論文

2変量跳躍拡散過程での リアルオプション・モデル

飯原慶雄
Yoshio Iihara
南山大学 / 名誉教授

I　はじめに

リアルオプション・モデルでは、将来のキャッシュフローを確率過程として捉えても、投資コストは確定的であるとすることが多い。それに対し、ここでは、投資コストも確率的に変動する場合について検討する。ここで検討するモデルは、投資コストのかわりに、将来のキャッシュ・アウト・フローが確率的に変動する場合にも適用することができる。すなわち、ここでのモデルは、一般に将来のキャッシュフローを2つの部分に分け、それらが、それぞれ異なる確率過程に従って変動すると考えられる場合に適用することができるものである。新製品開発などでは、製品の価格、販売量はかなり変動するが、投資コストは比較的に安定している場合もある。また、不動産開発などのように開発コストは大きく変動するが、収入は比較的に安定している場合もある。このような場合には、1変量の確率変数でのモデルでも良いが、両者がともに変動するものとして取り扱うことが望ましい場合も少なくない。海外投資のように収入も支出もかなり変動し、収入と支出を異なる確率過程として捉えるのが適切な場合もある。ここでは、投資コストもキャッシュ・アウト・フローと考え、一般に、時刻 t でのキャッシュフローが $c_1X_1(t)-c_2X_2(t)$ で表わされる場合のリアルオプション・モデルを考える。

将来のキャッシュフローを2つの部分に分け、2個の確率変数 $X_1(t)$ と $X_2(t)$ が異なる確率過程に従って変動するが、それらの確率過程がともに幾何ブラウン運動である場合については、既によく知られている方法で処理することができる[1)]。リアルオプション・モデルでは、多くの場合、幾何ブラウン運動が使用されるが、突然の災害、技術革

1) 2変量の幾何ブラウン運動の場合については McDonald and Siegel(1986), Dixit and Pindyck(1994)など参照。

新、爆発的な人気などにより、大幅なキャッシュフローの変動が生じるような場合には、幾何ブラウン運動だけではなく、これにジャンプを加えた方がより適切な形になる。これまでに、1変量の確率過程について、幾何ブラウン運動に上下のジャンプが加わった場合の投資実行のタイミングについて考察してきたが[2)]、ここでは、確率変数が2変量の場合を考察する。

2個の確率変数が互いに独立にジャンプする場合は、これまでに考察してきた1変量の跳躍拡散過程モデルの拡張として比較的容易に解を求めることができる。しかし、2個の確率変数のうちの一方がジャンプしたときには、他方の確率変数もジャンプするものと考えられる。そこで、ここでは2個の確率変数が同時に変化する場合を考察する。すなわち、上下のジャンプはポアソン過程にしたがって発生するものとし、ジャンプの大きさは2変量の対数指数分布であるとする。2変量指数分布にはいろいろなものがあるが、ここでは、Marshal and Olkin型のものを使用する。

割引率を r とし、投資実行時点を τ とし、その時点での将来の収入の期待現在価値 $c_1X_1(\tau)$ と、支出の期待現在価値 $c_2X_2(\tau)$ の差の割引値を $V(x)$ とする（c_1 と c_2 については確率過程について説明した後で明らかにする）。以下では、$X_1(t)$ と $X_2(t)$ を一緒にしたものを $X(t)$、その実現値 x_1 と x_2 を一緒にしたものを x で表すことにする（$V(x) = \mathrm{E}[e^{-r\tau}(c_1X_1(\tau) - c_2X_2(\tau)) | X(0) = x]$）。$X(t)$ が領域 A に到達すると投資を実行することにする（$\tau = \inf\{t | X(t) \in \mathrm{A}\}$）。時刻0から t までの間に投資が実行されなければ、$V(x) = e^{-rt}\mathrm{E}[V(X(t))]$ となるので、$X(t)$ の無限小生成作用素

$$LV(x) = \lim_{t\to+0} \frac{\mathrm{E}[V(X(t) \mid X(0) = x] - V(x)}{t}$$

を使って、微分方程式

$$LV(x) = rV(x)$$

が得られる。この微分方程式の境界条件は $V(0) = 0, V(x) = c_1x_1 - c_2x_2\ (x \in \mathrm{A})$ である。

II 確率過程X(t)

ここでは、確率過程 $X(t)$ は2変量の幾何ブラウン運動に上下のジャンプが加わったものとし、幾何ブラウン運動は

$$dX_i(t) = \mu_i X_i(t)dt + \sigma_i X_i(t)dW_i(t) \quad (i = 1, 2),$$

$$dW_1 dW_2 = \rho dt$$

であるとし、上下のジャンプの発生は κ と λ をパラメータとするポアソン過程で、ジャンプ発生前の $X(t)$ が x のとき、ジャンプ発生後には $X(t+) = (x_1Y_1, x_2Y_2)$、あるいは $X(t+) = (x_1/Z_1, x_2/Z_2)$ になるとする。この場合、$X(t)$ の無限小生成作用素は

$$\begin{aligned} LV(x) = {} & [\sigma_1^2 x_1^2 V_{11}(x) + 2\rho\sigma_1\sigma_2 V_{12}(x) \\ & + \sigma_2^2 x_2^2 V_{22}(x)]/2 \\ & + \mu_1 x_1 V_1(x) + \mu_2 x_2 V_2(x) \\ & + \kappa \mathrm{E}[V(x_1Y_1, x_2Y_2) - V(x)] \\ & + \lambda \mathrm{E}[V(x_1/Z_1, x_2/Z_2) - V(x)] \quad (1) \end{aligned}$$

$$V_i(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_i}, \quad V_{ij}(x) = \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

となり、$X(t)$ のレヴィ冪指数は

2）1変量の跳躍拡散過程でのタイミング・モデルについては Mordecki(2002), Kou and Wang(2004)、董・飯原 (2008)など参照。

$$\phi(s,t) = [\sigma_1^2 s(s-1) + 2\rho\sigma_1\sigma_2 st + \sigma_2^2 t(t-1)]/2 + \mu_1 s + \mu_2 t + \kappa \mathrm{E}[Y_1^s Y_2^t - 1] + \lambda \mathrm{E}[Z_1^{-s} Z_2^{-t} - 1] \quad (2)$$

となる。また、X_1, X_2の期待値の増加率を m_1, m_2 とすると

$$\mathrm{E}[X_i(\tau) \mid X_i(0) = x_i] = x_i e^{m_i \tau},$$
$$m_i = \mu_i + \varkappa \mathrm{E}[Y_i - 1] + \lambda \mathrm{E}[Z_i^{-1} - 1] \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

となるので、

$$c_1 = \frac{1}{r - m_1}$$

となり、キャッシュ・アウト・フローを表すX_2が投資コストであるか、あるいは投資実行後のキャッシュ・アウト・フローであるかにより

$c_2=1$　あるいは　$c_2=1/(r-m_2)$

となる。（ここで、割引率rは m_1およびm_2より大であるとする。）

Ⅲ　Marshall and Olkin型2変量指数分布 [3]

確率変数Xと Yの確率分布が $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ をパラメータとする Marshall and Olkin型2変量指数分布であると、結合確率密度関数は

$$f(x, y; \theta) = \begin{cases} \theta_1(\theta_2 + \theta_3)\exp\{-\theta_1 x - (\theta_2 + \theta_3)y\}, & (x < y) \\ \theta_2(\theta_1 + \theta_3)\exp\{-\theta_2 y - (\theta_1 + \theta_3)x\}, & (y < x) \\ \theta_3 \exp\{-(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)y\}, & (x = y) \end{cases}$$

$$(x > 0,\ y > 0,\ \theta_1 > 0,\ \theta_2 > 0,\ \theta_3 > 0)$$

で、X と Yの平均と相関係数は

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\theta_1 + \theta_3}, \quad \mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\theta_2 + \theta_3},$$
$$\hat{\rho} = \mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\theta_3}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}$$

となり、積率母関数は

$$\psi(s,t;\theta) = \mathrm{E}(e^{-sX-tY};\theta) = \frac{(\theta_1 + \theta_3)(\theta_2 + \theta_3) + \dfrac{st\theta_3}{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + s + t)}}{(\theta_1 + \theta_3 + s)(\theta_2 + \theta_3 + t)}$$

となる。したがって、$y_i = \log Y_i$と $z_i = \log Z_i$の結合確率分布が$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$と$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$をパラメータとする Marshall and Olkin型 2変量指数分布とすると、X_1, X_2の期待値の増加率 m_1とm_2は

$$m_i = \mu_i + \frac{\varkappa}{\zeta_i + \zeta_3 - 1} - \frac{\lambda}{\eta_i + \eta_3 + 1} \quad (i = 1, 2)$$

となる。なお、Marshall and Olkin型 2変量指数分布のパラメータ$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$は、$X$ と Yの平均と相関係数を使って表現すると、

$$\theta_1 = \frac{1}{\mathrm{E}(X)} - \theta_3, \quad \theta_2 = \frac{1}{\mathrm{E}(Y)} - \theta_3,$$
$$\theta_3 = \frac{[\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)]\hat{\rho}}{\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)(1 + \hat{\rho})}$$

となる。

Ⅳ　2変量問題の変形

関数 $V(x)$ がxの1次同次関数であることから、

$$V(x) = x_2 V(x_1/x_2, 1)$$

となるので、x_1/x_2を u で表し、関数 $V(a, 1)$ を $W(a)$ で表すことにすると、$LV(x) = rV(x)$ から得

3) Marshall and Olkin型2変量指数分布については、
Marshall and Olkin(1967),
Kotz, Balakrishnan and Johnson (2000),
Nadarajah and Kotz(2006)など参照。

られる微分方程式は

$$\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 W''(u) + (\mu_1 - \mu_2)uW'(u) - (r - \mu_2)W(u) + \varkappa\left\{ \mathrm{E}\left[Y_2 W\left(\frac{Y_1}{Y_2}u\right)\right] - W(u)\right\} + \lambda\left\{ \mathrm{E}\left[\frac{1}{Z_2}W\left(\frac{Z_2}{Z_1}u\right)\right] - W(u)\right\} = 0 \quad (4)$$

$$(\sigma^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$$

となる。また、境界条件は

$W(0) = 0, W(u) = c_1 u - c_2\ (u \geq u^*)$

となる。上の式の中の期待値の部分は

$$W(u) = \begin{cases} \sum A_j u^{\alpha_j} & u < u^* \\ c_1 u - c_2 & u \geq u^* \end{cases}$$

とすると、

$$\mathrm{E}\left[Y_2 W\left(\frac{Y_1}{Y_2}u\right)\right] = \sum A_j u^{\alpha_j}[\psi(-\alpha_j, \alpha_j - 1; \zeta) - g_1(-\alpha_j, \alpha_j - 1; \zeta)] + c_1 u g_1(-1, 0; \zeta) - c_2 g_1(0, -1; \zeta)$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{Z_2}W\left(\frac{Z_2}{Z_1}u\right)\right] = \sum A_j u^{\alpha_j}[\psi(\alpha_j, 1 - \alpha_j; \eta) - g_2(\alpha_j, 1 - \alpha_j; \eta)] + c_1 u g_2(1, 0; \eta) - c_2 g_2(0, 1; \eta)$$

$$g_1(s, t; \theta) = \frac{\theta_2(\theta_1 + \theta_3)}{\theta_1 + \theta_3 + s} \times \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + s + t}\left(\frac{u^*}{u}\right)^{-(\theta_1 + \theta_3 + s)}$$

$$g_2(s, t; \theta) = \frac{\theta_1(\theta_2 + \theta_3)}{\theta_2 + \theta_3 + t} \times \frac{1}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + s + t}\left(\frac{u^*}{u}\right)^{-(\theta_2 + \theta_3 + t)}$$

となる（付録A参照）。

V　微分方程式の解

前節の (4) 式が任意の xについて成立するためには

$$\frac{1}{2}\sigma^2\alpha_j(\alpha_j - 1) + (\mu_1 - \mu_2)\alpha_j - (r - \mu_2) + \varkappa[\psi(-\alpha_j, \alpha_j - 1; \zeta) - 1] + \lambda[\psi(\alpha_j, 1 - \alpha_j; \eta) - 1] = 0$$

と

$$-\sum A_j u^{\alpha_j} g_1(-\alpha_j, \alpha_j - 1; \zeta) + c_1 u g_1(-1, 0; \zeta) - c_2 g_1(0, -1; \zeta) = 0 \quad (5a)$$

$$-\sum A_j u^{\alpha_j} g_2(\alpha_j, 1 - \alpha_j; \eta) + c_1 u g_2(1, 0; \eta) - c_2 g_2(0, 1; \eta) = 0 \quad (5b)$$

が成立することが必要になる。

$$F(v) = \frac{1}{2}\sigma^2 v(v - 1) + (\mu_1 - \mu_2)v - (r - \mu_2) + \varkappa[\psi(-v, v - 1; \zeta) - 1] + \lambda[\psi(v, 1 - v; \eta) - 1]$$

とすると

$$F(0) = m_2 - r, \qquad F(1) = m_1 - r$$

となるので、割引率 rが、X_1とX_2の期待値の増加率m_1とm_2のいずれよりも大であれば、方程式$F(v) = 0$の解は正のものと負のものがそれぞれ3個となり、正の解はいずれも 1より大となる。以下では、rは m_1と m_2のいずれよりも大であるとする。境界条件 $W(u) = 0$より、負の解を冪数に持つ項の係数は零となるので、方程式 $F(v) = 0$の正の解を$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$とすると、

$$W(u)=\sum_{j=1}^{3}A_j u^{\alpha_j}$$

となり、この係数Ajと最適な参入水準$u*$はhigh contact condition

$$\sum_{j=1}^{3}A_j u^{*\alpha_j}-c_1u^*+c_2=0$$

$$\sum_{j=1}^{3}\alpha_j A_j u^{*\alpha_j}-c_1u^*=0$$

と(5a)と(5b)から導かれる

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{A_j u^{*\alpha_j}}{\zeta_1+\zeta_3-\alpha_j}-\frac{c_1u^*}{\zeta_1+\zeta_3-1}+\frac{c_2}{\zeta_1+\zeta_3}=0$$

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{A_j u^{*\alpha_j}}{\eta_2+\eta_3+1-\alpha_j}-\frac{c_1u^*}{\eta_2+\eta_3}+\frac{c_2}{\eta_2+\eta_3+1}=0$$

から

$$A_j u^{*\alpha_j}=\frac{c_2}{\alpha_j-1}\times\frac{\zeta_1+\zeta_3-\alpha_\mathrm{j}}{\zeta_1+\zeta_3}\frac{\eta_2+\eta_3+1-\alpha_j}{\eta_2+\eta_3+1}\times\prod_{\substack{k=1,\\k\neq\mathrm{j}}}^{3}\frac{\alpha_k}{\alpha_k-\alpha_j}\tag{6a}$$

$$u^*=\frac{c_2}{c_1}\frac{\zeta_1+\zeta_3-1}{\zeta_1+\zeta_3}\frac{\eta_2+\eta_3}{\eta_2+\eta_3+1}\times\prod_{k=1}^{3}\frac{\alpha_k}{\alpha_k-1}\tag{6b}$$

という結果が得られる(付録B参照)。

Ⅵ 若干の考察

1 確定的キャッシュフローとの比較

キャッシュフローの$X(t)$の変動が確定的であると$e^{-rt}[c_1X_1(t)-c_2X_2(t)]$の最大のための必要条件は

$$-r[c_1X_1(t)-c_2X_2(t)]+\frac{c_1dX_1(t)}{dt}-\frac{c_2dX_2}{dt}=0$$

となり、

$$u(t)=\frac{X_1(t)}{X_2(t)},\quad m_1(t)=\frac{dX_1(t)}{dt}/X_1(t),$$

$$m_2(t)=\frac{dX_2(t)}{dt}/X_2(t)$$

とすると、最大のための必要条件は

$$u(t)=\frac{c_2}{c_1}\frac{r-m_2(t)}{r-m_1(t)}=c_2(r-m_2(t))\tag{7}$$

となり、$X_2(t)$が投資コストであるか、投資実行後のキャッシュ・アウト・フローであるかにより、

$$u(t)=r-m_2(t)\quad \text{または}\quad u(t)=1$$

となる。前者は投資実行時のキャッシュフローが投資コストの利子から投資コストの値上がり率を差し引いたものに等しくなるときが最適投資実行時であることを示し、後者はネット・キャッシュフローが零になるときが最適投資実行時であることを示している。前節の結果とかなり異なる形になっているので、前節の結果を変形してみる。

方程式$F(v)=0$の正の解をα_i、負の解をβ_i $(i=1,2,3)$とすると

$$F(v)=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\prod_{j=1}^{3}(\alpha_j-v)(\beta_j-v)}{(\zeta_1+\zeta_3-v)(\zeta_2+\zeta_3-1+v)}\times\frac{1}{(\eta_1+\eta_3+v)(\eta_2+\eta_3+1-v)}$$

であるから

$$\frac{F(0)}{F(1)} = \frac{r-m_2}{r-m_1}$$
$$= \frac{(\zeta_1+\zeta_3-1)(\zeta_2+\zeta_3)}{(\zeta_1+\zeta_3)(\zeta_2+\zeta_3-1)} \times \frac{(\eta_1+\eta_3+1)(\eta_2+\eta_3)}{(\eta_1+\eta_3)(\eta_2+\eta_3+1)} \times \prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i-1}\frac{\beta_i}{\beta_i-1}\right)$$

となり、先の跳躍拡散過程での最適解は

$$u^* = \frac{c_2}{c_1}\frac{r-m_2}{r-m_1}\frac{\zeta_2+\zeta_3-1}{\zeta_2+\zeta_3}\frac{\eta_1+\eta_3}{\eta_1+\eta_3+1} \times \prod_{i=1}^{3}\frac{\beta_i-1}{\beta_i} \quad (8)$$

と表すことができる。

$$m_1 = \frac{d\mathrm{E}[X_1(t)]}{dt}/\mathrm{E}[X_1(t)],$$
$$m_2 = \frac{d\mathrm{E}[X_2(t)]}{dt}/\mathrm{E}[X_2(t)]$$

であるから、跳躍拡散過程の場合の最適解は確定的な場合の最適解に修正項

$$B = \frac{\zeta_2+\zeta_3-1}{\zeta_2+\zeta_3}\frac{\eta_1+\eta_3}{\eta_1+\eta_3+1}\prod_{i=1}^{3}\frac{\beta_i-1}{\beta_i}$$

が掛った形になっている。修正項の上限と下限は

$$1-\frac{1}{\beta_1} > D > 1-\frac{1}{\beta_3} \qquad (0 > \beta_1 > \beta_2 > \beta_3)$$

となる（付録C参照）。修正項Bは1より大であるから、将来のキャッシュフローの予測値として、確率変数の期待値を使用すると、正しい投資タイミングより早めに投資を実行することになる。

2　ボラティリティの変動の効果

最適投資水準u^*は（8）式からβ_i（$i=1,2,3$）の増加関数となる。他方、σ^2の増加はすべてのβ_iを増加させるので、u^*はσ^2の増加関数となる。

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial\sigma_1} = 2(\sigma_1-\rho\sigma_2), \qquad \frac{\partial\sigma^2}{\partial\sigma_2} = 2(\sigma_2-\rho\sigma_1)$$

であるから、ρが $\min\{\sigma_1/\sigma_2, \sigma_2/\sigma_1\}$ より大きい場合を除いて、u^*はσ_1, σ_2の増加関数となる。ρが $\min\{\sigma_1/\sigma_2, \sigma_2/\sigma_1\}$ より小さいときには、u^*はσ_1, σ_2のうち大きいものの増加関数、小さいものの減少関数となる。

【付記】

本論文の作成に当たって，東洋大学董晶輝准教授に協力してもらった。また、本論文に関連した報告を学会等で行った際に、南山大学澤木勝茂教授、滋賀大学堀本三郎教授からコメントを得て、内容を改めることができた。これらの方々に感謝します。

参考文献

1　McDonald, R. and D. Siegel (1986) / "The Value of Waiting to Invest" / *Quarterly Journal of Economics*, Vol.101.

2　Dixit, A. K. and R. Pindyck (1994) / *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press. (『投資決定理論とリアルオプション』川口有一郎等訳／エコノミスト社、2002)

3　Kotz, S., N. Balakrishnan and L. Johnson (2000) / *Continuous Multivariate Distributions*, Volume 1, Models and Applications, 2nd Edition, Wiley.

4 Kou, S. G. and H. Wang (2004) / "Option Pricing under a Double Exponential Jump Diffusion Model" *Management Science*, Vol. 50.

5 Marshall, A. and I. Olkin(1967) / "A Multivariate Exponential Distribution" / *Journal of American Statistical Association*, Vol.62.

6 Mordecki, E. (2002) / "Optimal Stopping and Perpetual Options for Lévy Processes" / *Finance and Stochastics*, Vol. 6.

7 Nadarajah, S. and S. Kotz (2006) / " Reliability for Some Bivariate Exponential Distributions", *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2006.

8 董晶輝・飯原慶雄(2008)／「跳躍拡散過程での投資決定」『リアルオプション研究』No. 1

付録 A

本文の (4) 式の中の期待値の部分は、境界条件から

$$Y_2 W\left(\frac{Y_1}{Y_2}u\right) = e^{y_2} W(e^{y_1-y_2}u) = \begin{cases} \sum A_j u^{\alpha_j} e^{\alpha_j y_1 - (\alpha_j - 1)y_2} & e^{y_1-y_2}u < u^* \\ c_1 u e^{y_1} - c_2 e^{y_2} & e^{y_1-y_2}u \geq u^* \end{cases}$$

となり、Marshall Olkin 型 2 変量指数分布では

$$\int_0^\infty \int_0^{y+\log(u^*/u)} e^{-sx-ty} f(x,y;\theta)dxdy = \psi(s,t;\theta) - \int_0^\infty \int_{y+\log(u^*/u)}^\infty e^{-sx-ty} f(x,y;\theta)dxdy$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{y+\log(u^*/u)}^\infty e^{-sx-ty} f(x,y;\theta)dxdy &= \frac{\theta_2(\theta_1+\theta_3)}{\theta_1+\theta_3+s}\frac{1}{\theta_1+\theta_2+\theta_3+s+t}\left(\frac{u^*}{u}\right)^{-(\theta_1+\theta_3+s)} \\ &= g_1(s,t;\ \theta)\end{aligned}$$

となるので、

$$\mathrm{E}\left[Y_2 W\left(\frac{Y_1}{Y_2}u\right)\right] = \sum A_j u^{\alpha_j}[\psi(-\alpha_j,\alpha_j-1;\zeta) - g_1(-\alpha_j,\alpha_j-1;\zeta)] + c_1 u g_1(-1,0;\zeta) - c_2 g_1(0,-1;\zeta)$$

となる。他方、

$$\frac{1}{Z_2} W\left(\frac{Z_2}{Z_1}u\right) = e^{-z_2} W(e^{z_2-z_1}u) = \begin{cases} \sum A_j u^{\alpha_j} e^{-\alpha_j z_1 + (\alpha_j - 1)z_2} & e^{z_2-z_1}u < u^* \\ c_1 u e^{-z_1} - c_2 e^{-z_2} & e^{z_2-z_1}u \geq u^* \end{cases}$$

で、

$$\int_0^\infty \int_0^{x+\log(u^*/u)} e^{-sx-ty} f(x,y;\theta)dxdy = \psi(s,t;\theta) - \int_0^\infty \int_{x+\log(u^*/u)}^\infty e^{-sx-ty} f(x,y;\theta)dxdy$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{x+\log(u^*/u)}^\infty e^{-sx-ty} f(x,y;\theta)dxdy &= \frac{\theta_1(\theta_2+\theta_3)}{\theta_2+\theta_3+t}\frac{1}{\theta_1+\theta_2+\theta_3+s+t}\left(\frac{u^*}{u}\right)^{-(\theta_2+\theta_3+t)} \\ &= g_2(s,t;\ \theta)\end{aligned}$$

となるので、

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{Z_2} W\left(\frac{Z_2}{Z_1}u\right)\right] = \sum A_j u^{\alpha_j}[\psi(\alpha_j,1-\alpha_j;\eta) - g_2(\alpha_j,1-\alpha_j;\eta)] + c_1 u g_2(1,0;\eta) - c_2 g_2(0,1;\eta)$$

となる。

付録 B

本文の係数 A_j と最適な参入水準 u^* を求めるための式は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \frac{1}{\zeta_1+\zeta_3-\alpha_1} & \frac{1}{\zeta_1+\zeta_3-\alpha_2} & \frac{1}{\zeta_1+\zeta_3-\alpha_3} & \frac{1}{\zeta_1+\zeta_3-\alpha_4} \\ \frac{1}{\eta_2+\eta_3+1-\alpha_1} & \frac{1}{\eta_2+\eta_3+1-\alpha_2} & \frac{1}{\eta_2+\eta_3+1-\alpha_3} & \frac{1}{\eta_2+\eta_3+1-\alpha_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 u^{*\alpha_1} \\ A_2 u^{*\alpha_2} \\ A_3 u^{*\alpha_3} \\ -c_1 u^* \end{bmatrix}$$

$$= -c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_5 \\ \frac{1}{\zeta_1+\zeta_3-\alpha_5} \\ \frac{1}{\eta_2+\eta_3+1-\alpha_5} \end{bmatrix}$$

で、$\alpha_4 = 1$ で、$\alpha_5 = 0$ としたものである。左辺の正方行列の行列式は、各列と第 j 列の差を求めると

$$\frac{\prod_{i \neq j}(\alpha_i - \alpha_j)}{(\zeta_1 + \zeta_3 - \alpha_j)(\eta_2 + \eta_3 + 1 - \alpha_j)} D$$

という形になる。ここで D は元の行列式で第 1 行と第 j 列を除き、第 1 行の要素をすべて 1 とした行列式である。上の式の右辺の列ベクトルを左辺の正方行列の第 j 列と置き換えた行列の行列式は、上の結果で、α_j を α_5 に置き換えたものとなるので、

$$A_j u^{*\alpha_j} = -c_2 \frac{(\zeta_1 + \zeta_3 - \alpha_j)(\eta_2 + \eta_3 + 1 - \alpha_j)}{(\zeta_1 + \zeta_3 - \alpha_5)(\eta_2 + \eta_3 + 1 - \alpha_5)} \prod_{i \neq j} \frac{\alpha_i - \alpha_5}{\alpha_i - \alpha_j}$$

$$-c_1 u^* = -c_2 \frac{(\zeta_1 + \zeta_3 - \alpha_4)(\eta_2 + \eta_3 + 1 - \alpha_4)}{(\zeta_1 + \zeta_3 - \alpha_5)(\eta_2 + \eta_3 + 1 - \alpha_5)} \prod_{i=1}^{3} \frac{\alpha_i - \alpha_5}{\alpha_i - \alpha_4}$$

となる。$\alpha_4 = 1$ で $\alpha_5 = 0$ であることを考慮すると本文の結果が得られる。

付録 C

関数 $F(v)$ は、$-(\zeta_2+\zeta_3)+1$ と $-(\eta_1+\eta_3)$ の前後で、$-\infty$ から $+\infty$ に変わるので、$\zeta_2+\zeta_3-1 > \eta_1+\eta_3$ とすると、

$$\beta_3 < -(\zeta_2+\zeta_3) + 1 < \beta_2 < -(\eta_1+\eta_3) < \beta_1 < 0$$

となり、

$$-\beta_1 = b,\ \ \eta_1+\eta_3 = a,\ \ -\beta_2 = b',\ \ \zeta_2+\zeta_3 - 1 = a',\ \ -\beta_3 = b''$$

とすると、

$$0 < b < a < b' < a' < b''$$

で、

$$B = \left(\frac{a}{b}\frac{b+1}{a+1}\right)\left(\frac{a'}{b'}\frac{b'+1}{a'+1}\right)\frac{\beta_3 - 1}{\beta_3} = \left(\frac{a}{b'}\frac{b'+1}{a+1}\right)\left(\frac{a'}{b''}\frac{b''+1}{a'+1}\right)\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1}$$

となる。最初の式の括弧のなかはいずれも 1 以上で、後の式の括弧の中はいずれも 1 以下であるから、本文の不等式が成り立つ。$\zeta_2+\zeta_3-1 < \eta_2+\eta_3$ の場合も同様にして、本文の不等式が成り立つことが確認される。

A Real Option Model under a Bivariate Jump-Diffusion Process

Yoshio Iihara

In this paper, we propose a two-dimensional real option model with jumps. In most literature on real options, while the cash flows from a project are considered as a stochastic process, the investment costs of a project are treated as a deterministic value. In the real world, however, investment costs are also uncertain in many cases. In addition, jumps in revenues and costs are often observed. Here, we use a bivariate jump-diffusion process to model revenues and investment costs (or continuous cash outflows). Moreover, changes in revenues and costs are correlated for various economic reasons. For this purpose, Marshal and Olkin's bivariate exponential distribution is employed to model the size of jumps. An explicit value function and optimal investment timing are obtained. We also explain the meaning of optimal investment timing by comparing it to one in a deterministic case, and examine the effects of volatilities on optimal investment timing.