* / Duncker & Humblot / Berlin,

⊙Cass, D. (1965)/"Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," / *Review of Economic Studies,* vol.27(pp.233-240).

⊙—— (1966)/"Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem," / *Econometrica* , vol.34(pp.833-850).

⊙Domar, E.D.(1946) / "Capital Expansion, Rate of Growth、and Employment," / *Econometrica,* vol.14, April(pp.137-47); reprinted in〔12〕and〔43〕.

⊙—— (1957) / *Essays in the Theory of Economic Growth* / Oxford Univ. Pr., Inc. / New York／宇野健吾 訳(1959)／『経済成長の理論』／東洋経済新報社。

⊙Jones, C.I.(1998) / *Introduction to Economic Growth,* W.W.Norton／香西泰 訳(1999)／『経済成長理論入門』／日本経済新聞社。

⊙Jones, H.G.(1975)/ *An Introduction to Modern Theories of Economic Growth* / Thomas Nelson & Sons, Middlesex, ／松下勝弘 訳(1980)／『現代経済成長理論』／マグロウヒル好学社。

⊙Koopmans, T. C.(1965)/ "On the Concept of Optimal Growth, " pp.225-300, in *The Econometric Approach to Development Planning* / Chicago: Rand McNally, .

⊙Lucas, R. E.(1988) / "On the Mechanics of Economic Development, " *Journal of Monetary Economics,* vol. 22, July(pp.3-42).

⊙大住圭介(1985)／『長期経済計画の理論的研究』／勁草書房。

⊙Ramsey, F. P. (1928)/"A Mathematical Theory of Saving," / *Economic Journal*, vol.38., December, (pp.543-559).

⊙Romer, D.(1996) / *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill／ 堀雅博・他 訳(1998)／『上級マクロ経済学』／日本評論社。
⊙齊藤誠(2006(2009：第3刷))／『新しいマクロ経済学』(新版)／有斐閣。
⊙佐藤隆三(1979(第3刷))／『経済成長の理論』(経済学全集)／勁草書房。
⊙Solow, R.M.(1965)/"A Contribution to the Theory of Economic Growth," / *Quarterly Journal of Economics*, Vol.LXX, Febrary(pp.65-94); Reprinted in Stiglitz & Uzawa (eds)〔1969〕(pp. 58-87).
⊙—— (1970) / *Growth Theory* / Oxford Univ. Pr.／福岡正夫 訳(1971)／『成長理論』／岩波新書。
⊙—— (2000) / *Growth Theory*, 2nd./Oxford Univ. Pr.／福岡正夫 訳(2000)／『成長理論(第二版)』／岩波新書。
⊙Stiglitz, J.E., and H. Uzawa (eds)(1969) / *Readings in the Modern Theory of Economic Growth* / The M.I. T. Press,.
⊙鈴木康夫(2001)／『不安定性原理とハロッド=ドーマー型経済変動成長理論』(滋賀大学経済学部研究叢書第35号)／滋賀大学経済学部：[2001a]。
⊙鈴木康夫(2001)／「ハロッド=ドーマー型モデルと現代経済成長理論」『彦根論叢』(滋賀大学経済学会)第332号(pp. 197-214)：[2001b]。
⊙—— (2003)／『ケインズ革命とマクロ経済学』／昭和堂：[2003a]。
⊙—— (2003)／「基本的な最適成長理論と完全雇用」『彦根論叢』(滋賀大学経済学会)第343号(pp.51-64)：[2003b]。
⊙—— (2003)／「基本的な最適成長モデルと完全雇用」『彦根論叢』(滋賀大学経済学会)第344・355号(pp.145-164)：[2003c]。
⊙Swan, T.W.(1956) / "Economic Growth and Capital Accumulation," / *Economic Record*, Vol. XXXII, No.63, November(pp.334-61); Reprinted in Stiglitz & Uzawa (eds)〔1969〕(pp.88-115).
⊙武野秀樹・山崎良也(編)(1977)／『経済成長論』／有斐閣。
⊙和田貞夫(1989)／『動態的経済分析の方法』／中央経済社。

Public Debt, Neoclassical Growth, and, Stabilizing Control by Government Expenditures

Yasuo Suzuki

Summary : The theoretical possibilities that neoclassical growth with public debt accumulation and the government's financial management by control of its expenditures, *g*, can allow the economic state to dynamically and asymptotically approach and reach a long-run equilibrium state without the optimal control theory are analyzed. The regarding model is a system of two dynamic and differential equations consisting of the Solow-Swan-type growth equation and the growth equation of the per capita level of public debt stock, *b*, meaning governmental budget constraint with some kinds of controls, called stabilizing controls, of the government's financial expenditures. Under a dynamic system, these controls are ones to make, perhaps like an automatic control, its long-run equilibrium point asymptotically stable with a weak control by the government's controllability that is insufficient in detail, or by a saddle point with a strong control by which the government can control its expenditures perfectly and precisely, like an optimal control.

By analyzing such a dynamic control system, five propositions are derived which assert weakly, or in a few cases insist to a certain extent, on the existence of stabilizing controls with some different assumptions in each case of the model. Particularly, $\partial f / \partial k < \partial g / \partial k$ is a very significant condition for stabilizing controls, and in the case of the saddle equilibrium point, that is Proposition 5, there exist the effective conditions for stabilizing controls with monetary policy on the interest rate and taxation policy on the tax rate assumed to be positive parameters, which do not need to decrease *g* and *b* quickly and suddenly or drastically, even when *g*, *b* and *k* continue to grow at the same time in such neoclassical economic growth. There are theoretically sufficient possibilities of dynamically stable public debt accumulation consistent with neoclassical economic growth under economic policies.