

# ディジタル・フィルタにおけるモーメントの拡張と係数感度について

王 妍\*・吉 川 敏 則\*

On the Expansion and Coefficient Sensitivity of Moment for Digital Filters

Yan WANG and Toshinori YOSHIKAWA

In digital signal processing, the signals, the state variables and the coefficients are realized with finite-word-length. Due to the limited word length, the characteristics of filter may deviate from their theoretical values, especially for the frequency characteristic. The moment of impulse response of filter is defined as the weighted sum of impulse response, describing the statistical distribution of the impulse response waveform in time domain. Because the low-order moments are related to the amplitude, phase and frequency characteristics, it is expected to be able to evaluate the effects on characteristics of digital filter for the coefficient quantization. In this report, we expand the normal moment to the power moment, and discuss some performances for it. We define the coefficient sensitivity, derive the formulas for it, and discuss the relations to zeros of transfer function. Furthermore, we propose some evaluation formulas for coefficient quantization based on the moments.

**Key words:** moment/power moment/coefficient sensitivity/quantization/cascade form

## 1. ま え が き

ディジタル信号処理では、入力信号、状態信号やフィルタの係数などは、有限語長で表現される。この影響により、実際に構成されたシステムでは、特性が劣化し、雑音が生ずる。一般に語長を長くすれば誤差は少なくなるが、ハードウェアの規模と演算時間が増大する。そこで、劣化がどのように生ずるのかを解析し、指定された特性に対し、誤差を容許値以内におさめるための最小係数語長の推定や、劣化の最小化が必要となる。また、係数量子化に対する低感度の構成を求めることも大きな課題となっている<sup>1,2)</sup>。

語長に関する誤差の一つとして係数の量子化誤差があげられる。係数量子化による特性劣化の解析や評価は、ほとんど周波数領域で行なわれており、評価の基準としては、伝達関数の極・零点の位置変動、根の密度などが用いられている。しかし時間領域での解析はほとんど行なわれていない。それは、時間領域においては、統一的評価基準ができていないからである。時間領域におけるフィルタ特性劣化の一つの尺度として、

インパルス応答の波形モーメントがよく用いられている。通常のモーメントを用いた FIR デジタルフィルタの係数感度に関する研究、モーメントを用いた低感度なデジタルフィルタの構成法に関する研究は、いくつかが報告されているが<sup>3~9)</sup>、偶数次の通常モーメントでは、原点あるいは、波形中心に対する対称成分が互いにキャンセルされるため、通常のモーメントは波形の全体的特性をよく表せないと考えられる。そこで、本論文では、通常のモーメントの欠点を考慮し、インパルス応答のパワー・モーメントを採用し、パワー・モーメントの係数感度を解析する。また、時間領域で定義されたモーメントを周波数領域に拡張し、フィルタの周波数特性、フィルタの零点、及び根感度との関係を考察する。直接形構成を、縦続形構成に拡張し、縦続形構成におけるモーメントとその係数感度についても検討する。さらに、係数量子化によるモーメントの変動、周波数特性の変動を解析し、評価式を提案する。

## 2. 通常モーメントとその特性

フィルタ設計では、フィルタの周波数特性の係数量子化に対する低感度が一つの目安となっている。インパルス応答のモーメントはフィルタの周波数特性と密

原稿受付：平成4年5月14日

\*長岡技術科学大学電気系

接な関係があるため、モーメントを用いてフィルタの特性評価ができると考えられる。

### 2.1 通常モーメントの定義

FIR デジタルフィルタのインパルス応答を  $h(iT)$  とする。 $h(iT)$  の原点回り、波形中心回りの  $r$  次モーメント  $m_r$ 、 $\mu_r$  は式 (2-1)、(2-2) で定義される。

$$m_r = \sum_{i=0}^{N-1} h(iT) \cdot (iT)^r / \sum_{i=0}^{N-1} h(iT) \quad (2-1)$$

$$\mu_r = \sum_{i=0}^{N-1} h(iT) \cdot (iT - \mu)^r / \sum_{i=0}^{N-1} h(iT) \quad (2-2)$$

ここで、 $T$  はサンプリング間隔、 $N$  はフィルタの次数、 $\mu = m_1$  は波形中心である。

### 2.2 通常モーメントの特性

統計学では、モーメントは期待値を表す。定義式から分かるように、奇数次のモーメントは波形の対称性を表し、偶数次のモーメントは波形の広がりを表している。

低次モーメント  $\mu$ 、 $\mu_2$  はそれぞれ零周波数でのフィルタの位相特性と振幅特性とに対して、下記の関係を持つ<sup>3)</sup>。

$$\mu = \theta'(0) \quad (2-3)$$

$$\mu_2 = A'(0)/A(0) \quad (2-4)$$

ここで、 $\theta'(0)$ 、 $A'(0)$  はそれぞれ零周波数での位相特性と振幅特性の一次微分である。

また、 $r$  次モーメント  $m_r$ 、 $\mu_r$  はそれぞれフィルタの伝達関数と次の関係がある<sup>3)</sup>。

$$m_r = \frac{j^r}{H(0)} \cdot \frac{\partial^r H(\omega)}{\partial \omega^r} \Big|_{\omega=0} \quad (2-5)$$

$$\mu_r = \frac{j^r}{H(0)} \cdot \frac{\partial^r e^{j\omega\mu} \cdot H(\omega)}{\partial \omega^r} \Big|_{\omega=0} \quad (2-6)$$

以上の式から、通常モーメントは零周波数でのフィルタ特性を表している。したがって、通常モーメントを用いて、零周波数でのフィルタ特性を評価することができる。また、モーメントが時間領域で定義され、計算が簡潔であるため、周波数領域での評価より、効率的な評価ができる可能性がある。

## 3. パワー・モーメントについて

前述のように、FIR フィルタに対し、偶数次の通常モーメントでは、原点あるいは波形中心に対する対称成分が互いにキャンセルされる。そこで、この欠点を補うため、パワー・モーメントを定義する。

### 3.1 パワー・モーメントの定義

原点回りの  $r$  次パワー・モーメント、パワー中心  $p\mu$  及びパワー中心回りの  $r$  次パワー・モーメント  $p\mu_r$  は式 (3-1)、(3-2)、(3-3) で定義される。

$$p_r = \sum_{i=0}^{N-1} h^2(iT) \cdot (iT)^r / \sum_{i=0}^{N-1} h^2(iT) \quad (3-1)$$

$$p\mu = p_1 \quad (3-2)$$

$$p\mu_r = \sum_{i=0}^{N-1} h^2(iT) \cdot (iT - p\mu)^r / \sum_{i=0}^{N-1} h^2(iT) \quad (3-3)$$

定義式より、パワー・モーメントでは  $h(iT)$  の 2 乗を用いるため、正負の打ち消しがなくなる。計算コストが多少上がるが、より正確に波形の特性を表せる可能性がある。

### 3.2 線形位相フィルタにおけるパワー・モーメント

線形位相フィルタにおいては、インパルス応答は対称であるため、簡単な表現式が得られる。

フィルタの次数  $N$  が奇数である時、 $p\mu$ 、 $p\mu_r$  は、

$$p\mu = MT \quad (3-4)$$

$$p\mu_r = \begin{cases} 0 & n: \text{偶数} \\ \frac{2 \sum_{i=0}^M h^2(iT) \cdot (iT - MT)^r}{h^2(0) + 2 \sum_{i=0}^M h^2(iT)} & n: \text{奇数} \end{cases} \quad (3-5)$$

であり、 $N$  が偶数である時、 $p\mu$ 、 $p\mu_n$  は、

$$p\mu = (M-1/2) \cdot T \quad (3-6)$$

$$p\mu_r = \begin{cases} 0 & n: \text{偶数} \\ \frac{2 \sum_{i=0}^M h^2(iT) \{iT - (M-1/2)T\}^r}{h^2(0) + 2 \sum_{i=0}^M h^2(iT)} & n: \text{奇数} \end{cases} \quad (3-7)$$

となる。ここで、 $M$  は次式で与えられる。

$$M = \begin{cases} (N-1)/2 & N: \text{奇} \\ N/2 & N: \text{偶} \end{cases} \quad (3-8)$$

### 3.3 パワー・モーメントと周波数特性との関係

原点回りおよびパワー中心回りのパワー・モーメントの定義式より、周波数変数  $\omega$  に対し、 $r$  次導関数を用いれば、周波数特性との関係式が導出される。それらを式 (3-9)、(3-10) に示す。

$$p_r = j^r \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(e^{-j\omega T}) H^{(r)}(e^{j\omega T}) d\omega \quad (3-9)$$

$$p_{\mu r} = \frac{j^r \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-jp\mu\omega} H(e^{-j\omega T}) \{ (H(e^{j\omega T}) e^{jp\mu\omega} )^{(r)} d\omega}{\int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(e^{-j\omega T}) \cdot H(e^{j\omega T}) d\omega} \quad (3-10)$$

また、周波数特性を振幅特性と位相特性とに分けて書き換え、式 (3-10) に代入すれば、パワー中心がフィルタの振幅特性と位相特性とで表される。

$$p_{\mu} = \frac{\int_{-\pi/T}^{\pi/T} A^2(\omega) \cdot \theta'(\omega) d\omega}{\int_{-\pi/T}^{\pi/T} A^2(\omega) d\omega} \quad (3-11)$$

ここで、 $A(\omega)$  は振幅特性、 $\theta(\omega)$  は位相特性である。

## 4. FIR直接構成におけるモーメントの係数感度

フィルタの係数が量子化され、量子化誤差が生ずる。そのため、モーメントは理論値から変動する。モーメントが語長によってどのように変動するかは係数感度を用いて評価できる。

### 4.1 モーメントによる係数感度の評価式

フィルタの係数を  $a_i$ ,  $a_i$  の量子化誤差を  $da_i$ , 量子化誤差を生じる係数の総数を  $N$  とすると、量子化誤差による  $r$  次モーメントの変動は次式で表される。

$$d\mu_r = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial \mu_r}{\partial a_i} da_i \quad (4-1)$$

式 (4-1) の偏微分項  $\partial \mu_r / \partial a_i$  はモーメントの係数感度と呼ばれ、係数量子化によるモーメントの変動の度合を表す。

そして、モーメントの係数感度の自乗和は次式で定義される。

$$Ss(\mu_r) = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial \mu_r}{\partial a_i} \right)^2 \quad (4-2)$$

例えば、係数が固定小数点表示であり、小数点以下  $Q$  ビットで 0 捨 1 入によって量子化を行なうと仮定すると、量子化誤差は式 (4-3) によって評価できる。 $da$  は量子化誤差の最大値である。

$$|da_i| \leq 2^{-(Q+1)} = da \quad (4-3)$$

そして、係数量子化の影響によるモーメントの変動量  $d\mu_r$  は次式で評価される。

$$|d\mu_r| \leq \sqrt{N \cdot Ss(\mu_r)} \cdot da \quad (4-4)$$

よって、係数感度の自乗和を求めれば、上式を用いて、係数語長によるモーメントの変動が推定できる。

式 (4-1)、(4-2) と (4-4) はパワー・モーメントにも適用する。

### 4.2 FIR 直接形構成における通常モーメントの係数感度

直接形構成された FIR フィルタにおいては、伝達関数が次式で表される。

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot z^{-i} \quad (4-5)$$

上式と通常モーメントの定義式から、係数に対する一次偏微分を求めれば、通常モーメントの係数感度の一般式が導かれる。

$$\frac{\partial \mu_r}{\partial a_i} = \frac{(iT - \mu)^r - r(iT - \mu)\mu_{r-1} - \mu_r}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i} \quad (4-6)$$

式 (4-6) より、 $r$  次通常モーメントの係数感度は  $r$  より低い次数のモーメントによって簡単に得られる。

### 4.3 直接形構成におけるパワー・モーメントの係数感度

同様に、パワー・モーメントの定義式と伝達関数から、パワー・モーメントの係数感度の一般式も簡単に求めることができる。それを式 (4-7) に示す。

$$\frac{\partial p_{\mu r}}{\partial a_i} = \frac{2a_i \{ (iT - p\mu)^r - r p_{\mu r} - r p_{\mu r-1} (iT - p\mu) \}}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i^2}$$

(4-7)

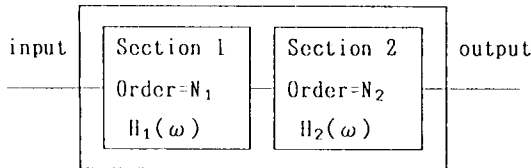
通常モーメントの場合と同様に、 $r$  次パワー・モーメントの係数感度が  $r$  より低い次数のパワー・モーメントによって簡単に得られる。

## 5. 縦続形構成におけるモーメントとその係数感度

### 5.1 FIR 縦続形構成におけるモーメントとその係数感度

FIR フィルタ構成では、一般に直接構成より、縦続構成の方が量子化による係数感度が低いことが知られている。縦続形構成におけるモーメントとその係数感度の定義、全システムのモーメントの係数感度と各段のモーメントの係数感度の間の関係を、この章で検討する。

本論文では最も簡単な 2 段縦続形構成を考える。システム構成を図 1 に示す。



Order=N, Transfer Function= $H(\omega)$

$$\max_{\omega} |H_1(\omega)| = 1 \quad \max_{\omega} |H_2(\omega)| = 1$$

Fig. 1 2-stage cascade form of FIR digital filter

このような FIR フィルタの 2 段縦続形構成では、各段は直接構成で構成されている。伝達関数は次式で表される。

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot z^{-i} \\ &= \left( \sum_{l=0}^{N_1-1} a_{1l} \cdot z^{-l} \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{N_2-1} a_{2k} \cdot z^{-k} \right) \\ &= H_1(z)H_2(z) \end{aligned} \quad (5-1)$$

ここで  $H_1(z)$ ,  $a_{1l}$ ,  $N_1$  と  $H_2(z)$ ,  $a_{2k}$ ,  $N_2$  は、それぞれ一段目と二段目の伝達関数、係数、次数である。

システム全体と各段の波形中心を  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $r$  次波形中心回りのモーメントを  $\mu_r$ ,  $\mu_{1r}$ ,  $\mu_{2r}$  と記すと、システム全体のモーメントは各段のモーメントと次式のような関係を持つ。

$$\begin{aligned} \mu_r &= \sum_{i=0}^r \sum_{l=0}^i \sum_{k=0}^{i-1} \binom{n}{i} \binom{i-1}{l} \binom{i-1}{k} \binom{j}{l} \\ &\quad \cdot (-1)^{r-1} (\mu_1 + \mu_2)^{r-1} \mu_{1l} \mu_{2j} \mu_{2k}^{i-1-k} \mu_{2k} \end{aligned} \quad (5-2)$$

低次モーメントの場合は、システム全体のモーメントは各段のモーメントと線形関係を持つ。

$$\mu_r = \mu_{1r} + \mu_{2r} \quad r \leq 3 \quad (5-3)$$

しかし、高次モーメントになると、線形関係が失われる。例えば、4 次モーメントの場合は、式 (5-4) のような関係となる。

$$\mu_4 = \mu_{14} + 6\mu_{12} \cdot \mu_{22} + \mu_{24} \quad (5-4)$$

高次モーメントに対する一般式の導出は難しく、本論文では考慮していない。

モーメントの係数感度も同様の関係を持つ。 $r \leq 3$  の場合、係数感度は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \mu_r}{\partial a_i} = \frac{\partial \mu_{1r}}{\partial a_{1i}} + \frac{\partial \mu_{2r}}{\partial a_{2i}} \quad (5-5)$$

$r = 4$  の時、係数感度は、式 (5-6) から計算できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_4}{\partial a_i} &= \frac{\partial \mu_{14}}{\partial a_{1i}} + 6\mu_{22} \frac{\partial \mu_{12}}{\partial a_{1i}} \\ &\quad + 6\mu_{12} \frac{\partial \mu_{22}}{\partial a_{2i}} + \frac{\partial \mu_{24}}{\partial a_{2i}} \end{aligned} \quad (5-6)$$

したがって、低次モーメントに対しては、各段の感度が下がれば、システム全体の感度は下がると言える。

### 5.2 IIR フィルタのモーメントとその係数感度

IIR フィルタの伝達関数は、一般に分母と分子とに分けられる。

$$H(\omega) = H_N(\omega)/H_D(\omega) \quad (5-7)$$

分母を一段目、分子を二段目に、各段の内部では直接形で構成する。このように構成された IIR システム構成を図 2 に示す。

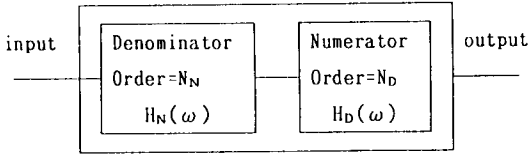

 Transfer Function  $H(\omega)$ 

Fig. 2 Structure of IIR digital filter

このような構成は、FIR 2 段縦続構成に似ているため、モーメントとその係数感度の式は簡単に IIR フィルタに拡張できる。

3 次以下の低次モーメントに対しては、フィルタ全体のインパルス応答のモーメントとその係数感度が分母と分子とで線形関係を持つ。

$$\mu_r = \mu_{Nr} - \mu_{Dr} \quad r \leq 3 \quad (5-8)$$

$$\frac{\partial \mu_r}{\partial a_i} = \frac{\partial \mu_{Nr}}{\partial a_{Ni}} - \frac{\partial \mu_{Dr}}{\partial a_{Di}} \quad (5-9)$$

しかし、高次モーメントは非線形関係である。例えば、4 次モーメントの場合は、モーメントとその係数感度は式 (5-10)、(5-11) のようになる。

$$\mu_4 = \mu_{N4} - 6\mu_{N2} \cdot \mu_{D2} + 6(\mu_{D2})^2 - \mu_{D4} \quad (5-10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_4}{\partial a_i} = & \frac{\partial \mu_{N4}}{\partial a_{Ni}} - 6\mu_{D2} \left( \frac{\partial \mu_{N2}}{\partial a_{Ni}} - \frac{\partial \mu_{D2}}{\partial a_{Di}} \right) \\ & - 6(\mu_{N2} - \mu_{D2}) \frac{\partial \mu_{D2}}{\partial a_{Di}} - \frac{\partial \mu_{D4}}{\partial a_{Di}} \end{aligned} \quad (5-11)$$

ここで、 $a_{Ni}$ 、 $a_{Di}$  はそれぞれ分母と分子の係数である。

## 6. 通常モーメントとフィルタの零点との関係

係数量子化により、フィルタの零点は理論値から変動する。また、零点の微小変動によってモーメントは理論値から変化する。係数量子化の影響で、モーメントの変動、フィルタの零点の移動に注目し、下記の評価式を提案する。

$$|dm_r| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \left| \frac{\partial m_r}{\partial z_i} \right| \sum_{k=0}^{N+1} \left| \frac{\partial z_i}{\partial a_k} \right| \right\} \cdot da \quad (6-1)$$

式 (6-1) において、最初の偏微分項は零点の変化によるモーメントの変動を表し、二番目の偏微分項は係数量子化による零点の変動を表す。

以下、この式を導出する。前述のように、低次モーメントはフィルタ特性と深い関係を持ち、縦続形構成では線形性を持つ。従って、ここでは低次モーメントのみについて検討する。

### 6.1 原点回りのモーメントについて

伝達関数を次式のように書き換える。

$$H(\omega) = a_0 \cdot z^{-N} \cdot \prod_{i=1}^N (z - z_i) \quad (6-2)$$

原点回りのモーメントの定義式から、3 次までのフィルタの零点を用いたモーメントの表現式は式 (6-3)、(6-4)、(6-5) のようになる。

$$m_1 = N - \sum_{i=0}^N \frac{1}{1 - z_i} \quad (6-3)$$

$$m_2 = N(N+1) - 2N \sum_{i=0}^N \frac{1}{1 - z_i} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i}}^N \frac{1}{(1 - z_i)(1 - z_n)} \quad (6-4)$$

$$\begin{aligned} m_3 = & -N(N+1)(N+2) + 3N(N+1) \sum_{i=0}^N \frac{1}{1 - z_i} \\ & - 3N \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i}}^N \frac{1}{(1 - z_i)(1 - z_n)} \\ & + 3N \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i}}^N \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i, k \neq n}}^N \frac{1}{(1 - z_i)(1 - z_n)(1 - z_k)} \end{aligned} \quad (6-5)$$

そして、上式により、両辺を零点に対して偏微分をとれば、モーメントの係数感度の表現式が得られ、式 (6-6)、(6-7)、(6-8) のようになる。

$$\frac{\partial m_1}{\partial z_j} = \frac{1}{(1 - z_j)^2} \quad (6-6)$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial z_j} = \frac{2N}{(1 - z_j)^2} - \frac{1}{(1 - z_j)^2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i, n \neq j}}^N \left( \frac{1}{1 - z_i} + \frac{1}{1 - z_n} \right) \quad (6-7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_3}{\partial z_j} = & \frac{-3N(N+1)}{(1 - z_j)^2} + \frac{3N}{(1 - z_j)^2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i, n \neq j}}^N \left( \frac{1}{1 - z_i} \right. \\ & \left. + \frac{1}{1 - z_n} \right) + \frac{1}{(1 - z_j)^2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i, n \neq j}}^N \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i, k \neq n, k \neq j}}^N \left( \frac{1}{(1 - z_i)(1 - z_n)} + \frac{1}{(1 - z_i)(1 - z_k)} \right) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{(1-z_k)(1-z_n)}\} \quad (6-8)$$

## 6.2 波形中心回りのモーメントについて

モーメントの定義式より、波形中心回りのモーメントが原点中心回りのモーメントと下記のような関係を持つ。

$$\mu_r = \sum_{k=1}^r C_r \cdot (-1)^{r-k} \cdot \mu^{r-k} \cdot m_k \quad (6-9)$$

式(6-9)の3次までは、式(6-10)、(6-11)、(6-12)のようになる。

$$\mu = m_1 \quad (6-10)$$

$$\mu_2 = -2m_1^2 + m_2 \quad (6-11)$$

$$\mu_3 = 3m_1^3 - 3m_1 \cdot m_2 + m_3 \quad (6-12)$$

式(6-10)、(6-11)、(6-12)を用いて、原点回りのモーメントから波形中心回りのモーメントを計算するのは簡単である。また、それらの式について、両辺の導関数を求めれば、原点回りのモーメントの係数感度と波形中心回りのモーメントの係数感度との関係式が得られる。それらを式(6-13)、(6-14)、(6-15)に示す。

$$\frac{\partial \mu}{\partial z_j} = \frac{\partial m_1}{\partial z_j} \quad (6-13)$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial z_j} = -4m_1 \frac{\partial m_1}{\partial z_j} + \frac{\partial m_2}{\partial z_j} \quad (6-14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_3}{\partial z_j} = & -9m_1^2 \frac{\partial m_1}{\partial z_j} - 3m_1 \frac{\partial m_2}{\partial z_j} \\ & - 3m_2 \frac{\partial m_1}{\partial z_j} + \frac{\partial m_3}{\partial z_j} \end{aligned} \quad (6-15)$$

## 6.3 FIR フィルタの根感度について

評価式(6-1)の第二項目の偏微分項は根感度と呼ばれ、次式で求められる<sup>12)</sup>。

$$\frac{\partial z_i}{\partial a_k} = \frac{z_i^{-k}}{z_i^{-N} \cdot a_0 \cdot \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N (z_i - z_n)} \quad (6-16)$$

量子化されたすべての係数に対する根感度の絶対値和は次式で計算できる。

$$\sum_{k=0}^N \left| \frac{\partial z_i}{\partial a_k} \right| = \frac{\sum_{n=0}^N |z_i^{-n}|}{\left| z_i^{-N} \cdot a_0 \cdot \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N (z_i - z_n) \right|} \quad (6-17)$$

z-平面の単位円上にある零点に対して、式(6-17)は式(6-17')のようになる。

$$\sum_{k=0}^N \left| \frac{\partial z_i}{\partial a_k} \right| = \frac{N+1}{a_0 \cdot \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |z_i - z_n|} \quad (6-17')$$

z-平面の単位円上にない零点  $z_i$  に対しては、z-平面の原点からの距離を  $r_i$ 、角度を  $\theta_i$  とすると、零点は次式で表すことができる。

$$z_i = r_i \cdot e^{j\theta_i}$$

したがって、式(6-17)は次式のようになる。

$$\sum_{k=0}^N \left| \frac{\partial z_i}{\partial a_k} \right| = \frac{\frac{r_i^N - r_i}{1 - r_i}}{a_0 \cdot \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |z_i - z_n|} \quad (6-17'')$$

前式により、評価式(6-1)がフィルタの零点のみと関係のあることが明らかである。また、フィルタの零点の配置が与えられれば、簡単に評価できるので、計算量はかなり減少する。すなわち、式(6-1)を用いて、与えられたフィルタの零点の配置によって簡単に係数量子化に対するモーメントの変動量の推定が可能となる<sup>9)</sup>。

## 7. む す び

本文では、時間領域で評価尺度として用いられているデジタルフィルタのインパルス応答の通常モーメントを、パワー・モーメントに拡張し、通常及びパワー・モーメントの係数感度を検討し、係数量子化によるモーメントの評価式を提案して、周波数特性との関係を検討した。また、2段縦続形構成されたFIRフィルタにおけるモーメントとその係数感度及び、モーメントとフィルタの零点との関係をも考察した。

提案した評価式の実際のフィルタ設計への適用については、今後の検討課題である。

## 参考文献

- 1) Chan, D.S.K. and Rabiner, L.R., "Analysis of Quantization Errors in the Direct Form for Finite Impulse Response Digital Filters," IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, AU-21, 4, pp. 354-366, Aug. 1973.
- 2) Papoulis, Athanasios, "Signal analysis," McGraw-Hill Book Company, 1977, pp. 102-115.
- 3) 吉川, 中越, 村上: "FIR デジタルフィルタの波形モーメントの係数感度について", 信学論(A), J66-A, 4, pp. 328-335 (昭 58-04).
- 4) 吉川, 小西: "係数感度に関する FIR デジタルフィルタの波形モーメントによる検討", 電子通信学会論文誌, '85/7, Vol. J68-A No. 7.
- 5) 吉川, 小西: "波形モーメントによる FIR 線形位相ディジタルフィルタの評価", CAS85-43, p. 87-94 (1985).
- 6) YOSHIKAWA, KIJIMA, IIDA: "Cross Moments and Their Applications", Trans. IEICE, VOL. E73, NO. 3 MARCH 1990, PP. 373-378.
- 7) T. Yoshikawa, Y. Wang, "On Coefficient Sensitivity of Power Moment for FIR Digital Filter," IEICE Technical Report, CAS90-61, Aug. '90.
- 8) T. Yoshikawa, Watanabe, "On Implement Method of a Linear Phase FIR Digital Filter with Low Sensitivity by 2-stage Cascade Form," IEICE Technical Report, '90/3.
- 9) T. Yoshikawa, Y. Wang, "Relations between Sensitivity of Moment and Root in Cascade Form FIR Filters," IEEE International Symposium on Industrial Electronics Technical Report, May, 1992.