

カオスセルオートマトンのダイナミクス

シィハヌーネティ*・中 川 匡 弘*

The dynamics of Chaos Cellular automaton

Neti SRIHANU*, Masahiro NAKAGAWA*

Abstract : In this study, a Chaos Cellular Automaton (CCA) is proposed as a generalized model of the Life Game with a nonmonotonous map. The spatio-temporal pattern is generated based on CCA, and the dynamical properties will be analyzed in terms of the Lyapunov spectra and the fractal dimensions of spatial pattern. The results from numerical calculations show that, as the slope of non-monotonous map is varied from infinity to a small value, the dynamics of cells is changed from a periodic state to a weakly chaotic state, and then to a deeply chaotic state, will be returned to a weakly chaotic state, and finally to a periodic state again. The fractal dimension indicates the complexity of spatial patterns. The generation of the chaotic spatio-temporal pattern is found to be realized by this model. Moreover, a weakly chaotic state is considered to be fascinating in analogy to the artificial life model.

Keywords : Cellular Automaton, Chaos Cellular Automaton, spatio-temporal pattern

1. 序 論

これまでの近代科学の基礎は、さまざまな現象を簡単な式や法則及び原理を用いて表すことにより確立されてきた。複雑現象の例として、乱流などのカオス的な流れ、免疫や生命現象である。そして、複雑現象を理解するために、いろいろなモデルが提案されてきた。

1981年に、Laplace 場の中でのパターン形成が T.A.Witten と L.M.Sander により提案された¹⁾。そのモデルは、最も単純な線形モデルの拡散に支配された凝集モデル (Diffusion-Limited-Aggregation Model : DLA) である。DLA は、時間、空間と状態は全て離散的なモデルであり、そのパターン構造はフラクタルであることが発見された。

次いで、1984年に、S.Wolfram は、セルオートマトン (Cellular Automaton : CA) の動的な挙動に基づいて、4つのクラスを見出した²⁾。クラス1は、空間パターンが不動点に収束する安定状態であり、クラス2は、周期的なパターンになる周期状態、クラス3は、非周期的な構造パターンを形成するカオス状態であり、さらに、クラス4は、局所的な構造を持つ複雑なパターンを形成する複雑系である。C.Langton は、CAの研究を基に、「カオスの縁の生命」を提案し³⁾、周期解とカオスとの境界にある複雑系が、生命の挙動に対応すると主張している。

一方、K.Kaneko は非線形モデルとしてカップルド・マップ・ラティス (Coupled Map Lattice Model : CML) に関する研究を報告した⁴⁾。CMLでは、時間、空間は離散的でありながらセルの状態は連続的

Table 1 Comparison between each model

モ デ ル	時 間	空 間	状 態	不変領域
Diffusion-Limited-Affregation Model (DLA)	D	D	D	N
Cellular Automaton Model(CA) (Life Game)	D	D	D	Y
Coupled Map Lattice Model (CML)	D	D	C	N
Chaos Cellular Automaton Model (CCA) (Chaos Life Game)	D	D	C	Y

D=離散(Discrete), C=連続(Continuous), N=なし(No), Y=あり(Yes)

原稿受付：平成11年5月21日

*長岡技術科学大学

なモデルである。CA と CML は時空間が離散的である。また、CA の状態は離散的であるため、自らは情報が創ることができないという欠点があった。

本論文では、CA の一例として、J. Conway により提案されたライフゲーム (Life Game) を取り上げる⁵⁾⁻¹¹⁾。ライフゲームは、Table.1 に示したように、時間、空間、状態は離散的であり、状態変化領域が存在するモデルである。我々は非単調型遷移関数を導入し、非線形場の CA として、CA と CML との中間に位置するカオスセルオートマトン (Chaos Cellular Automaton : CCA) を提案する。さらに、CCA により形成されたパターンの時空間特性について検討する。第2節で、CA と CCA の2次元モデルのライフゲーム、およびカオスを導入した CCA について述べ、また、検討方法として、リアプノフ解析とパターンのフラクタル次元について説明する。第3節では、シミュレーション結果および考察を述べ、最後に、第4節でまとめを述べる。

2. 理 論

本節では、CA と CCA について説明し、次に、カオスの特徴の1つである軌道不安定性を定量的に評価するためのリアプノフスペクトル解析¹²⁾、さらに、空間的な複雑を示すフラクタル次元とパターンの相関関数との関係について説明する¹³⁾。

2.1 セルオートマトン (Cellular Automaton : CA)

CA では、あるローカルな条件の下で、格子空間内を隣のセルの状態と自分の状態から自分の次ステップの状態を決めるが、時空間的なパターンは、情報を受け取ると形を変えながら移動するという特性を持っている。

一般的には、CA は格子の次元を d とし、時刻 t と位置 $i = (i_1, i_2, \dots, i_d)$ の座標は整数をとる。また、各

セルは、0 から $m-1$ までの m 個の状態のうちの一つをとる。位置 i のセルの時刻 t での状態を $\sigma_i(t)$ で表す。位置 i のセルの次の時刻 $t+1$ での状態 $\sigma_i(t+1)$ は、セル i の k 個の近傍 $i+r_1, \dots, i+r_k$ のセルの状態から関数 $f(\cdot)$ により決められる：

$$\sigma_i(t+1) = f(\sigma_{i+r_1}(t), \dots, \sigma_{i+r_k}(t)), \quad (1)$$

ここで、 $f(\cdot)$ は状態の遷移関数 (transition function) である。

CA の2次元モデルより、ここで、我々はライフゲームを取り上げる。ライフゲームは、2 状態 (0 と 1) 8 近傍 (周囲の8つのセル) の CA であり、そして、ライフゲームのルールは近傍セルの状態の和が2のときに、セルの状態は不変、3のときにはセルの状態が1となり、それ以外のときにはセルの状態は0になる。ここで、セルの状態の更新則は、数式で表すと次式で定義される。

$$\sigma_{ij}(t+1) = \sum_{kl} W_{ij,kl} S_{kl}(t). \quad (2)$$

$$S_{ij}(t+1) = \begin{cases} 1 & (\sigma_{ij}(t) = 3) \\ S_{ij}(t) & (\sigma_{ij}(t) = 2) \\ 0 & (\sigma_{ij}(t) \neq 2, 3) \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $\sigma_{ij}(t)$ $S_{ij}(t)$ は、それぞれ、 (ij) 番目のセルの内部状態と出力、 $W_{ij,kl}$ は (k,l) 番目のセルから (i,j) 番目のセルへの結合荷重である。ライフゲームの場合には、結合荷重は $1/4$ に固定されており、その非単調型遷移関数は、Fig.1 で示される。また、 a, c, S_s, S_e はパラメータであり、 S_s から S_e までの領域は状態不変領域である。

2.2 カオスセルオートマトン (Chaos Cellular Automaton : CCA)^{14), 15)}

CCA の状態は、次式のように定式化される。

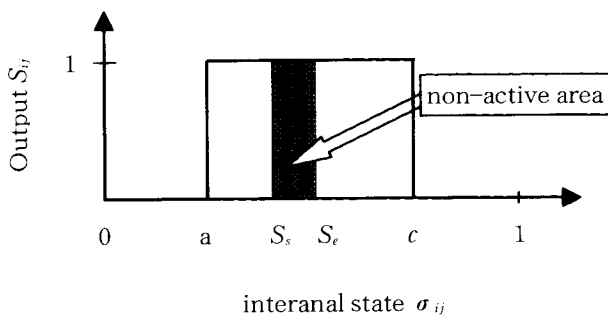


Fig. 1 The transfer function of Life Game

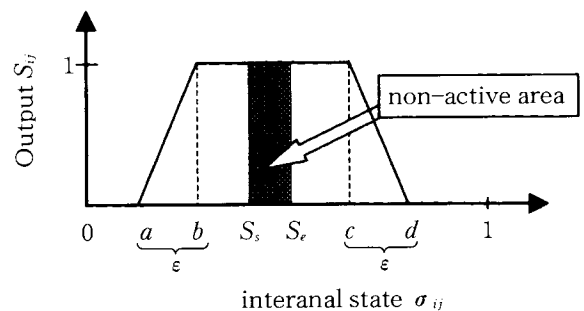


Fig. 2 The transfer function of a Chaos Life Game.

$$\sigma_{ij}(t+1) = k_e \sigma_{ij}(t) + \sum_{kl} W_{ij,kl}(t) S_{kl}(t) - a S_{ij}(t) \quad (4)$$

$$S_{ij}(t+1) = f(\sigma_{ij}(t+1)). \quad (5)$$

ここで、 $\sigma_{ij}(t)$ と $S_{ij}(t)$ は、それぞれ (i, j) 番目のセルの状態と出力、 k_e は記憶定数、 $W_{ij,kl}$ は (k, l) 番目のセルから (i, j) 番目のセルへの結合荷重であり、 α は不応性係数である。

さらに、 (k, l) 番目のセルの出力と (i, j) 番目のセルの出力は共に大きい場合、その間の結合荷重も大きくなると考えられるので、ここで、CCAの結合荷重には、ヘブ則による学習法を用いる。ヘブ則は、

$$\frac{DW_{ij,kl}(t)}{Dt} = -\frac{W_{ij,kl}(t)}{\tau_w} - \delta \frac{\partial E}{\partial W_{ij,kl}(t)}, \quad (6)$$

により定義され、ここで、 δ は定数である。そして、上式から(7)式が得られる。

$$W_{ij,kl}(t+1) = \left\{ 1 - \frac{1}{\tau_w} \right\} W_{ij,kl}(t) + \delta \cdot S_{ij}(t) S_{kl}(t). \quad (7)$$

ここで、

$$k_w = 1 - \frac{1}{\tau_w}, \quad (8)$$

と定義される。また、その結合荷重が発散しないように、忘却を伴う結合荷重の更新式は

$$W_{ij,kl}(t+1) = k_w W_{ij,kl}(t) + \delta \cdot (W_0 - |W_{ij,kl}(t)|) S_{ij}(t) S_{kl}(t) \quad (i=k, j=l \text{ を除く}) \quad (9)$$

により定義される。ここで、 w_0 は定数であり、8近傍モデルの場合は $1/8$ に設定される。また、本モデルが用いた非単調型遷移関数は、

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}(t)) &= S_i(\sigma_{ij}(t)) \{1 - H(\sigma_{ij}(t) - S_s) + H(\sigma_{ij}(t) - S_e)\}, \\ &+ S_j(t) \{H(\sigma_{ij}(t) - S_s) - H(\sigma_{ij}(t) - S_e)\} \end{aligned} \quad (10)$$

により定義される。ここで、 $S_i(t)$ と $H(x)$ 関数は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \left[\{H(t-a) - H(t-b)\} \left(\frac{t-a}{\varepsilon} \right) + H(t-b) \right] \\ &- \left[\{H(t-c) - H(t-d)\} \left(\frac{t-c}{\varepsilon} \right) + H(t-d) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (12)$$

CCAの遷移関数はFig.2に示される。 S_s から S_e までの領域は、状態不変領域である。 a, b, c, d は S_i 関数のパラメータである。

2.3リアプノフ解析

CCAのカオス的な特性は、リアプノフスペクトルにより定量化される。ここで、 n 次元の離散力学系

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}(t); \varepsilon, S_s, S_e, a, b, c, d), \\ \mathbf{x}(t) &\in R^N, N=n^2, \end{aligned} \quad (13)$$

を考える。 $\mathbf{x}(t)$ は離散時間 t における状態、以下のよう定義される。

$$\mathbf{x}(t) = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{21}, \dots, \sigma_{nn}). \quad (14)$$

そして、それぞれの $\varepsilon, S_s, S_e, a, b, c, d$ は $\mathbf{x}(t)$ の写像のパラメータであり、 $\mathbf{F}$ は N 次元写像である。

リアプノフスペクトルを求めるために、まず、 $\mathbf{x}(t)$ における微小変位を $\delta \mathbf{x}(t)$ とすると、

$$\mathbf{x}(t+1) + \delta \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{x}(t)), \quad (15)$$

となる。テイラー展開して線形近似することにより、状態 $\mathbf{x}(t)$ における微小変位 $\delta \mathbf{x}(t)$ に関する写像を得る。

$$\delta \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{DF}(\mathbf{x}(t)) \delta \mathbf{x}(t). \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{DF}(\mathbf{x}(t))$ はヤコビ行列であり、 $\mathbf{DF}(\mathbf{x}(t))$ を用いてリアプノフスペクトラムの数値計算は、再構成した N 次元空間の時間 t において互いに直交する単位ベクトルの組 $\mathbf{u}_i(t) (i=1, 2, 3, \dots, N)$ を与え、各ベクトルの変化を調べる。

すなわち、

$$\mathbf{e}_i(t+1) = \mathbf{DF}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}_i(t), \quad (17)$$

により、 $\mathbf{e}_i(t+1) (i=1, 2, \dots, N)$ を求める。その結果 $\mathbf{e}_i(t+1)$ は縮小される方向にはどんどん押しつぶされていくことになるので、これを避けるために、(21)、(22)のグラム-シュミットの直交化によって、 $\mathbf{e}_i(t+1)$ を直交化した $\mathbf{e}_i(t+1)$ を求め、新しい正規直交系 $\mathbf{u}_i(t+1) (i=1, 2, 3, \dots, N)$ へ変換する。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(t+1) &= \mathbf{e}_i(t+1) \\ &- \sum_{j=1}^{i-1} \langle \mathbf{e}_i(t+1), \mathbf{u}_j(t+1) \rangle \mathbf{u}_j(t+1). \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_i(t+1) = \frac{\mathbf{e}_i(t+1)}{\|\mathbf{e}_i(t+1)\|}. \quad (19)$$

ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 、および、 $\|\cdot\|$ は、それぞれベクトルの内積とノルムを表す。次に、各ベクトル $\mathbf{u}_i(t+1)$ ($i=1,2,3,\dots,N$)を式(20)によって再び写像する過程を繰り返す。こうして得られる $\mathbf{e}_i(t)$ の系列を用いると、リアプノフスペクトラム $\lambda_i(t)$ ($i=1,2,3,\dots,N$)は、

$$\lambda_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \log \|\mathbf{e}_i(t)\|, \quad (20)$$

と求められる。リアプノフスペクトラムについて、少なくとも最大リアプノフ指数 $\text{Max}\{\lambda_i(t)\}$ が正であれば、CCAはカオス状態になる。

また、リアプノフ次元(Lyapunov dimension)では、リアプノフ指数を大きい順に並べ替えて加えていったとき、負とならない最大の整数を j とする。このとき、リアプノフ次元 D_L は、

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (21)$$

で与えられる。

2.4空間パターンのフラクタル次元

時空間パターンがカオス的な場合、フラクタル次元はどのように変化するのを調べる。以下にはパターンの相関次元について簡単に説明する¹³⁾。

ここで、2次元相関関数とフラクタル次元の関係は、

$$g(r) \propto \frac{1}{r^{d-D_2}}, \quad (22)$$

により定義された。ここで、 $g(r)$ は2次元相関関数、 D_2 は相関次元である。

ここで、2次元相関関数とフラクタル次元の関係より、パターンのフラクタル次元 D_2 は、

$$D_2 = d - \frac{\Delta[\log\{g(r)\}]}{\Delta\left\{\log\frac{1}{r}\right\}}. \quad (23)$$

から求めることができる。ここで、2次元相関関数 $g(r)$ はパワースペクトル $S_{ff}(u)$ から以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} g(r) &= \langle \delta(x) \delta(x+r) \rangle \\ &= \frac{1}{S} \int d^2x \delta(x) \delta(x+r), \quad (24) \\ &= \frac{1}{S} \int d^2u \exp(2\pi i u \cdot r) S_{ff}(u) \end{aligned}$$

$$S_{ff}(u) = |\Delta(u)|^2, \quad (25)$$

$$\Delta(u) = \int d^2x \exp(2\pi i u \cdot x) \delta(x), \quad (26)$$

ここで、 $\Delta(u)$ は $\delta(x)$ のフーリエ変換である。 $\delta(x)$ は空間パターンの $\{0,1\}$ データである。

3. シミュレーション結果及び考察

本論文では、CCAのセルサイズが 256×256 セルに設定され、また、リアプノフ解析では、 32×32 セルで行った。計算ステップ数は1000ステップである。セル

Table 2 Parameters of Life game and Chaos Life Game.

パラメータ	ライフゲーム	カオスライフゲーム
k_e	—	ϵ
W_{ijkl}	0.125	0.1
α	—	0.219
h	—	1
ϵ	—	0.03~0.35
a	0.15	$0.15 + \epsilon$
b	—	$0.15 - \epsilon$
c	0.4	$0.4 + \epsilon$
d	—	$0.4 - \epsilon$
S_s	0.2	0.2
S_e	0.3	0.3



Fig. 3 Gray scale map

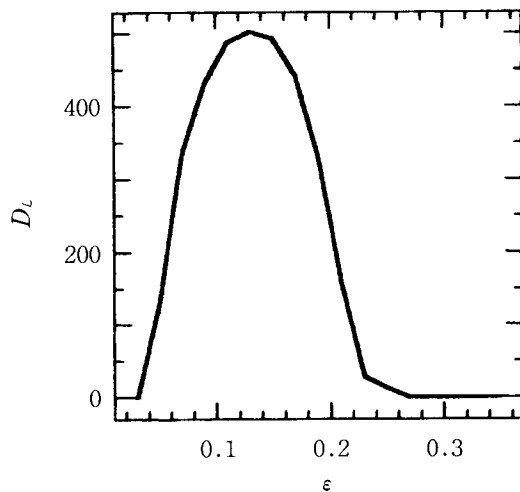


Fig.11 Lyapunov dimension of CCA, starting with a random initial pattern. Pattern size is set to 32×32 cells.

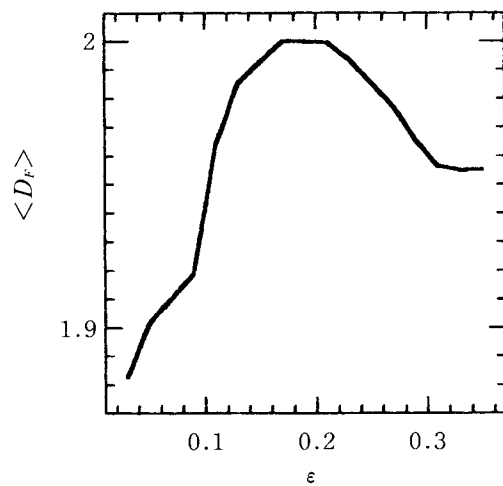


Fig.12 The average of fractal dimension of CCA, starting with a random initial pattern. Pattern size is set to 256×256 cells.

の初期状態は、0～1の乱数を用い、式(4)、(5)、(9)、(10)、(11)と(12)によりシミュレーションを行った。また、各パラメータはTable.2に設定した。出力状態は0から1を256等分し、Fig.3のグレイスケールを割り当て表示する。

結果、まず、Fig.4ではライフゲームによって形成されたパターンが示された。(a)は初期状態であり、(b)～(f)は各時刻の出力パターンを示す。ライフゲームは周りのセルの情報を受けながら、自分の次のステップに変え、周りのセルの状態から、次のステップセルの状態{0,1}を決める。即ち、1の状態を生物が生きており、0を死んだ状態とするなら、回りに仲間が少いと寂しく、多いとフラストレーションで死んでしまうのである。

Fig.5～8では、CCAにより形成されたパターンが示された。CCAは、Fig.2のパラメータ ϵ を変化させることにより、遷移関数の傾きを無限大から0に変えることが可能となり、結果で示したように、セルのダイナミクスを3つの状態に変化することができた。ここで、 ϵ が小さいとき、Figs.5に示されたように、セルは成長しながら、固定パターン、又は周期パターンに収束し、つまり、各セルの状態はランダム状態から2状態(0, 1)になることが確認された。このときの最大リアプノフ指数はFig.9(a)に示したように、最大リアプノフ指数は負の値をとっているため、セルはカオス的でないことが確認された。なお、CCAの定数 k と α を0に設定するとき、このモデルは線形モデルのライフゲームに帰着することが可能である。ここで、我々は、このセルの状態を周期状態と定義する。

次に、 ϵ を大きくすると、セルの状態は0から1ま

での状態をとることが可能となり、その結果はFig.6～8に示される。さらに、Fig.9(b)と(c)から最大リアプノフ指数は正の値をとっているため、これらの条件では、セルの状態はカオス的であることが確認された。また、Fig.6とFig.7に示したように、セルは空間的構造を作り、成長していく。この状態は弱カオス状態と定義され、この状態はC.Langtonにより発見された人工生命に対応していると考えられる。

そして、さらに ϵ を大きくすると、Fig.8で示したように、セルの状態は非周期的な強いカオス的な状態となり、セル構造は消滅することが確認される。この状態はカオス状態と定義される。つまり、強いカオス的な状態では、生命が存在しないことが見出された。

さらに、 ϵ を大きくすると、セルのパターン構造は固定パターンになる。つまり、この状態は周期状態である。また、最大リアプノフ指数は負の値をとるので、カオス的ではないことが確認された。

一方、セルの空間パターンのフラクタル次元は、Fig.10で示したように、 ϵ が小さいとき、現れるパターンの構造は単純であるため、フラクタル次元は低い。そして、 ϵ が大きくなると、パターン構造は複雑になるので、フラクタル次元は高くなり、最後に、固定なパターンになり、フラクタル次元は一定になることが確認された。

リアプノフ次元は、時間的な複雑性を表わす尺度であり、一方、相関次元は空間的な複雑さを表わす尺度である。Fig.11とFig.12より、お互いに正の相関が認められ、本モデルにおいてカオス的な時空間パターンの生成が確認され、その時空間特性は独立ではないことが見出された。

4. ま と め

本論文では、2次元セルオートマトン(CA)のライフゲームとそれを拡張したカオスセルオートマトン(CCA)のカオスライフゲームについて説明し、CCAのカオス的な特性を定量化するためにリアプノフ解析を行い、また、空間的な複雑さを表すフラクタル次元を評価するため、空間パターンの相関次元解析を行った。

CCAは時間空間とともに離散的なダイナミクスで、状態は連続的であり、さらに、状態不変領域が存在するモデルあり、Table.1に示したようにCAとCMLの中間に属していることが確認され、また、CCAのパラメータを変化させることによって、ライフゲームに帰着される。本解析結果より、しきい値勾配のパラメータが大きくなると、Fig.13に示すようにカオスライフゲームの状態は、周期から、弱カオスに入り、そして、最も複雑なカオス状態となり、最終的には周期的な状態になることが見出された。

今後の課題としては、カオスライフゲーム関数の a , b , c と d を自律的に制御した3次元モデルについてカオス・フラクタル特性を解析することがあげられる。

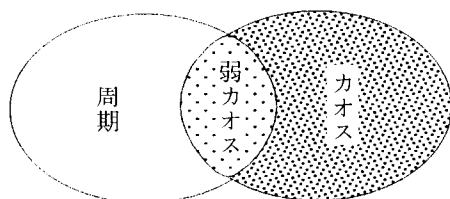


Fig.13 Class of a Chaos Cellular Automaton

参考文献

- 1) T.A.Witten and L.M.Sander, Phys. Rev. Lett. 47, 1400(1981).
- 2) S.Wolfram, "Universality and complexity in cellular automata", Physica 10D (1984) 1-35.
- 3) C.G.Langton, "Life at Edge of Chaos". In C. Langton et al.(eds.) Artificial Life II, Addison-Wesley(1992).
- 4) K.Kaneko, "Period-doubling of kink-antikink pattern, quasi-periodicity in antiferrolike structures and spatial intermittency in coupled map lattices-Toward a prelude to a "field theory of chaos"-", Prog. Theor. Phys. 72, 480(1984b).
- 5) P. Bak, K. Chan and M. Creutz, Self-organized criticality in the 'Game of Life', Nature Vol. 342, 780-782(1989).

- 6) 合原一幸編著, "カオス・カオス理論の基礎とその応用", サイエンス社1997.
- 7) P. Grassberger "Chaos and diffusion in deterministic cellular automata", Physica 10D (1984) 52-58.
- 8) 服部桂, "人工生命の世界", オーム社 1994.
- 9) 人工生命研究会, "人工生命-情報と生命とCGの交差点", 共立出版株式会社 1994.
- 10) 上田完次, 下原勝憲, 伊庭齊志, "人工生命の方法", 株式会社工業調査会 1995.
- 11) 佐野千遙, "知的人工生命の学習進化", 森北出版株式会社 1996.
- 12) 合原一幸編著, "ニューラルシステムにおけるカオス", 東京電機大学出版局1993.
- 13) M. Nakagawa, K. Kobayashi, M. Hori, M. Okabe and Y. Hori: "On the Fractal Distribution of Embryos at Nematic-Isotropic Critical Point", Mol. Cryst. Liq. Cryst., 1991, Vol. 195, 15-26.
- 14) 中川匡弘ら, 平成10年度学長裁量経費によるプロジェクト実施報告書.
- 15) M.Nakagawa: "A Chaos Cellular Automaton", J.Phys.Soc.Jpn.(1999, in press).

付録 A

本文中、式(10)のヤコビ行列 DF を以下に示す。

$$DF(x(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}(t+1)}{\partial \sigma_{11}(t)} & \frac{\partial \sigma_{11}(t+1)}{\partial \sigma_{12}(t)} & \cdots & \frac{\partial \sigma_{11}(t+1)}{\partial \sigma_{NN}(t)} \\ \frac{\partial \sigma_{12}(t+1)}{\partial \sigma_{11}(t)} & \frac{\partial \sigma_{12}(t+1)}{\partial \sigma_{12}(t)} & \cdots & \frac{\partial \sigma_{12}(t+1)}{\partial \sigma_{NN}(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_{NN}(t+1)}{\partial \sigma_{11}(t)} & \frac{\partial \sigma_{NN}(t+1)}{\partial \sigma_{12}(t)} & \cdots & \frac{\partial \sigma_{NN}(t+1)}{\partial \sigma_{NN}(t)} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

ここで、 N はセルサイズである。次に、ヤコビ行列の各要素は以下のように求められる。

1) もし、セルの状態 $\sigma_{ij}(t+1)$ は状態変化領域に入るならば、

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(t+1)}{\partial \sigma_{pq}(t)} = k \delta_{ip} \delta_{jq} + \sum_{kl} W_{ij,kl} \frac{\partial S_{kl}}{\partial \sigma_{pq}}, \quad (A.2)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が求められる。

2) もし、セルの状態 $\sigma_{ij}(t+1)$ は状態不変の領域に入るならば、

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(t+1)}{\partial \sigma_{pq}(t)} = \begin{cases} 1 & ((i,j)=(p,q)) \\ 0 & ((i,j) \neq (p,q)) \end{cases}, \quad (A.3)$$

が求められる。

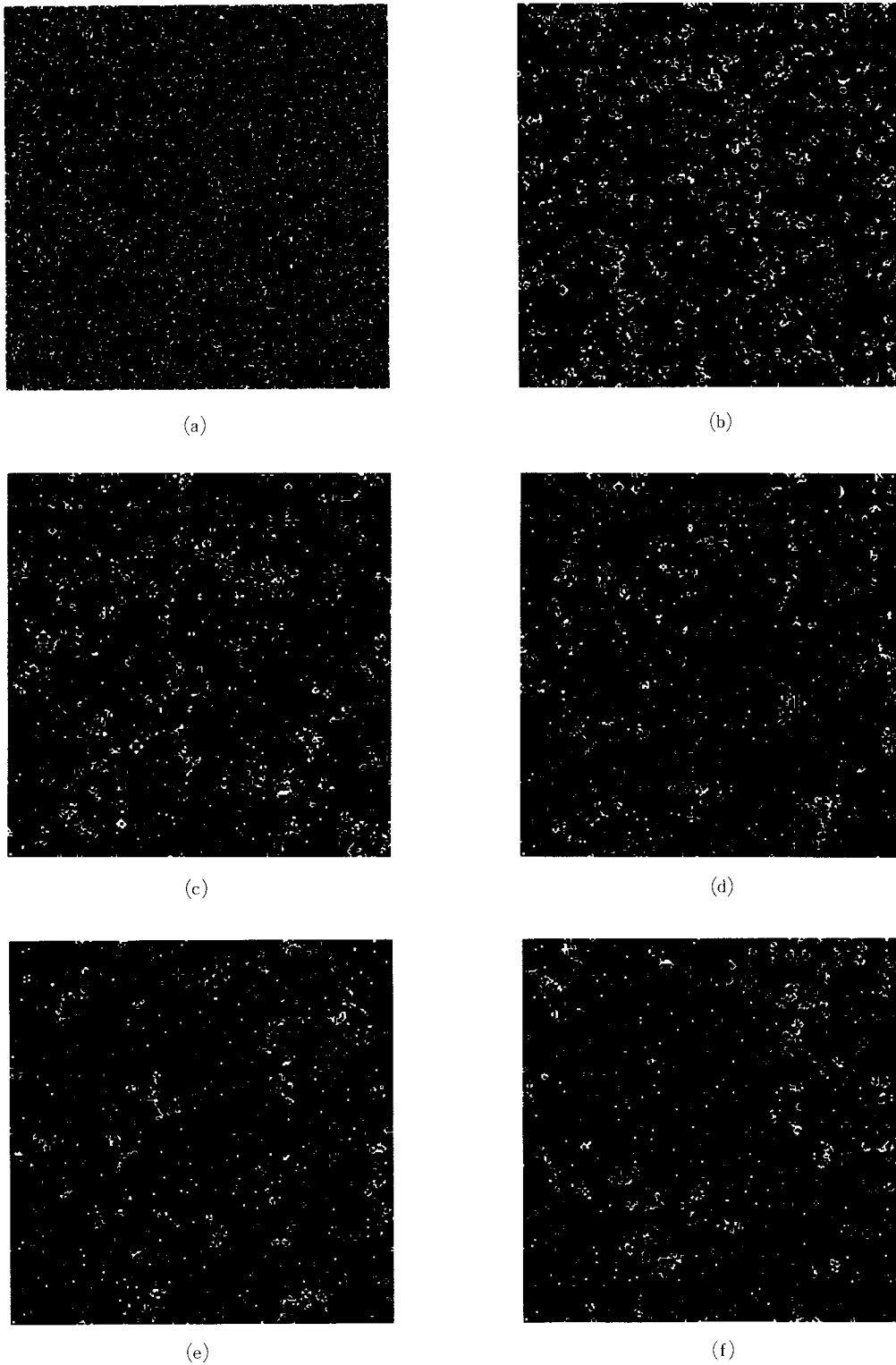


Fig. 4 Snapshot patterns for the Life Game and starting with a random initial condition .
(a) initial pattern (b) at time step 100 (c) at time step 200
(d) at time step 300 (e) at time step 400 (f) at time step 500

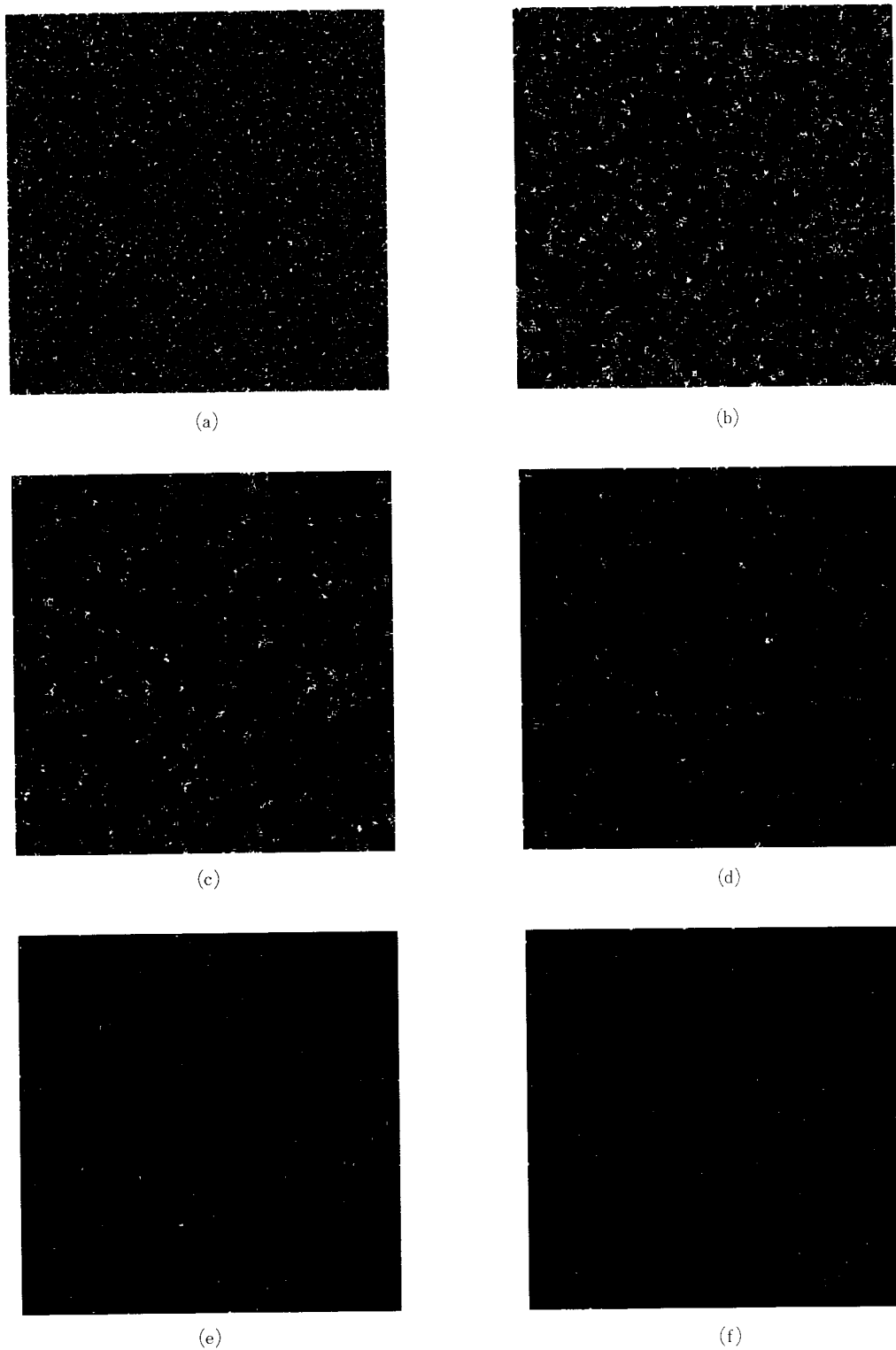


Fig. 5 Snapshot patterns for the Chaos Life Game with $\varepsilon = 0.03$,
and starting with a random initial condition.

(a) initial pattern (b) at time step 5 (c) at time step 10
(d) at time step 15 (e) at time step 20 (f) at time step 25

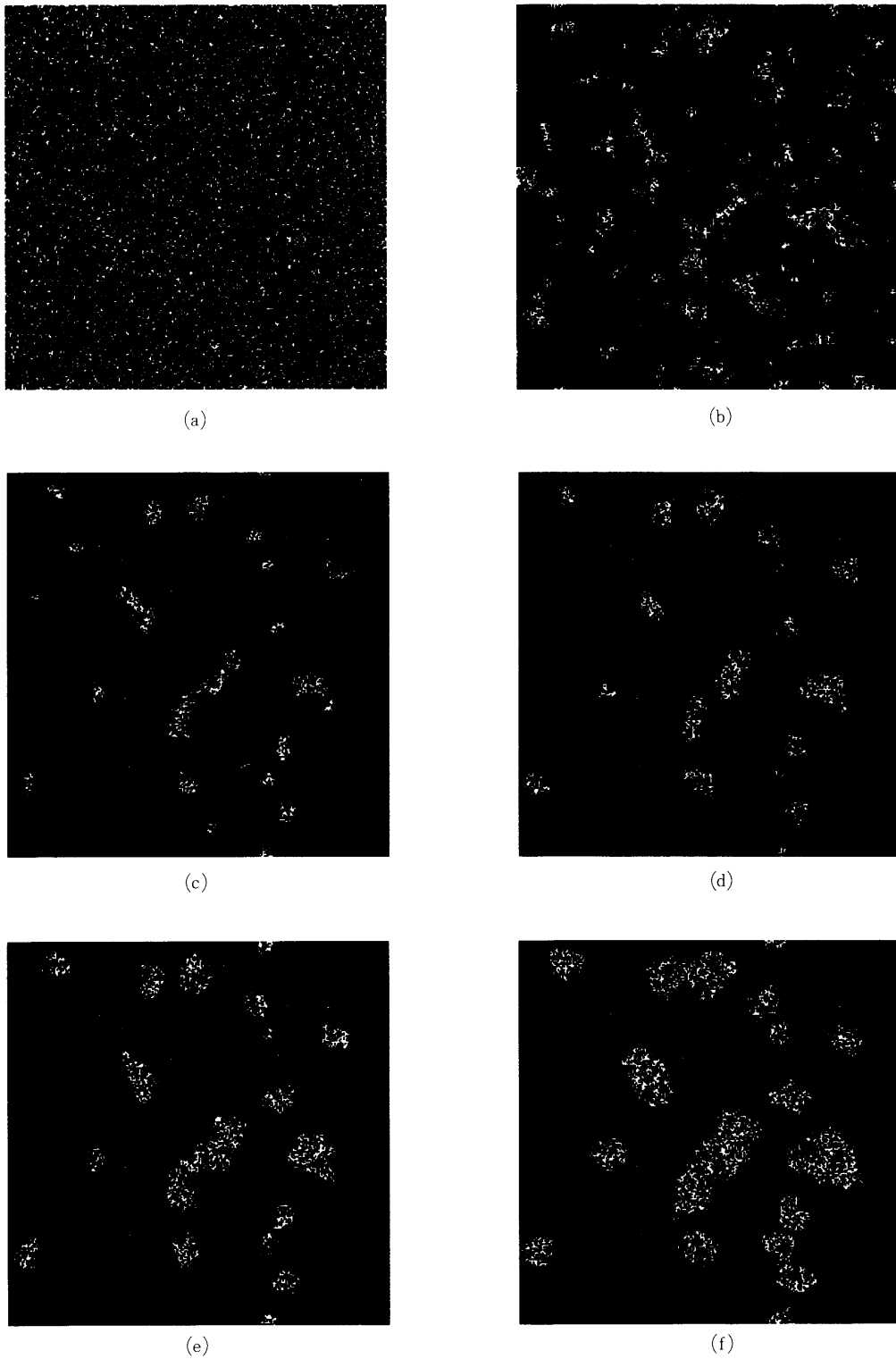


Fig. 6 Snapshot patterns for the Chaos Life Game with $\varepsilon = 0.07$,
and starting with a random initial condition.

(a) initial pattern (b) at time step 50 (c) at time step 100

(d) at time step 200 (e) at time step 300 (f) at time step 500

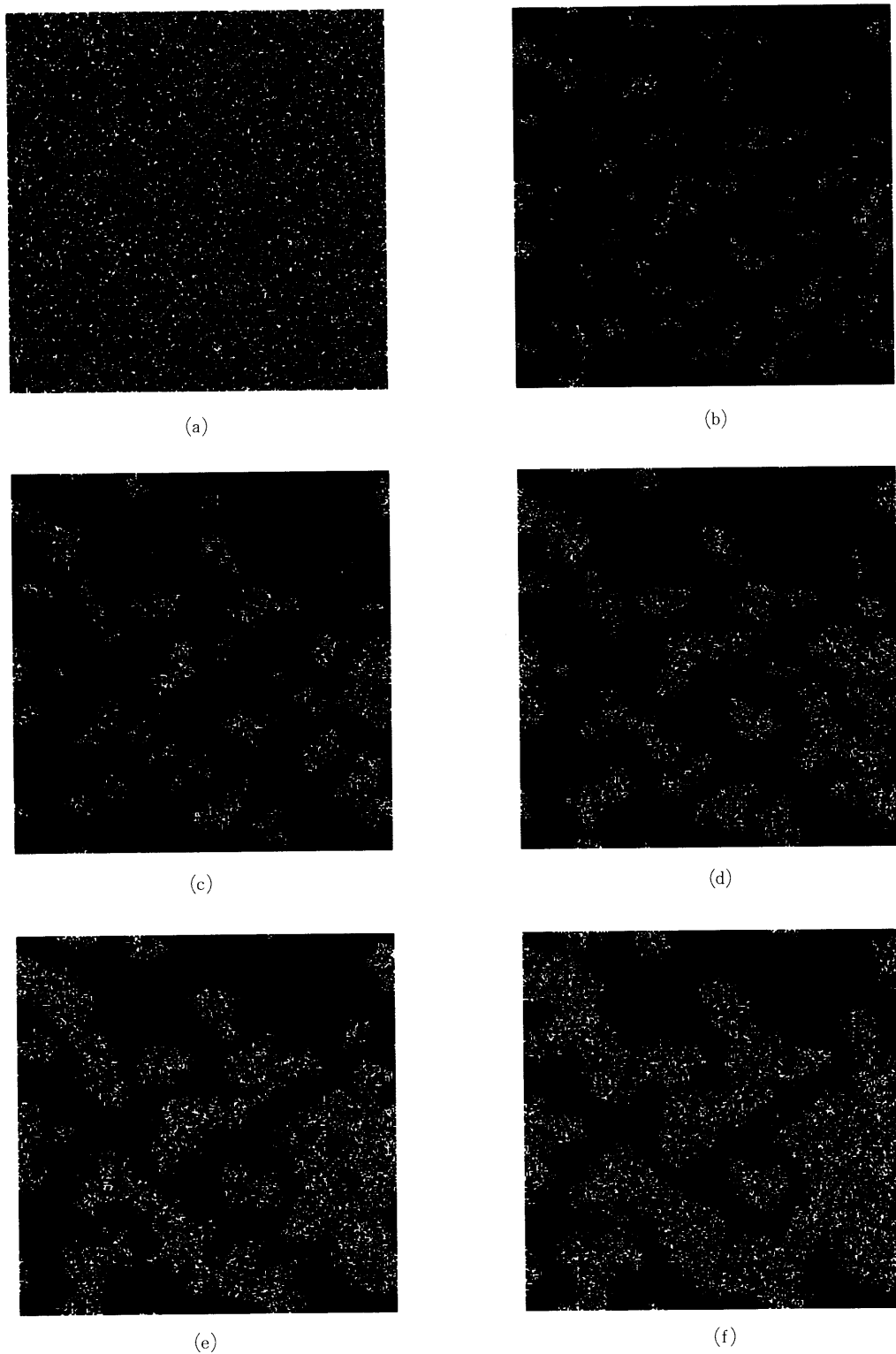


Fig. 7 Snapshot patterns for the Chaos Life Game with $\varepsilon = 0.09$,
and starting with a random initial condition.
(a) initial pattern (b) at time step 100 (c) at time step 200
(d) at time step 300 (e) at time step 400 (f) at time step 500

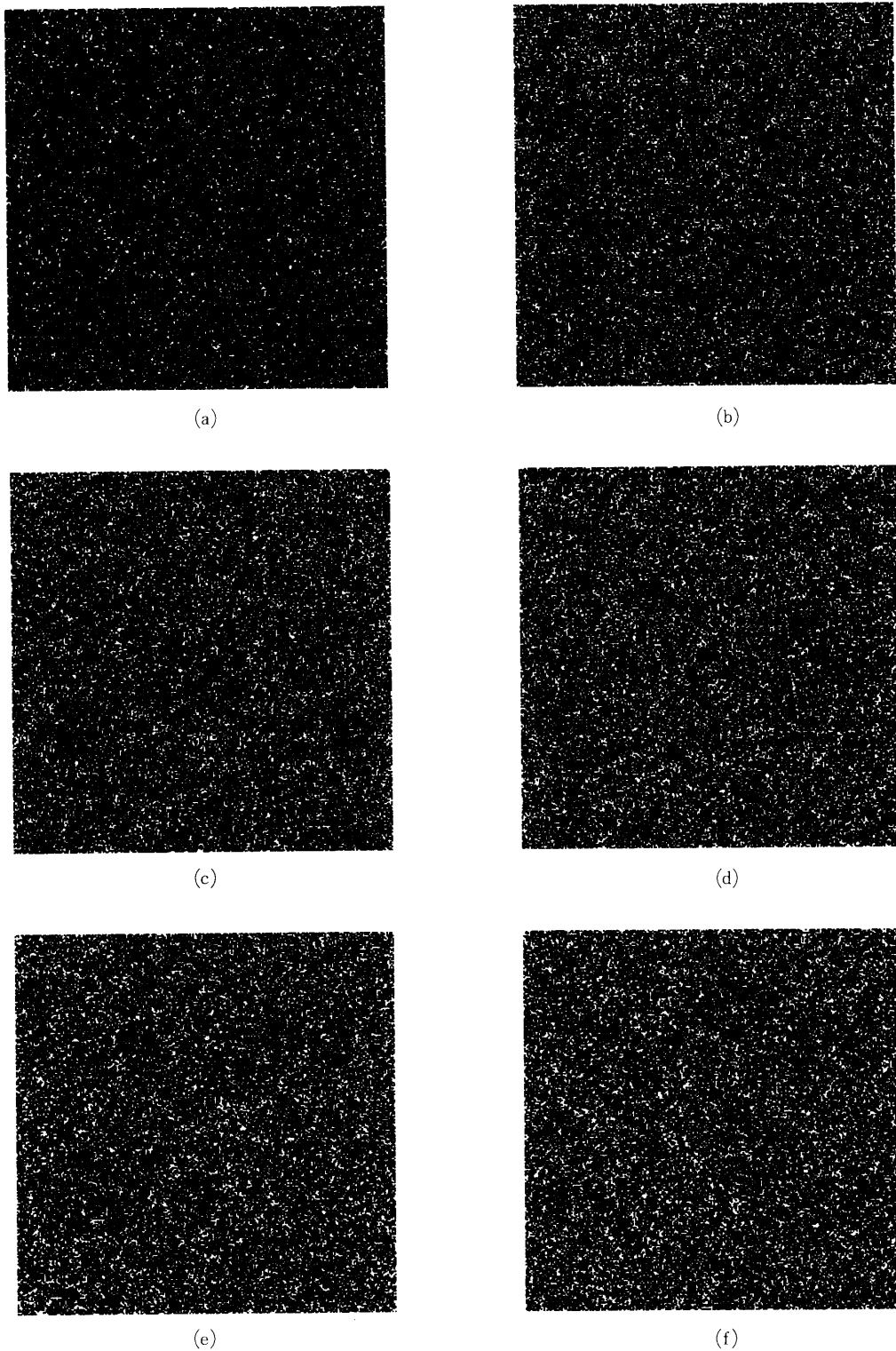


Fig. 8 Snapshot patterns for the Chaos Life Game with $\varepsilon = 0.41$,
and starting with a random initial condition.

(a) initial pattern (b) at time step 5 (c) at time step 10
(d) at time step 15 (e) at time step 20 (f) at time step 25

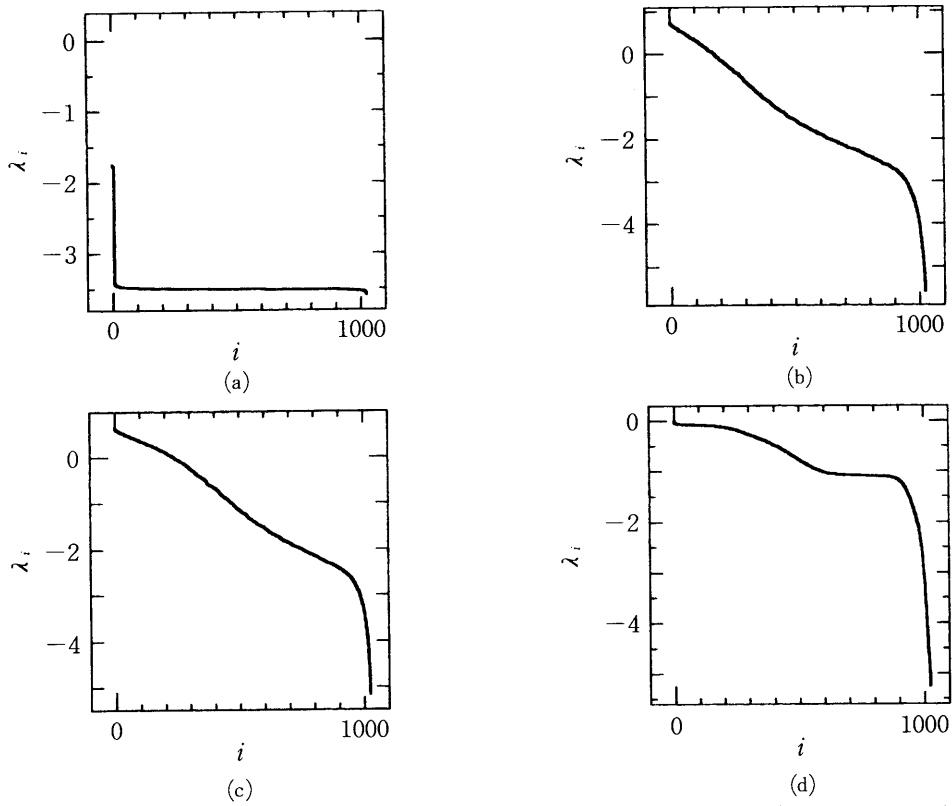


Fig. 9 Lyapunov spectrum of CCA model, starting with a random initial condition. Pattern size is 32×32 cells
 (a) $\varepsilon = 0.03$ (b) $\varepsilon = 0.07$ (c) $\varepsilon = 0.09$ (d) $\varepsilon = 0.35$

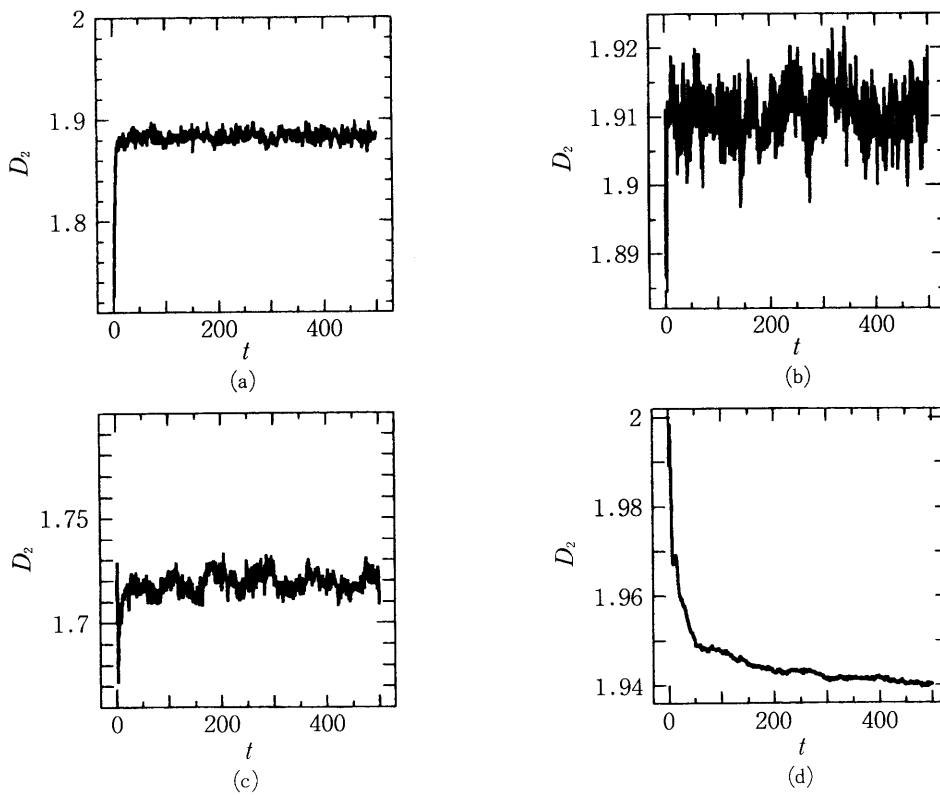


Fig. 10 Fractal dimensions of CCA model, starting with a random initial condition. Pattern size is 32×32 cells
 (a) $\varepsilon = 0.03$ (b) $\varepsilon = 0.07$ (c) $\varepsilon = 0.09$ (d) $\varepsilon = 0.35$