

河口二層流の一次元非定常解析法に関する研究

福嶋 祐介*・伴 享**

Study on One-Dimensional Analysis of Two Layer Flow near River Mouth

Yusuke FUKUSHIMA and Susumu BAN

A new method of numerical analysis on the unsteady two-layer flow is developed. The fundamental equations are the continuity equation of water, the diffusion equation of salinity, and the momentum equations in the flow direction and in its perpendicular direction. A set of one dimensional differential equations are derived from the layer integrals of equations. These terms are taken into consideration: the entrainment of water from the lower layer, the additional stress due to the water entrainment, and the interfacial turbulent mixing. The four point implicit method is adopted to discretize the equations. This scheme is numerically stable. The numerical results are compared with the experimental data and the field data of Sinano River. When the coefficient of interfacial stress is chosen as an adjustment parameter, the agreement between the numerical results and both the experimental and field data is quite satisfying.

Key words: two-layer flow/density current/numerical method/turbulent mixing

1. 序 論

河口では海水と河川水とが交わり、その流動形態・混合形態による、強混合、弱混合、緩混合となることが知られている。このうち、弱混合あるいは緩混合型の流れでは、河川水はこれより重い海水の上を流れ、塩水くさびを形成する。このような流れの特性を把握することは、水質、環境、生態系の問題を考える上で重要である。また、河口部では一般に潮汐の作用により、水位が変化するので非定常の二層流の解析手法を構築する必要がある。

これまで開水路の一次元不定流解析には多くの研究の蓄積がある。Amein and Fang¹⁾ は、一次元の不定流に対し4点陰式差分法を導入して解析を行った。Price²⁾ は、単純な条件に対する4点陰式差分法の収束性に関して議論を行った。また、中村・福嶋³⁾⁴⁾ は4点陰式差分法を段波、複断面開水路流に対して適用し、その収束性について議論している。

定常な塩水くさびについてもまた多くの研究がある。金子⁵⁾ は、様々な規模の二層流のデータを集積し、

界面抵抗係数の実験公式を求めた。福岡ら⁶⁾ は、貯水池上流端で形成される下層流に対して二層流解析を行い、解析法の妥当性を確かめている。また、福岡ら⁷⁾ は、河口付近の二層流の流動特性を詳細に調べ、水路幅が水深に比して小さい場合、上層流が急変流となり、河道内でも密度フルード数が1より大きくなる場合があることを示し、このことを考慮した二層流解析法を提案した。由良⁸⁾ は定常な塩水くさびの二層流解析を行い、金子⁵⁾ の式の妥当性を示している。以上のように、定常な塩水くさびの二層流解析はこれまでに技術的には確立されたと言ってよい。

これに対し、非定常の二層流解析を行った研究は須賀¹⁰⁾、室田¹¹⁾ によるものがあるだけである。須賀は非定常二層流解析を行うにあたって、陰式差分法を用いた反復法を採用している。この解析によると計算結果は時間的、空間的差分間隔によって大きく変化するものとなっている。従って数値的により安定した解析法が必要である。

本研究では、河口二層流の非定常解析手法の開発を行うことを目的とする。二層流の支配方程式を求めると、微分方程式を厳密に層積分して流下方向の一次元方程式を解く。この過程で、下層から上層への連行量、連行に伴う付加的応力、界面での乱流混合などが

原稿受付：平成2年5月22日

*長岡技術科学大学建設系

**佐藤工業㈱

求められる。方程式の離散化手法として、開水路流の不定流解析に用いられた4点陰式差分法を採用し、二次元二層流の非定常解析手法を開発する。この方法を信濃川での測定結果と比較し、本解析手法の妥当性を検討する。

3. 基礎方程式

図1に示すような塩水くさびが河川内を遡上している場合を考える。底面に沿って流下方向にx軸をとり、これと直交・上向きにz座標をとる。それぞれの流速成分をu, wとする。流れは二次元であり、十分に発達した乱流であると考えられる。また、z方向の変化に比べてx方向の変化は十分に小さく境界層近似が成立する。上層の密度を ρ_1 、下層の密度を ρ_2 、基準点(あるいは淡水)の密度を ρ_0 とする。基準点と上・下層との密度差の原因は塩分濃度cであるものとする。上下層の密度差は十分小さくブーンネスク近似が成立するものとする。このとき、流れの連続式、塩分濃度の拡散方程式、x方向の運動方程式、z方向の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uc + \frac{\partial}{\partial z} wc = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial z} uw \\ & = \frac{\rho}{\rho_0} g \sin \theta - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

ここで、tは時間、 K_z はz方向の渦拡散係数、gは重力加速度、 θ は水路の傾斜角、pは圧力、 τ はせん断応力である。

式(3)の圧力項を求めるため、密度はそれぞれの層で

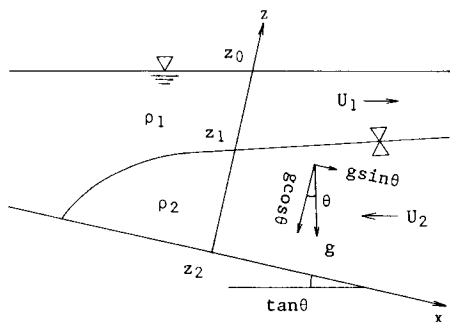


Fig. 1 Definition sketch of two-layer flow

一定になるものとし次のように表す。

$$z_1 < z \leq z_0 \quad \rho = \rho_1 \quad (5a)$$

$$z_2 \leq z \leq z_1 \quad \rho = \rho_2 \quad (5b)$$

ここで、 z_0 , z_1 , z_2 はそれぞれ、水面、密度界面、水路の底面を表す。式(5)を式(4)に代入し、水面で圧力が零の境界条件を用い整理すると次式を得る。

$$p = \rho_1 g \cos \theta (z_0 - z) \quad z_1 < z \leq z_0 \quad (6a)$$

$$p = \rho_1 g \cos \theta (z_0 - z) + \Delta \rho (z_1 - z) \quad z_2 \leq z \leq z_1 \quad (6b)$$

ここで、 ρ_1 , ρ_2 は、それぞれ、上・下層の密度であり、 $\Delta \rho$ は上層と下層の密度差であって、塩分濃度と次の関係にある。

$$\rho_1 = \rho_0 (1 + RC_1) \quad (7a)$$

$$\rho_2 = \rho_0 (1 + RC_2) \quad (7b)$$

$$\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1 = \rho_0 R (C_2 - C_1) \quad (7c)$$

ここで、 C_1 , C_2 はそれぞれ上層と下層の平均塩分濃度である。また、Rは相対密度差と塩分濃度の比例係数であり、一般に温度の関数である。

3. 二層流の層積分方程式

一般に微分方程式系(1)–(3)をそのまま解くことはかなり難しい。ここでは式(1)–(3)の層積分を行い、方程式を簡略化して解くことを考える。この方法は平板上の流れの積分方程式を用いて解くことと本質的に同じ解法であり、界面での連行・乱流混合、連行に伴う付加的応力などを合理的に評価できることが特徴である。

まず、x方向の運動方程式(3)を上層($z_1 \leq z \leq z_0$)にわたって層積分する。このとき、式(6)の関係をを用いる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1}^{z_0} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{z_0} u^2 dz \\ & = u_1 v_e + \frac{\rho_1}{\rho_0} g \sin \theta (z_0 - z_1) \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \\ & \quad - \frac{1}{\rho_0} g \cos \theta \left\{ \rho_1 (z_0 - z_1) \frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{1}{2} (z_1 - z_0) \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right\} \\ & \quad - \frac{1}{\rho_0} \tau_1 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 v_e は界面での連行速度であり、 u_1 は界面での流速を表し $u_1 v_e$ は連行に伴う付加的せん断応力を表している。また、 τ_1 は界面せん断応力である。同様に式(3)を下層($z_2 \leq z \leq z_1$)にわたって積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_2}^{z_1} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_2}^{z_1} u^2 dz \\ & = -u_1 v_e + \frac{\rho_2}{\rho_0} g \sin \theta (z_1 - z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\rho_0} g \cos \theta \left\{ \rho_1 (z_1 - z_2) \frac{\partial z_0}{\partial x} \left(z_0 z_1 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{2} z_1^2 \right) \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \Delta \rho z_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{1}{2} z_1^2 \Delta \rho \right\} \\
 & + \frac{1}{\rho_0} (\tau_1 - \tau_b) \quad (9)
 \end{aligned}$$

次に連続式(1)を上層と下層にわたって積分するとそれぞれ次の式(10)と式(11)を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} (z_0 - z_1) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{z_0} u dz = v_e \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (z_1 - z_2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_2}^{z_1} u dz = -v_e \quad (11)$$

次に塩分の拡散方程式(2)を上層と下層にわたって積分すると次の式(12)と式(13)を得る。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1}^{z_0} c dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{z_0} cu dz \\
 & = c_1 v_e - K_z \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=z_1} \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_2}^{z_1} c dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_2}^{z_1} cu dz \\
 & = -c_1 v_e + K_z \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=z_1} \quad (13)
 \end{aligned}$$

ここで式(12), (13)の右辺第一項は下層から上層への連行による濃度の移流を第二項は乱流拡散による上層と下層の塩分の混合を表している。

このように基礎方程式を層積分する方法によれば、従来概念的に導入されてきた、界面での連行、連行に伴う付加的応力、連行に伴う濃度の移流、乱流による上層と下層の混合などが合理的に表現し得る。これらの点がこの方法の長所である。

4. 二層流の一次元非定常方程式と構成関係式

3. で二層流の層積分方程式が得られたが、これらはそのままでは解くことができずさらにいくつかの仮定をおく必要がある。式(8)–(13)に現れた積分を層平均値を用いて次のように表す。

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_1}^{z_0} u dz = U_1 h_1 \quad \int_{z_2}^{z_1} u dz = U_2 h_2 \\
 & \int_{z_1}^{z_0} u^2 dz = \beta_1 U_1^2 h_1 \quad \int_{z_2}^{z_1} u^2 dz = \beta_2 U_2^2 h_2 \\
 & \int_{z_1}^{z_0} cu dz = C_1 U_1 h_1 \quad \int_{z_2}^{z_1} cu dz = C_2 U_2 h_2 \\
 & \int_{z_1}^{z_0} c dz = \gamma_1 C_1 h_1 \quad \int_{z_2}^{z_1} c dz = \gamma_2 C_2 h_2 \quad (14)
 \end{aligned}$$

ここで、 h_1 , h_2 はそれぞれ上層水深、下層水深であり

次のように定義される。

$$h_1 = z_0 - z_1 \quad h_2 = z_1 - z_0 \quad (15)$$

また、 U_1 , U_2 はそれぞれ上層と下層の平均流速であり、 β_1 , β_2 はそれぞれの運動量補正係数である。 γ_1 , γ_2 は上層と下層の濃度分布補正係数である。

また、式(12), (13)に現れた乱流拡散の項を次のように表す。

$$\begin{aligned}
 & -K_z \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = (C_2 - C_1) \frac{1}{\delta} \kappa u_{e*} \delta \\
 & = \kappa u_{e*} (C_2 - C_1) \quad (16)
 \end{aligned}$$

ここで、 δ は混合層の厚さを表すものとし、 u_e は界面での摩擦速度を表し、 κ は数値定数である。

式(14)–(16)を用いたとき式(8)–(13)は次のようになる。

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} U_1 h_1 = v_e \quad (17)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} U_2 h_2 = -v_e \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \gamma_1 C_1 h_1 + \frac{\partial}{\partial x} C_1 U_1 h_1 \\
 & = c_1 v_e + \kappa u_{e*} (C_2 - C_1) \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \gamma_2 C_2 h_2 + \frac{\partial}{\partial x} C_2 U_2 h_2 \\
 & = -c_1 v_e - \kappa u_{e*} (C_2 - C_1) \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} U_1 h_1 + \frac{\partial}{\partial x} \beta_1 U_1^2 h_1 = u_1 v_e + \frac{\rho_1}{\rho_0} g \sin \theta h_1 \\
 & - \frac{1}{\rho_0} g \cos \theta \left\{ \rho_1 h_1 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + h_2) + \frac{1}{2} h_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right\} \\
 & - \frac{1}{\rho_0} \tau_1 \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} U_2 h_2 + \frac{\partial}{\partial x} \beta_2 U_2^2 h_2 dz = -u_1 v_e + \frac{\rho_2}{\rho_0} g \sin \theta h_2 \\
 & - \frac{1}{\rho_0} g \cos \theta \left[\rho_1 h_2 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + h_2) + \Delta \rho h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \right. \\
 & \left. + \left\{ (h_1 + h_2) h_2 - \frac{1}{2} h_2^2 \right\} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta \rho \right] \\
 & + \frac{1}{\rho_0} (\tau_1 - \tau_b) \quad (22)
 \end{aligned}$$

底面摩擦係数を対数則から導かれる関係を用いて次のようにおく。

$$\frac{1}{\sqrt{f_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Ar - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{k_s} \right) \quad (23)$$

ここで、 k_s は相当粗度、 Ar は数値定数 (=8.5)、 κ はカルマン定数 (=0.4) である。界面摩擦係数としては、広い範囲で適合性が高いとされる金子⁵⁾の式を用い

る。

$$f_i = a(\text{Re } F_i)^{-0.5} \quad a=0.2 \quad (24)$$

ここで $\text{Re}(U_1 - U_2/h_1/\nu)$ はレイノルズ数, F_i は密度フルード数であり, 次式で定義される。

$$F_i^2 = \frac{|U_1 - U_2|^2}{\varepsilon g h_i} \quad (25)$$

このとき, 底面摩擦応力 τ_b , 界面摩擦応力 τ_i は次のように表される。

$$\tau_i = \rho_0 \frac{2}{2} f_i (U_1 - U_2) |U_1 - U_2| \quad (26)$$

$$\tau_b = \rho_0 \frac{1}{2} f_b U_2 |U_2| \quad (27)$$

連行速度については玉井⁹⁾の提案式に従い次式で表す。

$$v_e = E(|U_1| - |U_2|) \quad (28)$$

ここで, E は連行係数であり, 福岡ら⁶⁾の式を用いることにする。すなわち,

$$E = 0.0003 F_i^3 \quad (29)$$

である。

式(23)–(29)の構成関係式を用いることにより, 式(17)–(22)は閉じた系となり解ける形になった。

5. 塩水くさびの定常特性

非定常解析を行う前に式(17)–(22)の特性を調べるため, 時間的に変化のない定常状態の特性を調べることにする。

式(21), (22)の時間変化項を零とした定常解を求めると多少の演算の後次式を得る。

$$\frac{dg_1}{dx} = \frac{1}{\Phi_0} \{ -(1 + \varepsilon - \varepsilon F_{i2}^2) I_{t1} + I_{t2} - F_{i2}^2 \tan \theta \} \quad (30)$$

$$\frac{dh_2}{dx} = \frac{1}{\Phi_0} [I_{r1} - (1 - \varepsilon F_{i1}^2) I_{r2} - \{ 1 - (1 + \varepsilon) F_{i1}^2 \} \tan \theta] \quad (31)$$

ここで, Φ_0 , I_{r1} , F_{i1} , F_{i2} は以下に示される無次元量である。

$$\Phi_0 = 1 - (1 + \varepsilon) F_{i1}^2 - F_{i2}^2 + \varepsilon F_{i1}^2 F_{i2}^2 \quad (32)$$

$$F_{i1}^2 = \frac{\beta_1 U_1^2}{\varepsilon g h_1 \cos \theta} \quad F_{i2}^2 = \frac{\beta_2 U_2^2}{\varepsilon g h_2 \cos \theta} \quad (33)$$

$$I_{r1} = \frac{\varepsilon}{g h \cos \theta} \left\{ \frac{1}{2\rho_0} g \cos \theta h_1^2 \frac{d\rho_1}{dx} - u_1 v_e + 2\beta_1 U_1 v_e + \frac{1}{\rho_0} \tau_i \right\} \quad (34a)$$

$$I_{t2} = \frac{1}{\varepsilon g h_2 \cos \theta} \left\{ \frac{1}{\rho_0} g \cos \theta (h_1 h_2 + \frac{1}{2} h_2^2) \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta \rho + u_1 v_e - 2\beta_2 U_2 v_e - \frac{1}{\rho_0} (\tau_i - \tau_b) \right\} \quad (34b)$$

式(34a), (34b)には, 流下方向の, 密度変更項 $d\rho_1/dx$, $d\Delta\rho/dx$ が含まれている。これらは定常状態の拡散方程式から次のように求めることができる。

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = \frac{1}{U_1 h_1} \{ (c_1 - C_1) v_e + \kappa u_{e*} (C_2 - C_1) \} \quad (35)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{1}{U_2 h_2} \{ (C_2 - c_1) v_e - \kappa u_{e*} (C_2 - C_1) \} \quad (36)$$

さらにこれらを式(7)に代入して次式を得る。

$$\frac{d\rho_1}{dx} = \rho_0 R \frac{dC_1}{dx} = \frac{\rho_0 R}{U_1 h_1} \{ (c_1 - C_1) v_e + \kappa u_{e*} (C_2 - C_1) \} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Delta \rho &= \rho_0 R \frac{d}{dx} (C_2 - C_1) \\ &= \rho_0 R \left[\frac{1}{U_2 h_2} \{ (C_2 - c_1) v_e - \kappa u_{e*} (C_2 - C_1) \} - \frac{1}{U_1 h_1} \{ (c_1 - C_1) v_e + \kappa u_{e*} (C_2 - C_1) \} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

さらに定常状態の連続式(17), (18)の非定常項を零として, 次のように求められる。

$$\frac{dq_1}{dx} = v_e \quad \frac{dq_2}{dx} = -v_e \quad (39)$$

上層, 下層の平均流速は, それぞれの単位幅流量 q_1 , q_2 水深 h_1 , h_2 を用いて

$$U_1 = q_1/h_1 \quad U_2 = q_2/h_2 \quad (40)$$

となる。

以上のように求められた式(30)–(40)が定常二層流の基礎方程式である。式(34a)から分かるように, 連行に伴う付加応力 $u_1 v_e$ は, そのままでは界面せん断応力 τ_i と符号が逆であるが, 連続式から生ずる項 $2\beta_1 U_1 v_e$ を合わせるとせん断応力と同符号になる。これまでの多くの解析では, これらのせん断応力を一括してとり扱っている。これを τ_v と書くことにすれば, 次のようになる。

$$-u_1 v_e + 2\beta_1 U_1 v_e + \frac{1}{\rho_0} \tau_i = \frac{1}{\rho_0} \tau_v$$

ここで, $(2\beta_1 U_1 - u_1) v_e > 0$ であることから, $\tau_i < \tau_v$ となる。すなわち, 実際のせん断応力は, 見かけのせん断応力より小さくなる。

また, 式(36)より, 上, 下層の濃度が次の関係を満たさないとき, 下層の濃度 C_2 が増加することに注意する

必要がある。

$$(C_2 - c_1)v_e - \alpha u_e^*(C_2 - C_1) \leq 0$$

上式の条件は界面での混合が無視される場合、すなわち $\alpha = 0$ のとき、 $c_1 = C_2$ となる場合のみ満たされる。実際の流れでは、界面での濃度 c_1 は常に下層の濃度 C_2 より小さくなる。換言すれば、実際の流れでは乱流拡散による界面での混合が無視できないと言えよう。

6. 一次元非定常二層流の解析手法

二層流の一次元非定常解析手法について説明する。二層流の非定常解析は、一般的には数値的にかなり不安定であり、須賀¹⁰⁾、室田ら¹¹⁾の研究を除いては解析を行った例は少ない。ここでは一次元の開水路流の解析で用いられている4点陰式解法を二層流の解析に応用

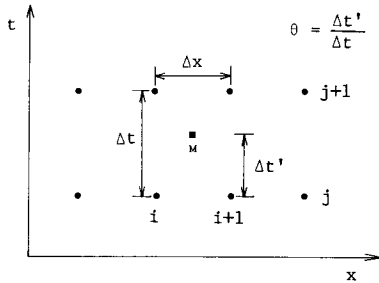


Fig. 2 Nodal point in the x-t plane

する方法について述べる。この方法は、陰式解法と完全陰解法の間の方法であり、数値的に安定であることが特徴である。中村・福嶋¹²⁾はこの方法を一次元開水路の段波について適用し、満足すべき結果を得ている。

四点陰式解法では、図2に示すようにx方向の格子点 $i, i+1$ 、時間方向の格子点 $j, j+1$ 、に対し、未知数 Γ を次のように補間する。

$$\Gamma = \frac{\theta}{2}(\Gamma_i^{j+1} + \Gamma_{i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2}(\Gamma_i^j + \Gamma_{i+1}^j) \quad (41)$$

また、 Γ の x 方向の微分、t 方向の時間微分を次のように表す¹⁾。

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma = \frac{\theta}{\Delta x}(\Gamma_i^{j+1} - \Gamma_{i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x}(\Gamma_i^j - \Gamma_{i+1}^j) \quad (42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma = \frac{1}{2\Delta t} \{ (\Gamma_i^{j+1} + \Gamma_{i+1}^{j+1}) - (\Gamma_i^j + \Gamma_{i+1}^j) \} \quad (43)$$

ここで、 Γ_i^{j+1} は x 座標 i の時間 $j+1$ の Γ の値であることを表すものである。式(41)–(43)の表現を用い、式(17)–(22)の離散化式を求める。これらは一般的には隣接格子

点での値の関数であり、 $j+1$ での値が未知数となる。まず式(17)は次のように表される。

$$\begin{aligned} & \text{F1i}(h_{1i}^{j+1}, h_{1i+1}^{j+1}, q_{1i}^{j+1}, q_{1i+1}^{j+1}, C_{1i}^{j+1}, C_{1i+1}^{j+1}, \\ & h_{2i}^{j+1}, h_{2i+1}^{j+1}, q_{2i}^{j+1}, q_{2i+1}^{j+1}, C_{2i}^{j+1}, C_{2i+1}^{j+1}) \\ & = \frac{1}{2\Delta t} \{ (h_{1i}^{j+1} + h_{1i+1}^{j+1}) - (h_{1i}^j + h_{1i+1}^j) \} \\ & + \frac{\theta}{\Delta x} (q_{1i}^{j+1} - q_{1i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (q_{1i}^j - q_{1i+1}^j) \\ & - E^j (|U_{1i}^j| - |U_{1i+1}^j|) = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

式(18)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \text{F2i}(h_{1i}^{j+1}, h_{1i+1}^{j+1}, q_{1i}^{j+1}, q_{1i+1}^{j+1}, C_{1i}^{j+1}, C_{1i+1}^{j+1}, \\ & h_{2i}^{j+1}, h_{2i+1}^{j+1}, q_{2i}^{j+1}, q_{2i+1}^{j+1}, C_{2i}^{j+1}, C_{2i+1}^{j+1}) \\ & = -\frac{1}{2\Delta t} \{ (h_{2i}^{j+1} + h_{2i+1}^{j+1}) - (h_{2i}^j + h_{2i+1}^j) \} \\ & + \frac{\theta}{\Delta x} (q_{2i}^{j+1} - q_{2i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (q_{2i}^j - q_{2i+1}^j) \\ & + E^j (|U_{1i}^j| - |U_{2i}^j|) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

式(19)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \text{G1i}(h_{1i}^{j+1}, h_{1i+1}^{j+1}, q_{1i}^{j+1}, q_{1i+1}^{j+1}, C_{1i}^{j+1}, C_{1i+1}^{j+1}, \\ & h_{2i}^{j+1}, h_{2i+1}^{j+1}, q_{2i}^{j+1}, q_{2i+1}^{j+1}, C_{2i}^{j+1}, C_{2i+1}^{j+1}) \\ & = \left[\frac{1}{2\Delta t} \{ (C_{1i}^{j+1} + C_{1i+1}^{j+1}) - (C_{1i}^j + C_{1i+1}^j) \} \right. \\ & + \left\{ \frac{\theta}{\Delta x} (C_{1i}^{j+1} - C_{1i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (C_{1i}^j - C_{1i+1}^j) \right\} \\ & \times \left\{ \frac{\theta}{2} (U_{1i}^{j+1} + U_{1i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2} (U_{1i}^j + U_{1i+1}^j) \right\} \left. \right] \\ & \times \left\{ \frac{\theta}{2} (h_{1i}^{j+1} + h_{1i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2} (h_{1i}^j + h_{1i+1}^j) \right\} \\ & - v_e (c_{1i}^j - c_{1i+1}^j) + \alpha u_e^* (C_2^j - C_1^j) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

式(20)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \text{G2i}(h_{1i}^{j+1}, h_{1i+1}^{j+1}, q_{1i}^{j+1}, q_{1i+1}^{j+1}, C_{1i}^{j+1}, C_{1i+1}^{j+1}, \\ & h_{2i}^{j+1}, h_{2i+1}^{j+1}, q_{2i}^{j+1}, q_{2i+1}^{j+1}, C_{2i}^{j+1}, C_{2i+1}^{j+1}) \\ & = \left[\frac{1}{2\Delta t} \{ (C_{2i}^{j+1} + C_{2i+1}^{j+1}) - (C_{2i}^j + C_{2i+1}^j) \} \right. \\ & + \left\{ \frac{\theta}{\Delta x} (C_{2i}^{j+1} - C_{2i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (C_{2i}^j - C_{2i+1}^j) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{\theta}{2}(U_{2i}^{j+1} + U_{2i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2}(U_{2i}^j) + U_{2i+1}^j \right\} \Big] \\ & \times \left\{ \frac{\theta}{2}(h_{2i}^{j+1} + h_{2i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2}(h_{2i}^j + h_{2i+1}^j) \right\} \\ & - v_e^j (C_{2i}^j - c_i^j) + \kappa u e^* (c_i^j - C_i^j) = 0 \end{aligned}$$

(21)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & H1i(h_{1i}^{j+1}, h_{1i+1}^{j+1}, q_{1i}^{j+1}, q_{1i+1}^{j+1}, C_{1i}^{j+1}, C_{1i+1}^{j+1}, \\ & h_{2i}^{j+1}, h_{2i+1}^{j+1}, q_{2i}^{j+1}, q_{2i+1}^{j+1}, C_{2i}^{j+1}, C_{2i+1}^{j+1}) \\ & = \frac{1}{2\Delta t} \{ (q_{1i}^{j+1} + q_{1i+1}^{j+1}) - (q_{1i}^j + q_{1i+1}^j) \} \\ & + \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} h_{1i}^j g \cos\theta - \beta_1 U_1^{j2} \right) \\ & \times \left\{ \frac{\theta}{\Delta x} (h_{1i}^{j+1} - h_{1i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (h_{1i}^j - h_{1i+1}^j) \right\} \\ & + \frac{\rho_1}{\rho_0} h_{1i}^j g \cos\theta \left\{ \frac{\theta}{\Delta x} (h_{2i}^{j+1} - h_{2i+1}^{j+1}) \right. \\ & \left. + \frac{1-\theta}{\Delta x} (h_{2i}^j - h_{2i+1}^j) \right\} - (u_i^j - 2\beta_1 U_i^j) v_e^j \\ & - \frac{\rho_1}{\rho_0} h_{1i}^j g \sin\theta + \frac{1}{2\rho_0} g \cos\theta h_{1i}^{j2} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \tau_i^j \\ & = 0 \quad (48) \end{aligned}$$

式(22)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & H2i(h_{1i}^{j+1}, h_{1i+1}^{j+1}, q_{1i}^{j+1}, q_{1i+1}^{j+1}, C_{1i}^{j+1}, C_{1i+1}^{j+1}, \\ & h_{2i}^{j+1}, h_{2i+1}^{j+1}, q_{2i}^{j+1}, q_{2i+1}^{j+1}, C_{2i}^{j+1}, C_{2i+1}^{j+1}) \\ & = \frac{1}{2\Delta t} \{ (q_{2i}^{j+1} + q_{2i+1}^{j+1}) - (q_{2i}^j + q_{2i+1}^j) \} \\ & + \left\{ \frac{1}{\rho_0} (\rho_1 + \Delta\rho) h_2^j g \cos\theta - \beta_2 U_2^{j2} \right\} \\ & \times \left\{ \frac{\theta}{\Delta x} (h_{2i}^{j+1} - h_{2i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (h_{2i}^j - h_{2i+1}^j) \right\} \\ & + \frac{\rho_1}{\rho_0} h_2^j g \cos\theta \\ & \times \left\{ \frac{\theta}{\Delta x} (h_{1i}^{j+1} - h_{1i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (h_{1i}^j - h_{1i+1}^j) \right\} \\ & - (2\beta_2 U_2^j - u_i^j) v_e^j - \frac{\rho_2}{\rho_0} h_2^j g \sin\theta \\ & + \frac{1}{\rho_0} g \cos\theta (h_{1i}^j h_2^j + \frac{1}{2} h_2^{j2}) \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \\ & + \frac{1}{2\rho_0} g \cos\theta h_2^{j2} \frac{\partial \Delta\rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} (\tau_i^j - \tau_{i+1}^j) = 0 \quad (49) \end{aligned}$$

式(44)–(49)において下付き添え字がなく、上付き添え字 j が付けてあるものは次式のように与えられる。

$$\Gamma^j = \frac{\theta}{2} (\Gamma_{1i}^{j+1} + \Gamma_{1i+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2} (\Gamma_{1i}^j + \Gamma_{1i+1}^j) \quad (50)$$

式(44)–(49)の表現を未知数の関数の形で表すと次のようになる。但し上付き添え字 $j+i$ は省略している。

$$\begin{aligned} & F1i(h_{1i}, q_{1i}, \rho_{1i}, h_{2i}, q_{2i}, \rho_{2i}, \\ & h_{1i+1}, q_{1i+1}, \rho_{1i+1}, h_{2i+1}, q_{2i+1}, \rho_{2i+1}) = 0 \\ & F2i(h_{1i}, q_{1i}, \rho_{1i}, h_{2i}, q_{2i}, \rho_{2i}, \\ & h_{1i+1}, q_{1i+1}, \rho_{1i+1}, h_{2i+1}, q_{2i+1}, \rho_{2i+1}) = 0 \\ & G1i(h_{1i}, q_{1i}, \rho_{1i}, h_{2i}, q_{2i}, \rho_{2i}, \\ & h_{1i+1}, q_{1i+1}, \rho_{1i+1}, h_{2i+1}, q_{2i+1}, \rho_{2i+1}) = 0 \\ & G2i(h_{1i}, q_{1i}, \rho_{1i}, h_{2i}, q_{2i}, \rho_{2i}, \\ & h_{1i+1}, q_{1i+1}, \rho_{1i+1}, h_{2i+1}, q_{2i+1}, \rho_{2i+1}) = 0 \\ & H1i(h_{1i}, q_{1i}, \rho_{1i}, h_{2i}, q_{2i}, \rho_{2i}, \\ & h_{1i+1}, q_{1i+1}, \rho_{1i+1}, h_{2i+1}, q_{2i+1}, \rho_{2i+1}) = 0 \\ & H2i(h_{1i}, q_{1i}, \rho_{1i}, h_{2i}, q_{2i}, \rho_{2i}, \\ & h_{1i+1}, q_{1i+1}, \rho_{1i+1}, h_{2i+1}, q_{2i+1}, \rho_{2i+1}) = 0 \quad (51) \end{aligned}$$

未知数は $i, i+1$ 間で 6 個あり、 $i+1$ から $i=N$ まで $6N$ 個の未知数がある。これに対し式(51)の方程式は $6(N-1)$ であり、方程式系を閉じるためにはさらに 6 個の関係式を与える必要がある。このため、次のような境界条件を導入する。

$$\begin{aligned} q_{11}^{j+1} &= q_{11}(t^{j+1}) & q_{21}^{j+1} &= q_{21}(t^{j+1}) \\ hq_{1N}^{j+1} &= h_{1N}(t^{j+1}) & h_{21}^{j+1} &= h_{2N}(t^{j+1}) \\ \rho_{1N}^{j+1} &= \rho_{1N}(t^{j+1}) & \rho_{2N}^{j+1} &= \rho_{2N}(t^{j+1}) \quad (52) \end{aligned}$$

式(51)、(52)の解法には一般化されたニュートン法を用いる。式(51)をテイラー展開し、未知数の 1 次の項までとると、例えば式(51)の第 1 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_{1i}}{\partial h_{1i}} \Delta h_{1i} + \frac{\partial F_{1i}}{\partial q_{1i}} \Delta q_{1i} + \frac{\partial F_{1i}}{\partial \rho_{1i}} \Delta \rho_{1i} \\ & + \frac{\partial F_{1i}}{\partial h_{2i}} \Delta h_{2i} + \frac{\partial F_{1i}}{\partial q_{2i}} \Delta q_{2i} + \frac{\partial F_{1i}}{\partial \rho_{2i}} \Delta \rho_{2i} \\ & + \frac{\partial F_{1i}}{\partial h_{1i+1}} \Delta h_{1i+1} + \frac{\partial F_{1i}}{\partial q_{1i+1}} \Delta q_{1i+1} + \frac{\partial F_{1i}}{\partial \rho_{1i+1}} \Delta \rho_{1i+1} \\ & + \frac{\partial F_{1i}}{\partial h_{2i+1}} \Delta h_{2i+1} + \frac{\partial F_{1i}}{\partial q_{2i+1}} \Delta q_{2i+1} \\ & + \frac{\partial F_{1i}}{\partial \rho_{2i+1}} \Delta \rho_{2i+1} = -R_{1i}^k \quad (53) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta h_{1i}, \Delta q_{1i}, \Delta \rho_{1i}, \Delta h_{2i}, \Delta q_{2i}, \Delta \rho_{2i}, \Delta h_{1i+1}, \Delta q_{1i+1}, \Delta \rho_{1i+1}, \Delta h_{2i+1}, \Delta q_{2i+1}, \Delta \rho_{2i+1}$ は、それぞれ、 $h_{1i}, q_{1i}, \rho_{1i}, h_{2i}, q_{2i}, \rho_{2i}, h_{1i+1}, q_{1i+1}, \rho_{1i+1}, h_{2i+1}, q_{1i+1}, \rho_{2i+1}$ の補正量である。また R_{1i}^k は方程式の $F1i$ の残差である。式(51)の他の式も同様に展開する。このことにより、境界条件式(52)の 6 個の関係式を加えて、

6 N 個の補正量に関する連立方程式が得られる。得られる方程式は大きさ $6 N \times 6 N$ でバンド幅 19 のマトリックスである。マトリックスの解法にはガウスの消去法を用い、演算ステップを短縮するため前進消去・後退代入を用い、その過程で部分選択と行スケールングを行っている。また、メモリーの節約と計算の効率化のため、マトリックスのバンド幅のみを記憶している。

7. 定常塩水くさびの解析

基礎方程式の妥当性を検討するため、定常塩水くさびの実験を行い、計算結果と比較した。

実験に用いた装置は図3に示すような全長 10 m, 幅 20 cm, 高さ 30 cm, 勾配 1/80 の水路部に 180 cm × 180 cm の海部に相当する水槽を取り付けたものである。実験は海部の水槽に低温の水道水を満たし、上流から高温の淡水を流下させることによって行った。測定は、塩水くさびが定常になるのを待って行い、流速分布、温度分布、界面形状を測定した。流速分布の測定には、染料（メチレンブルー）を注入しこれをビデオ撮影し、追跡することによって行った。また、温度分布には熱電対を用いた。界面形状の測定には、下層をウランで着色し、これを目視で読み取った。実験は Run 1 から Run 5 までの 5 種類行ったが、ここでは Run 5 の結果について述べる。

図4-図5に、それぞれ、Run 5 の流速分布、温度より求めた密度分布、界面形状の一例を示す。流速分布は上層においてはほぼ一様であり、界面付近で値が小さくなっている。下層の流速はごく僅かであるが上流方向に流れているのが分かる。これは下層から上層への連行に伴う補償する流れがあるためである。密度分布は測定点が少ないため詳しいことは分からないが、上層では下流に行くほど密度が大きくなると、下層では上流に行くほど密度が小さくなるのが読み取れる。

図6に定常な塩水くさび（冷水くさび）の計算例と実測値の比較を示す。計算には式(30)-(40)を用い、界面抵抗係数としては式(24)を用いて、 a の値を 0.1 から 0.35 の範囲で変化させた。この図より、 a の値は 0.25 とすれば良いことが分かる。この値は金子⁵⁾の求めた値 0.2 にきわめて近いと言えよう。すなわち、我々の実験でも金子の式が支持されたと言える。

図7に本実験で得られた界面摩擦係数を岩崎数 (= $ReFi^2$) に対して示す。実線は金子⁵⁾の式(24)である。実験で得られた f_1 は金子の式に比べてやや大きい傾向

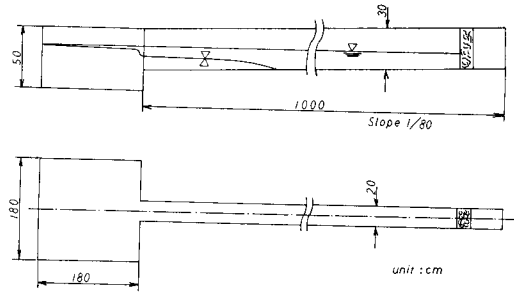


Fig. 3 Experimental apparatus

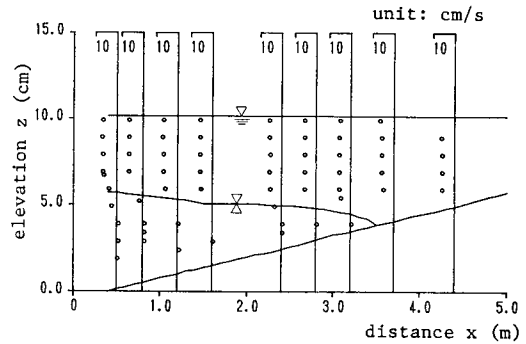


Fig. 4 Velocity profile of Run 5

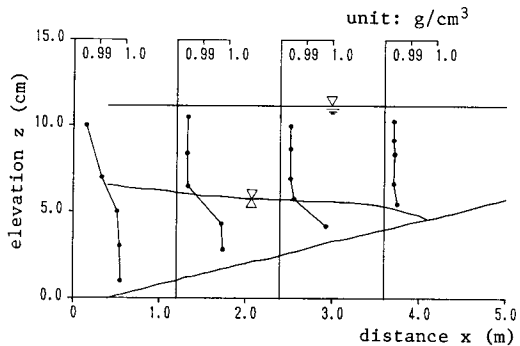


Fig. 5 Density profile of Run 5

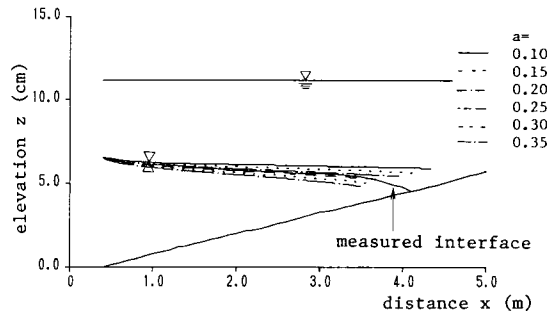


Fig. 6 Measured and calculated interface form with coefficient a as a parameter

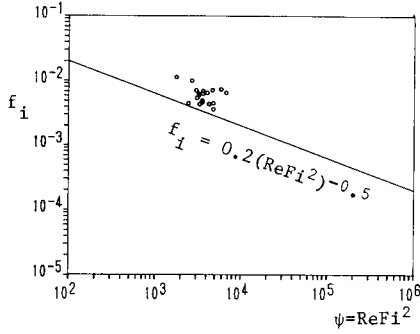


Fig. 7 Interface friction coefficient. Solid line indicates Kaneo's formula. Circles are experimental data obtained in this study.

を示すがその差は小さく十分に妥当な値であると考えられる。

8. 現地規模の一次元二層流の非定常解析

非定常の二層流の室内実験は特別な装置を必要とし、技術的にもきわめて困難である。そこで本節では、信濃川河口部で行われた現地の測定結果と計算結果を比較することにする。信濃川の観測は運輸省第一港建設局、建設省北陸地方建設局¹²⁾によって行われたものであり、観測は昭和50年9-12月、昭和51年8-11月にかけて行われている。このうち、解析対象としたのは昭和51年9月9日とした。この日のデータは弱混合であり、成層の度合いが強いと判断された。水温は約25°Cであった。観測では水の電気伝導度が観測されており、計算結果の比較として20000 μ/Ωcm以上を塩水と判断した。河川流量としては日変動、観測誤差を判断して314 m³/sの一定値を与えている。界面位置は200 mおきに、また河床の縦断変化は50 mおきに読み取った。川幅は若干の変動はあるものの、ほぼ一定であると判断し、300 mとした。

一般的に連行係数、界面摩擦係数、底面摩擦係数は水深、流速の関数である。これらは現在の時間ステップjと次の時間ステップj+1の両方の関数であると考えられる。しかし、予備的に非定常解析を行ったところj+1ステップを関数として含めると計算が不安定となってしまう収束解を得られないことが分かった。そこで、数値解析ではこれらがjステップだけの関数として計算を行った。また、時間ステップ、距離ステップの大きさを小さくすると計算が安定して行われないので、今回の解析ではΔt=3600s、Δx=50cmとしている。計算条件を表1にまとめて示す。

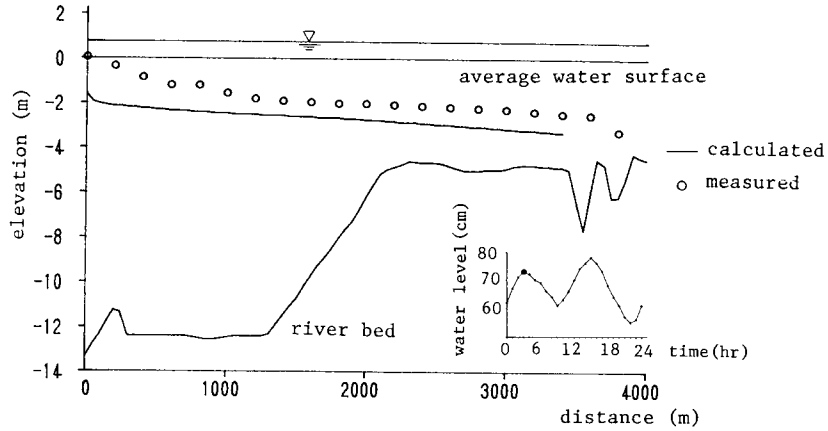
予備計算によると3周期以上の計算を行えば、計算

表1 信濃川の計算条件

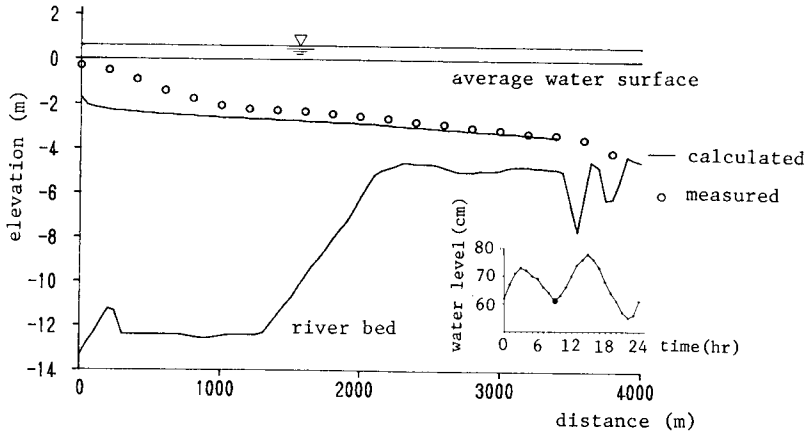
計算区間	0 m (河口) - 3400 m
時間ステップ	3600s
ステップ数	周期数 × 3600s
距離間隔	50m
界面抵抗係数	$f_i = 0.7(ReFi^2)^{-0.5}$
連行係数	$E = 0.003Fi^3$
上流端境界条件	
上層流量	$Q_1 = 314\text{m}^3/\text{s}$
下層流量	$Q_2 = 1\text{m}^3/\text{s}$
下流端境界条件	
上層水深	$h_1 = \text{限界水深}$
上層密度	$Q_1 = 1.00112\text{g}/\text{cm}^3$
下層水深	$h_2 = \text{水位} - h_1$
下層密度	$\rho_2 = 1.01607\text{g}/\text{cm}^3$
潮位波高	新潟西港潮位
周期	12時間

結果はほぼ周期的になることが分かったので、実測値との比較は3周期目の計算結果を用いた。

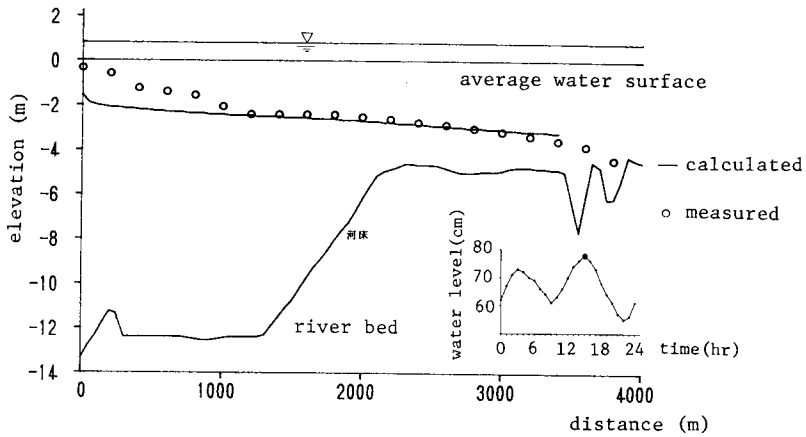
図8(a), (b), (c)は信濃川河口で観測された実測値と数値計算した結果を比較したものであり、それぞれ、9月9日午前3時、9時、午後3時の結果である。ここで注意しておかなければならないことは、河口条件である。従来から、下層流量が小さい場合の塩水くさびの河口条件としては河口で密度フルード数が1になる条件が用いられており、これは理論的に妥当な条件である⁷⁾。一方、信濃川の場合物理的な河口で密度フルード数は1よりはるかに大きい約2.5となっていた。しかし、河川内で密度フルード数が1を越えると、密度フルード数が1となる地点で方程式が特異点となり、それより上流の計算を行うことができない。そこで、本解析では物理的な河口で密度フルード数が1になるものとして計算を行った(表1参照)。このため図8のいずれの場合も河口付近の一致度はあまり良くない。午前3時のケースでは、実測された流量は計算で与えた流量に比べて、40 m³/s程度大きかった。このため、計算された界面形状は実測値に比べて幾分か小さくなっている。河川流量を一定と仮定しないで、周期的な変化特性を考慮した解析を行えばよりよい一致が得られるであろう。午前9時の干潮時、午後3時の満潮時の2ケースでは河口より1000 m以上上流では実測値と計算値の一致度はかなり良いと考える。



(a) 3:00 am, 9 September 1976



(b) 9:00 am, 9 September 1976



(c) 3:00 pm, 9 September 1978

Fig. 8 Interface form of Sinano River under the unsteady condition. Circles are measured data and a solid line indicates the numerical calculation.

本研究で開発したモデルは下層水深が有限であることを前提としている。このため、下層水深が小さくなるくさび先端部の解析をどのようにするかは今後の課題である。また、今回の解析では表1に示したように界面抵抗係数の式(24)の係数を $a=0.7$ としている。この値は、著者らの室内実験で得られた値あるいは金子⁵⁾の式の $a=0.2$ よりかなり大きい。この理由については定かではないが、現地の塩水くさびは完全な二層流ではなく鉛直方向にかなり緩やかな濃度勾配が存在していることも原因の一つと考えられる。

9. 結 論

本研究では実際の河川で観測される非定常の二層流の数値解析法を開発した。基礎となる方程式は、水流の連続式、塩分濃度の拡散方程式、流れ方向とこれに直交方向の運動方程式である。これらの上・下二層の層積分によって、一次元非定常二層流の基礎方程式を導いた。この過程で、下層から上層への連行、連行に伴う付加的応力、界面での乱流混合を合理的に導いた。

以上により得られた基礎方程式を基に、まず定常状態の二層流の特性を調べた。定常状態の数値解を室内実験の結果と比較検討し、数値解が実験値をよく説明することが明らかにされた。また、界面摩擦係数の値も従来より提案されている値とほぼ同じであることが分かった。

次に、一次元非定常二層流の新たな数値解法を提案した。この方法は、従来河川の一次元不定流解析で提案された4点陰式解法を二層流について拡張したもので数値的安定性に優れているという特徴を持つ。この解法による計算を信濃川で観測された結果と比較し満足すべき一致を見ることが示された。

今回の解析法では処理できないくさび先端付近の取扱、密度成層の影響、現地に於ける界面摩擦係数の値

の取り方など今後に残された課題も多いことを挙げておく。

最後に多くのご指導をいただいた本学早川典生教授、中村由行助手、多くの議論に加わっていただいた水工研究室の諸君に深甚なる感謝の意を表します。

10. 参考文献

- 1) Amein, M. and Fang, C. S., Implicit Flood Routing in Natural Channels, J. of Hydraulic Div., ASCE, Vol. 96, No. HY12, 1970, pp. 2481-2500.
- 2) Price, P. K., Comparison of Four Numerical Methods for Flood Routing, J. of Hydraulic Div., ASCE, Vol. 100, No. HY7, 1974, pp. 879-899.
- 3) 中村茂, 福嶋祐介, 段波の一次元不定流解析, 第33回水理講演会論文集, 第33号, 1989, pp. 265-270.
- 4) 中村茂, 福嶋祐介, 複断面流れにおける陰式差分法の収束性について, 第44回土木学会年次学術講演会概要集, 第II部, 1989, pp. 566-567.
- 5) 金子安雄, 2層流界面抵抗係数の一例, 第13回海岸工学講演会論文集, pp. 263-267.
- 6) 福岡捷二, 福嶋祐介, 中村健一, 2次元貯水池密度流の潜り込み水深と界面形状, 土木学会論文報告集, 第302号, 1980, pp. 55-65.
- 7) 福岡捷二, 福嶋祐介, 守屋祥一, 新庄高久, 河口密度流の流動特性と塩水くさびの河口条件, 土木学会論文報告集, 第327号, 1982, pp. 61-71.
- 8) 由良守生, 河口密度流に関する研究, 長岡技術科学大学課題研究, 1983.
- 9) 玉井信行, 連行を考慮した漸変成層流の基礎方程式について, 土木学会論文報告集, 第324号, 1982, pp. 95-102.
- 10) 須蛾堯三, 感潮河川における塩水くさびの水理に関する研究, 建設省, 土木研究所資料, 第1573号, 1979.
- 11) 室田明, 季文沃, 中村浩一, 河口部における塩水くさびの挙動と塩水導入の制御に関する基礎的研究, 第32回水理講演会論文集, 1988, pp. 185-190.
- 12) 運輸省第一港湾建設局, 建設省北陸地方建設局, 信濃川下流整備計画調査報告書, 1977.