全ひずみ理論及びひずみ増分理論によるＪ積分の比較

林　健治*・堀川浩甫**・笹戸松二*

A Comparison of J-integrals based on Deformation and Incremental Plasticity Theory

Kenji HAYASHI, Kohsuke HORIKAWA and Matsuji SASADO

In this paper, firstly the elasto-plastic finite element analyses of a center cracked plate are performed based on deformation and incremental plasticity theory to investigate the difference between solutions obtained through both thetry and some factors determining the path independence of J-integral, and loading condition of an element in the vicinity of crack tip are examined. Secondly, the analysis of a longitudinal bead-welded joint with a center crack is conducted based on incremental theory to discuss the path independence of J-integral and loading condition of elements on phase boundary.

Key words：J-integral/deformation theory/incremental theory/plasticity/welded joint/plane strain/plane stress

1. 緒　言

弾塑性状態における鋼素材や部材の破壊発生条件を規定する指標として用いられているＪ積分は，今日では，任意の構成則に従う物体に対して，及び，慣性力や熱ひずみが存在する場合に対しても適用できるように拡張[1]され，また，Ｊ積分以外の径路不変積分の存在[2]も示されているので，その汎用性は非常に広範なものとなっている．

Ｊ積分は，解析的には有限要素法による径路積分から精度の良い値を得ることができる．しかしながら，データの蓄積が多いRice[3]によって定義されたＪ積分の特徴であり，また，利点でもある積分径路独立性は，厳密には均質な線形弾性体及び除荷を含まない全ひずみ理論に従う弾塑性体にのみ保証されているにすぎない．それゆえ，鋼素材や部材の塑性変形能力をより良く反映していると考えられるひずみ増分理論に従う弾塑性体に対しても径路独立性が成立するか否かは，各々の問題に応じて検討するか，または，上記の拡張されたＪ積分を適用しなければならない．

以上の観点から，単調増加荷重下における中央切欠き材を対象として，全ひずみ理論とひずみ増分理論による有限要素解析の結果の差異を検討した研究[4),5)]はかなり見られるものの，ひずみ増分理論によるＪ積分の径路独立性に及ぼす鋼種と応力状態の影響などを詳細に調べた研究はあまり見受けられない．また，従来，構成則の違いにより解析結果にどの様な影響を与えるかについて検討された全ひずみ理論は近似理論[6)]であり，厳密な全ひずみ理論とひずみ増分理論に基づく増分形構成式による解の比較を行なった例は非常に少ない[7)]．更に，溶接継手の様な非均質材にＪ積分を適用した場合，ひずみ増分理論による解の妥当性が成立するか検討する必要があろう．

本研究では，全ひずみ理論とひずみ増分理論に基づく厳密な増分形構成式による有限要素解析を実施し，Ｊ積分の評価にひずみ増分理論を適用した場合の問題点と，全ひずみ理論による解との差異に及ぼす鋼種及び応力状態の影響を明らかにする．また，溶接継手に対してひずみ増分理論によるＪ積分解析を行なうことの妥当性について検討する．

2. 増分形構成則とＪ積分解析

2.1 全ひずみ理論とひずみ増分理論

Ｊ積分の解析において，全ひずみ理論に基づく有限要素解とひずみ増分理論に基づく有限要素解との差異を明

原稿受付：昭和61年3月31日
* 長岡技術科学大学建設系
** 大阪大学溶接工学研究所

らかにするには，両理論共に通常の弾塑性有限要素プログラムを用いて，要素分割及び荷重増分量等をすべて同一レベルで解析を行なう必要がある．それゆえ，全ひずみ理論の構成則を増分形式化しなければならない．それにより，一般に多用されている増分理論に基づく有限要素プログラムを用いて，全ひずみ理論に基づく解析を実施することができる．この様な観点から，山田ら[7]は，次の全ひずみ理論の増分形応力—ひずみ方程式を導出した．

$$d\sigma_{ij}=\frac{2G}{1+2G\phi}[d\varepsilon_{ij}+\frac{3\nu+2G(1+\nu)\phi}{3(1-2\nu)}\delta_{ij}d\varepsilon_{ii}-\frac{3(1-2/3H'\phi)\sigma_{ij}'\sigma_{kl}'}{2\{1+H'/(3G)\}\bar{\sigma}}d\varepsilon_{kl}] \quad (1)$$

ここに，$d\sigma_{ij}$，$d\varepsilon_{ij}$ はそれぞれ応力増分テンソル及びひずみ増分テンソルを表わし，G はせん断弾性係数，ν はポアソン比，δ_{ij} はクロネッカーのデルタ，σ_{ij}' は偏差応力テンソル，$\bar{\sigma}$ は相当応力を表わす．また，ひずみ硬化率を表わす H' と ϕ は相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}_p$ とその増分量 $d\bar{\varepsilon}_p$ を用いてそれぞれ次式で定義される．

$$H'=d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon}_p,\quad \phi=3\bar{\varepsilon}_p/(2\bar{\sigma}) \quad (2)$$

式（1）は Hencky 方程式の厳密な増分形表示であるが，一般にはよく右辺の大括弧内の第三項を無視した次の近似式が用いられている[6]．

$$d\sigma_{ij}=\frac{2G}{1+2G\phi}[d\varepsilon_{ij}+\frac{3\nu+2G(1+\nu)\phi}{3(1-2\nu)}\delta_{ij}d\varepsilon_{ii}] \quad (3)$$

但し，上式の ϕ には式（2）の ϕ を $3d\bar{\varepsilon}_p/(2d\bar{\sigma})$ で置き換えた値を用いている．

一方，Reuss の方程式に基づくひずみ増分理論の構成式は次式で与えられる．

$$d\sigma_{ij}=2G[d\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}d\varepsilon_{ii}-\frac{3\sigma_{ij}'\sigma_{kl}'}{2\{1+H'/(3G)\}\bar{\sigma}^2}\cdot d\varepsilon_{kl}] \quad (4)$$

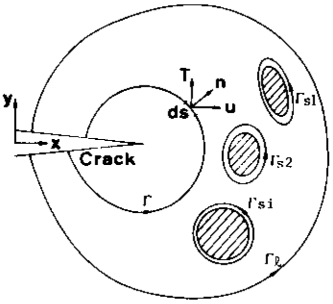

Fig. 1　Definition of J-integral.

式（1）と式（4）を比較すると明らかな様に，通常のひずみ増分理論に基づく弾塑性有限要素プログラムにおいて用いられている式（4）を式（1）に変更するだけで全ひずみ理論による解を得ることができる．また，逆に，その様な全ひずみ理論に基づく弾塑性有限要素プログラムを作成すれば，式（1）の ϕ を零と置くことにより通常のひずみ増分理論による解を得ることができる．

2.2　J 積分評価法

Rice によって定義された J 積分[3]は，均質な線形弾性体及び除荷を含まない全ひずみ理論に従う弾塑性体に対して次式で与えられる．

$$J=\int_\Gamma[wdy-T_i(\partial u_i/\partial x)ds] \quad (5)$$

ここに，W はひずみエネルギ密度で，応力テンソル σ_{ij} と

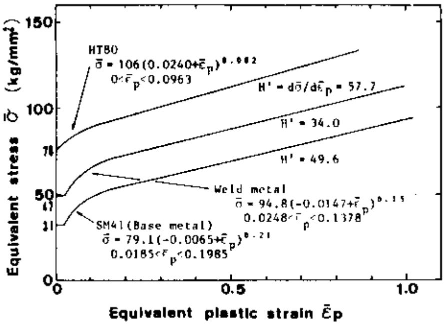

Fig. 2　Equivalent stress-equivalent plastic strain curves.

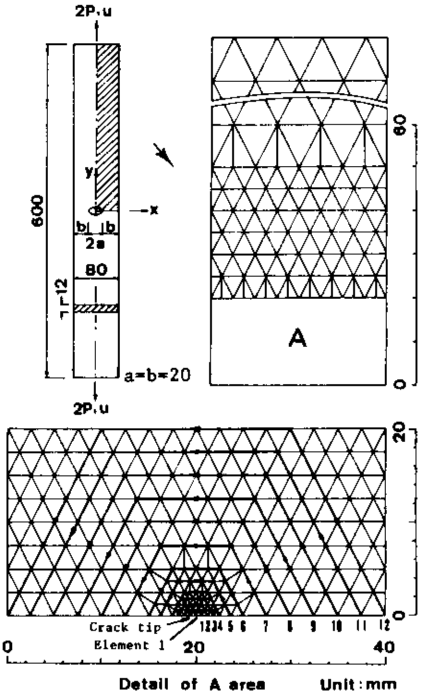

Fig.3　Mesh division and path number for a center-cracked plate.

ひずみテンソル ε_{ij} を用いて次式で表わされる。

$$W=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \tag{6}$$

また，$T_i=\sigma_{ij}\cdot n_j$ 及び u_i は Fig. 1 に示す積分径路 Γ 上の表面力ベクトル及び変位ベクトルの成分であり，ds は Γ 上の線素，n_iはΓの外向き単位法線ベクトルの成分である。

次に，溶接継手の様な非均質材のＪ積分は Chen[8]によって定義され，次式で与えられる。

$$J=J_{\Gamma}=J_{\Gamma l}-\sum_{i=1}^{n}J_{\Gamma si} \tag{7}$$

ここに，J_{Γ}，$J_{\Gamma l}$，$J_{\Gamma si}$は Fig. 1 に示す様にそれぞれ径路 Γ，Γl，Γsi で定義される径路積分である。

J_{Γ}はき裂を進展させる力であるので，$J_{\Gamma l}$はき裂及び母材とは異なる材料を移動させる力となっている。それゆえ，$J_{\Gamma l}$から異種材料のみを移動させる力$J_{\Gamma si}$を取り除けば，き裂を進展させる力J_{Γ}のみを評価することができる。また，式（7）から明らかな様に，特別な工夫を施すことなく，通常の Rice のＪ積分算定プログラムを用いて，値を求めることができる。

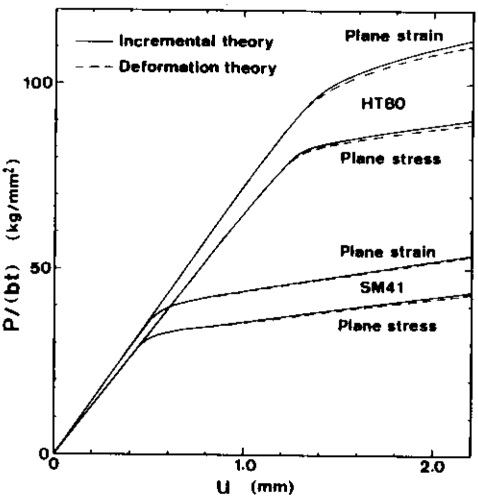

Fig. 4 Load-deformation relations under plane stress and plane strain obtained by incremental and deformation theory.

3. 数値計算例

3.1 均質な中央切欠き材

(1)解析方法

全ひずみ理論とひずみ増分理論による解の差異を調べるために，平面ひずみ及び平面応力条件下で一様引張応力を受ける均質な中央切欠き材の弾塑性解析を両理論に基づく有限要素法により行なった。

中央切欠き材の寸法は長さ 600 mm，幅 80 mm，板厚 12 mm で，切欠き長さを 40 mm とした。材料には HT80 と SM41 の２種類を想定して，材料定数はヤング率を 21000 kg/mm²，ポアソン比を 0.3 とし，相当応力一相当塑性ひずみ曲線には Fig. 2 に示す関係を用いた。解析は Fig. 3 に示すように対称性を考慮して 1/4 を分割し，要素数 696，節点数 403 とし，要素の最小寸法は板幅の 1/80 とした。積分径路は切欠きを挟む 12 通りとし，Ｊ積分の計算は要素境界上で行ない，応力とひずみは相対する両要素の面積に関する重み付き平均を用いた。

(2) 荷重と荷重載荷辺の変位

全ひずみ理論とひずみ増分理論に基づく有限要素法を用いて平面ひずみ状態及び平面応力状態における荷重と荷重載荷辺の変位の関係を求めた結果を Fig. 4 に示す。ひずみ増分理論による荷重の値がすべての場合について全ひずみ理論による荷重値より若干高めになっているほかは，鋼種及び応力状態によらず，両理論による計算結果は非常に良い一致を示す。従って，両理論により中央切欠き材の破壊強度及び全体的な変形挙動を推定した場合，その結果の有意差は殆どないものと思われる。

(3) Ｊ積分の径路独立性

平面ひずみ状態及び平面応力状態におけるＪ積分の径路独立性を調べたものが Fig. 5, Fig.6 であり，各荷重段階（材料の降伏応力σ_Y に対するネット応力σ_N の比$\alpha=\sigma_N/\sigma_Y$)におけるＪ積分の径路によるばらつきの有無を示す。

平面ひずみ状態において，HT80 では高負荷段階になるに従って両理論によるＪ値の有意差が認められるが，径路によるばらつきの傾向は同じであり，SM41 では高負荷段階においても両理論から得られるＪ値に差異が認められない。また，HT80, SM41 共に径路番号４，６において他の径路による値よりもかなり大きな値となっている。これは，径路４，６では径路上に面積の大きさが異なる要素を含むため，これら要素間で応力とひずみが不連続となり，解の精度が悪化したことによる。それゆえ，平面ひずみ場においては径路の取り方に十分な注意を払わねばならない。

平面ひずみ状態と同様に平面応力状態においても HT80 では，径路によるばらつきの程度は両理論共にほぼ同じであるが，Ｊ値は荷重の増加と共に両理論により差異を生ずる。一方，SM41 では高負荷段階でも径路のばらつきと両理論によるＪ値の有意差が認められない。しかしながら，SM41 では，高負荷段階になるにつれて切欠き先端のひずみ集中により切欠き先端近傍の径路の値が

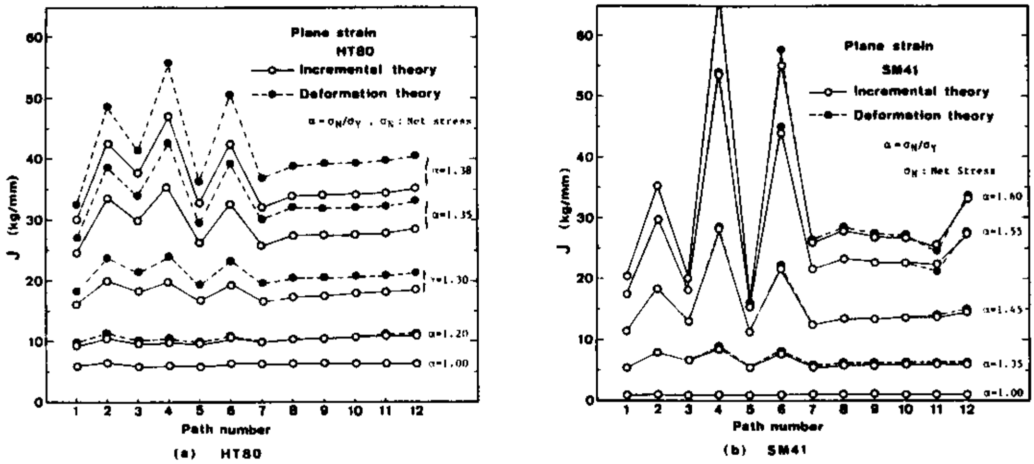

Fig.5 Path indepedendence of J-integral under plane strain.

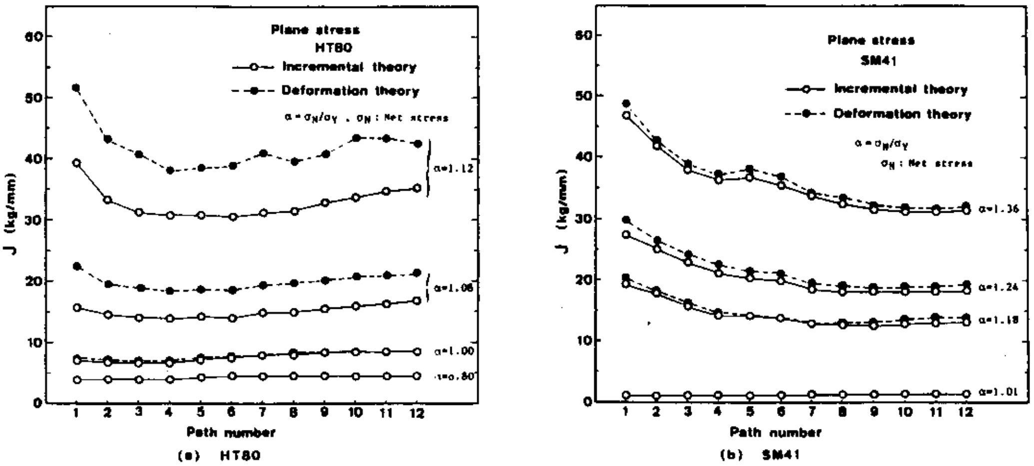

Fig. 6 Path independence of J-integral under plane stress.

高くなっている．なお，平面応力場では，平面ひずみ場より径路上の要素の大きさがＪ値に及ぼす影響は小さく，径路の取り方を比較的任意に決定することができる．

以上より，平面ひずみ場及び平面応力場共にひずみ増分理論によってＪ積分の値を算定しても，全ひずみ理論による場合と同様に径路独立性が認められた．しかし，同一の荷重段階でも高負荷段階になるに従い HT80 のような高張力鋼では，両理論によるＪ値に大きな差を生じ，ひずみ増分理論によるＪ値は若干低めの値を与えることに注意を要する．

(4) Ｊと荷重載荷辺変位

Fig. 7, Fig. 8 に平面ひずみ状態及び平面応力状態におけるＪと荷重載荷辺変位ｕの関係を示す．HT80, SM41 共に応力状態によらず両理論により得られたＪとｕの関係は良好に一致している．それゆえ，Ｊ値を算定する場合，ひずみ増分理論を使用しても実使上十分な精度の解を得ることができる．

なお，Fig. 8 に従来使用されている全ひずみ理論の近似式により得られたＪとｕの関係も併せて示すが，厳密式による計算結果と比較して最大でも５％程の誤差しかなく，近似式によりＪ値を算定しても工学的には十分な精度を有する．

(5) Ｊとネット応力の関係

Fig. 9 に平面ひずみ状態及び平面応力状態におけるＪとネット応力の関係を示す．HT80 では，平面ひずみ状態及び平面応力状態共にネット応力比 σ_N/σ_Y が 1.0 を越えると（特に，ネット断面全面降伏以降）両理論から得られるＪ値に大きな差異を生じ，同一のＪ値に対してひ

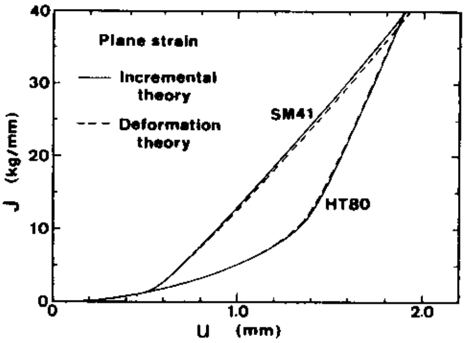

Fig. 7　J-deformation relations under plane strain.

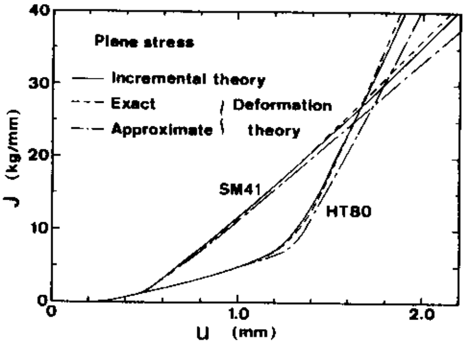

Fig. 8　J-deformation relations under plane stress.

ずみ増分理論により算定されたネット応力は若干高めの値となる．一方，SM41 では，応力状態によらず両理論の計算結果は非常に良く一致している．

よって，切欠き材の破壊応力を推定する場合，同一の J に対して両理論の値は HT80 のような加工硬化指数の

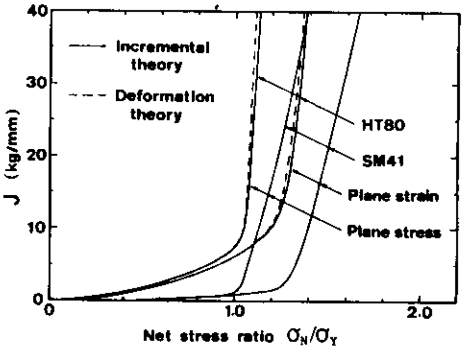

Fig.9　J-net stress relations under plane stress and plane strain.

小さい材料では若干の差異はあるもののほぼ同程度と見なして差し支えない．

(6)　き裂先端近傍の負荷状態

き裂先端近傍の要素の負荷状態が，主応力方向が固定で応力が比例的に増加する比例負荷に近い場合には，ひずみ増分理論から得られた解は近似的に全ひずみ理論から得られた解に等しくなるはずである．

全ひずみ理論では，塑性ひずみ$\varepsilon_{ij}{}^p$と偏差応力σ_{ij}'との間には式（2）のϕを用いて

$$\varepsilon_{ij}{}^p = \phi\sigma_{ij}' \tag{8}$$

なる関係が成り立つ．それゆえ，

$$\phi_x \equiv \varepsilon_x{}^p/\sigma_x',\ \phi_y \equiv \varepsilon_y{}^p/\sigma_y',\ \phi_{xy} \equiv \gamma_{xy}{}^p/(2\tau_{xy}) \tag{9}$$

と置いた場合,それらが元のϕと一致しなければならない[7]．

以上の関係を調べたものが Table 1 である．平面応力状態におけるき裂先端の要素 1（Fig. 3 参照）の値をまとめたものであり，SM41 については両理論による値を，HT80 についてはひずみ増分理論による値を取り挙げて

Table 1　Loading conditions of an element at crack tip

	α	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_{xy}	ϕ
Deformation theory SM41	0.90	4.93E-4(26.5)	6.68E-4(0.5)	6.92E-4(3.2)	6.71E-4
	1.00	7.65E-4(17.8)	9.26E-4(0.5)	9.46E-4(1.6)	9.31E-4
	1.10	2.41E-3(7.9)	2.61E-3(0.2)	2.35E-3(10.0)	2.61E-3
	1.20	4.91E-3(3.9)	4.74E-3(0.4)	4.38E-3(7.3)	4.72E-3
	1.30	6.90E-3(11.1)	6.39E-3(0.5)	6.03E-3(5.1)	6.36E-3
Incremental theory SM41	0.90	1.19E-4(81.7)	6.23E-4(4.4)	7.98E-4(22.4)	6.52E-4
	1.00	3.24E-4(64.7)	8.79E-4(4.0)	8.64E-4(5.8)	9.16E-4
	1.10	2.99E-3(13.2)	2.67E-3(1.3)	1.93E-3(26.8)	2.64E-3
	1.20	1.40E-2(>200)	4.84E-3(4.8)	3.39E-3(26.5)	4.62E-3
	1.30	3.28E-2(>400)	6.32E-3(4.2)	5.29E-3(12.7)	6.06E-3
Incremental theory HT80	0.91	3.56E-5(93.4)	5.14E-4(4.9)	6.21E-4(14.9)	5.41E-4
	0.99	1.52E-4(78.1)	6.58E-4(5.1)	7.79E-4(12.4)	6.93E-4
	1.07	5.09E-4(55.0)	1.08E-3(4.3)	1.17E-3(3.2)	1.13E-3
	1.14	2.83E-3(18.9)	3.43E-3(1.7)	4.36E-3(24.8)	3.49E-3

Remark ; $\alpha = \sigma_N/\sigma_Y$, σ_N : Net stress, σ_Y : Yeild stress
( ): $|\phi_{ij} - \phi| / \phi \times 100$

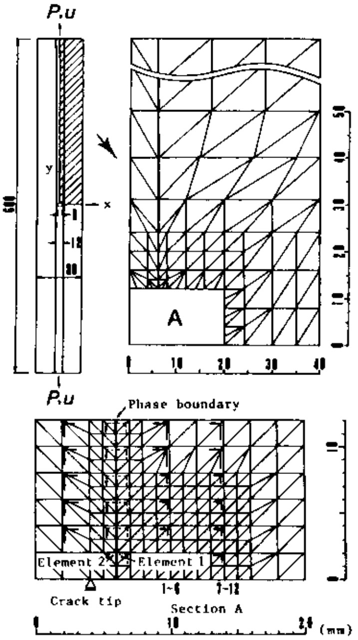

Fig.10 Mesh division and path number for a canter-cracked plate with a longitudinal bead welded.

Table 2 Loading conditions of elements on phase boundary

	α	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_{xy}	ϕ
Element 1	0.99	8.52E-6(1.1)	8.42E-6(0.0)	8.65E-6(2.6)	8.43E-6
	1.14	9.15E-4(1.2)	9.28E-4(0.2)	1.01E-3(9.0)	9.26E-4
	1.23	1.49E-3(9.0)	1.37E-3(0.2)	1.84E-3(34.0)	1.37E-3
	1.33	1.84E-3(0.0)	1.84E-3(0.0)	1.98E-3(7.4)	1.84E-3
	1.42	2.33E-3(0.0)	2.33E-3(0.0)	2.49E-3(6.7)	2.33E-3
Element 2	0.99	4.91E-5(5.9)	5.26E-5(0.7)	3.40E-5(34.9)	5.23E-5
	1.14	1.44E-3(5.6)	1.35E-3(0.8)	1.28E-3(5.9)	1.36E-3
	1.23	2.36E-3(18.7)	1.95E-3(1.6)	3.18E-3(60.0)	1.98E-3
	1.33	2.69E-3(3.1)	2.59E-3(0.6)	3.21E-3(23.0)	2.61E-3
	1.42	3.27E-3(0.6)	3.24E-3(0.4)	4.67E-3(43.7)	3.25E-3

Remark ; $\alpha = \sigma_N / \sigma_Y$, σ_N : Net stress, σ_Y : Yeild stress of base metal
( ): $| \phi_{ij} - \phi | / \phi \times 100$

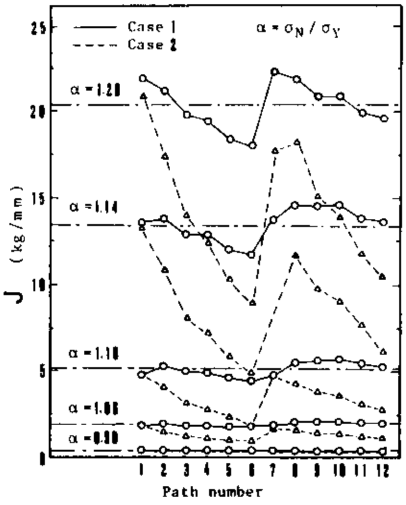

Fig.11 Path independence of J-integral of welded joint with a center crack.

いる．

全ひずみ理論による SM41 の値では，ϕ に対してき裂直角方向の成分 ϕ_yが 1 %未満，き裂方向の成分 ϕ_xが 27 %以下，せん断成分 ϕ_{xy}が 10 %程度の誤差を有し，数値計算上の誤差がこの程度は混入するものと考えられる．そのひずみ増分理論による値では ϕ_yが 5 %未満，ϕ_{xy}が 27 %以下，ϕ_xが非常に大きな誤差を有し，ϕ_yはほぼ比例負荷を満足していると考えられるが，特に，ϕ_xは比例負荷を満足しない．同様に，ひずみ増分理論による HT80 の場合でも，ϕ_yはほぼ比例負荷を満足し，ϕ_xはそれを満足しない．

き裂先端近傍では 2 軸応力状態と考えられるが，その近傍以外ではき裂直角方向 (y 方向) の成分が卓越する 1 軸応力状態と考えられること，及び，き裂先端近傍でも y 方向の応力とひずみに比してき裂方向 (x 方向) の応力とひずみが小さいことなどから，ひずみ増分理論から得られた解は，き裂先端近傍でもほぼ比例負荷を満足しているものと考えて差し支えない．

3.2　縦ビードを有する中央切欠き材

(1)　解析方法

解析対称として Fig. 10 に示す様な長さ 600 mm，板幅 12 mm，ビード幅 12 mm，切欠き長さ 8 mm の寸法の縦ビードを有する中央切欠き材を考え，この 3 相材について平面応力条件下で一様引張応力を受ける場合の弾塑性解析をひずみ増分理論による有限要素法により実施した．

解析に使用した母材 (SM41) と溶接金属の相当応力ー相当塑性ひずみ曲線は Fig. 2 の関係を用い，他の材料定数は 3.1 節の場合と同様とした．解析は対称性を考慮して供試体の 1/4 を分割し，要素数 622，節点数 358，要素の最小寸法は板幅の 1/80 とした．

積分径路は 12 通りの径路を取り，式 (7) の線積分を実施した場合を Case 1，式 (5) の線積分を実施した場合を Casc 2 とした．

(2)　J 積分の径路独立性

Fig. 11 に各荷重段階における径路ごとの J のばらつきを示す．Case 1 は高負荷段階になるにつれて径路ごとのばらつきが見られるが，それは比較的に小さく，ほぼ

径路独立性を満足し，それらの平均値は妥当な値を与えるものと考えて差し支えない．一方，Case 2 では高負荷段階になるにつれて径路ごとのばらつきは無視できないほど大きくなり，その値は径路に依存する．

以上より，ひずみ増分理論によるＪ積分解析に式(７)を適用した場合，Ｊ積分の径路独立性は満足されるが，Rice の評価式（５）を適用すると，その径路独立性は満足されない．

(3) 相境界上の負荷状態

Table 2 にき裂先端に近い相境界上の母材(Element 1 Fig. 10 参照) と溶接金属 (Element 2) の負荷状態を調べた結果を示す．ϕ に対して共に ϕ_yは２％以下の誤差と非常に小さく，また，ϕ_x，ϕ_{xy}の誤差も 3.1(6)項の均質材のき裂先端の要素と比較して小さく，ほぼ比例負荷の条件を満足しているものと考えられる．それゆえ，ここではひずみ増分理論による計算結果のみを示したが，全ひずみ理論による計算結果とほぼ一致しているものと考えて差し支えない．

非均質な線形弾性体及び除荷を含まない全ひずみ理論に従う弾塑性体について，式（７）は Gauss の積分定理を用いて簡単にその径路独立性を証明することができる．従って，上述の結果から，ひずみ増分理論により計算された式（７）のＪ積分の径路独立性は成立するものと予想でき，この予想は（２）項で妥当なものであることが示されている．

4. 結　　言

本研究では，中央切欠き材を対象として，全ひずみ理論とひずみ増分理論に基づく増分形構成式による弾塑性有限要素解析を実施し，両理論による解の差異，Ｊ積分の径路独立性に及ぼす構成式，応力状態と鋼種の影響，及び，き裂先端近傍の要素の負荷状態について検討を行なった．また，縦ビードを有する中央切欠き材を対象として，溶接継手のひずみ増分理論による弾塑性有限要素解析を実施し，相境界上の要素の負荷状態及びＪ積分の径路独立性について考察した．その結果を要約すると次の通りである．

(1)全ひずみ理論の厳密な増分形構成式を用いて弾塑性有限要素解析を行ない，ひずみ増分理論の解と比較した場合，本計算の範囲内では両者は非常に良く一致し，どの理論を用いて部材の破壊強度及び全体的な変形挙動を推定しても結果の有意差は殆どない．

(2)応力状態に因らず全ひずみ理論及びひずみ増分理論により求められたＪ積分は径路独立性が成立し，かつ両者の値は非常に良く一致している．しかし，高強度鋼ではＪ積分値から破壊応力を推定する場合，ひずみ増分理論により評価された値は若干高めの値を与えることに注意を要する．

(3)き裂先端近傍の要素の負荷状態は，全ひずみ理論はもとより，ひずみ増分理論により得られた結果からもほぼ比例負荷を満足する．しかし，ひずみ増分理論による解では，き裂方向の応力とひずみの間に比例負荷の関係は成立せず，誤差の大きな因子となっている．

(4)相境界を有する溶接継手に Rice のＪ積分を適用すると，その径路独立性は成立しない．この場合，相境界の寄与を取り除いたＪ値を算定すれば，その径路独立性は成立する．また，相境界上の要素の負荷状態はほぼ比例負荷の状態と考えて差し支えない．

本研究は，中央切欠き材を対象として解析を行なったが，CT 試験片の場合についても以上述べた結果と同様な結果を得ている．均質材及び幾何形状が対象な溶接継手では，両理論から得られた結果に有意差は殆どない．しかしながら，幾何形状が非対称な溶接継手の場合には今回の計算結果とは異なることも考えられるので，今後の課題としたい．

最後に，本研究の数値計算にご協力頂いた長岡技術科学大学修士の川村裕雅(現在，㈱村本建設)，松本幸次(現在，㈱新井組)，内藤将史君に感謝致します．

参 考 文 献

1) 岸本喜久雄，青木繁，坂田勝；き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータについて，機械学会論文集，Vol. 46, No. 410 (1980), p. 1049
2) 大路清嗣，久保司郎；Ｊ積分の拡張に関する一考察，機械学会論文集，Vol, 44, No. 385 (1978), p. 2929
3) Rice, J. R.; A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. Appl. Mech., Vol. 35 (1968), p. 379
4) Hayes, D. J. and C. E. Turner ; An application of finite element techniques to post-yield analysis of proposed standard three-point bend fracture test pieces, Int. Journ. of Fracture, Vol. 10 (1974), p. 17
5) Wilson, W. K. ; A comparison of finite element solutions for an elastic-plastic crack problem, Vol. 14 (1978), p. R95
6) 白鳥正樹，三好俊郎；有限要素法によるき裂材の非線形解析，機械学会論文集，Vol. 42, No. 358 (1976), p. 1633
7) 山田嘉昭，黄佑民，西口磯春；全ひずみ理論構成方程式の増分形式化とその有限要素解析への応力，生産研究，Vol.32 (1980), No. 3, p. 190, No. 6, p. 282
8) Chen, W. H.; On the J-integral for nonhomogenous cracked composites, Trans. 5th Int. Conf. SMIRT Vol. M (1979), p. 1