

非圧縮性流体数値コードを用いた密度流の可視化シミュレーション

細山田 得 三・J.F.Atkinson

非圧縮性流体数値コードを用いた密度流の可視化シミュレーション

細山田 得三*・J.F. Atkinson**

Numerical flow visualization for density driven currents
by an incompressible numerical fluid code

Tokuzo HOSOYAMADA* and J. F. ATKINSON**

In this paper, a series of numerical simulation for density driven currents, directly based on incompressible fluid equations are carried out. Numerical procedure for incompressible fluid flows, which is referred as SOLA method is specified in detail. The simulation is applied to five flow conditions, such as 1. Density currents in two dimensional tank 2. Lock-exchange flow 3. Two dimensional thermal in a uniform and oscillating flows 4. Three dimensional density currents 5. Kelvin Helmholtz like wavy interface. Throughout the numerical results, gravity head structure and wavy pattern are visualized clearly. The numerical results are satisfactory qualitatively.

Key words : Numerical Simulation/ Computational Fluid Mechanics/ Density difference/ Flow visualization

1. はじめに

近年に見られる計算機能力の進歩と計算機の低廉化により建設工学におけるコンピュータシミュレーションの需要はますます増加していくものと思われる。その中において水理学、水工学は構造工学と並んで数値シミュレーションの導入に先進的な分野である。その理由の1つとして、他の分野、例えば土質・地盤工学や材料工学が不均質な媒質を取り扱うため支配方程式の確立が不十分であることに対し、水工学では水という均質な物体を取り扱い、支配方程式が確立していることが挙げられる。

非圧縮性を仮定した場合、水の運動は非圧縮性の連続式およびナビエストークス方程式によって記述される。従ってこれらの支配方程式を適切な境界条件のもとに時間積分すれば、流れの状況を時々刻々予測することが可能となるはずである。しかしながら、後述するようにこれらの式を連立して解くことは従来、難しいものであり、高速なスーパーコンピュータを用いるかあるいは方程式に適当な仮定を設けて簡便化した方程式を数値的に解く方法しかなかった。冒頭に述べたように近年、充実した計算機環境を安価で整備することが可能となり、前者の方法、すなわち非圧縮性流体の支配方程式を比較的忠実に計算する手法が一般化

していくものと思われる。この計算方法は、海岸工学では砕波の数値計算²⁾や津波の計算にも用いられている。また水工学では塩水くさびなどにも用いられ始めている。本研究では2次元および3次元の種々の密度流を例にとって非圧縮性流体数値コードを用いた数値計算を実施し、可視化データを検討した。

従来、密度流の数値計算は支配方程式の層積分法などを用いて行われて、十分な成果が得られている³⁾。今後は、これらの成果を受けて密度界面や底面での物質フラックスの算定の問題へと発展していくものと思われる。本論文で導入する計算コードはそのような目的に対しても十分適用可能と考えられる。

計算結果は科学技術系の可視化ソフトウェアを用いて表示され、その大部分は動画として表示されている。本報告では計算方法の詳細とその可視化結果について報告する。

2. 数値計算法

2.1 基礎方程式系とその離散化および計算格子

流れ場を3次元とした場合、対象とする流体に非圧縮性を仮定すれば質量保存を意味する連続式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

となる。 u_i はそれぞれ x_i ($i=1\sim3$) 方向の流速である。慣例に従い、サフィックスが1,2方向を水平方向、3を鉛直方向とする。

原稿受付：平成12年5月19日

*長岡技術科学大学環境・建設系

**State University of New York at Buffalo

流体の運動は以下に示すナビエーストックス方程式によって記述される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_m \frac{\partial u_i}{\partial x_m} - f \varepsilon_{ij3} u_j = \\ = \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) g \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_n} \quad (2) \\ (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

ここで、 t , ε_{ij3} , p , ρ , $\Delta \rho$, g , f , δ_{ij} はそれぞれ時間、エディントンのイプシロン⁵⁾、圧力、淡水の密度、密度偏差、重力加速度、系の回転によって生じるコリオリパラメータ、クロネッカーのデルタである。サフィックス i が 3 の場合、すなわち鉛直方向の運動方程式には重力項に対してブシネスク近似¹⁾が用いられている。2次元の場合は奥行き方向座標 x_2 に関する微分とその方向の流速 u_2 を削除する。

密度流は密度場の空間的な分布によって駆動される流れであり、密度偏差の時間発展と運動方程式をリンクして計算する必要がある。密度偏差の発展は以下の式によって計算する。

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + u_m \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x_m} = D \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial x_n \partial x_n} \quad (3)$$

D は密度の拡散係数である。密度の保存式には拡散は含まれないが、塩分や水温は拡散して密度偏差に影響を与えるため、そのことを考慮するために拡散項が含まれている。

以上の式 (1) から (3) の偏微分方程式系を時間方向に数値積分することによって流速場、圧力場、密度場の時間発展を計算できる。これらの支配方程式の未知数は流速ベクトル u_i , ($i=1 \sim 3$)、圧力 p 、密度偏差 $\Delta \rho$ の 5 つ (2次元の場合は $i=2$ を除く 4 つ) である。これらの方程式の時間微分項は対応する場の時間発展を記述している。従って式 (2) のナビエーストックス方程式は流速ベクトル、式 (3) の密度方程式は密度場の発展を記述する。残りの圧力は式 (1) の非圧縮性の連続式によって計算される必要がある。しかしながら非圧縮性の連続式には圧力の時間発展項が含まれておらず圧力を決定する力を持っていない。その問題を解消するため 2 - 2 節に示すような静水圧近似を用いる方法がこれまで一般的であり、水工学における大部分の計算がこの方法をとっている。2 - 3 節では静水圧近似を用いず、非圧縮性連続式を満足するように圧力場を調整していく方法について述べる。

本研究では Fig. 1 に示すように流れ場全体を直交の等長グリッドで被覆してそれらの格子点上で定義された諸量について差分法によって計算する。流速ベクトルの定義点は各格子の辺上によって定義されており、 u_1 ($=u$)、 u_3 ($=w$) はそれぞれ格子の右辺および上辺上で定義されている。これはスタガード格子⁷⁾と呼ばれている変数配置である。圧力および密度は格子中央において定義される。時間積分にはもっとも単純な陽解法であるオイラー法を用いた。また移流項については1次の風上差分と中央差分の混合を用いて差分化した。格子間隔、時間間隔などについては計算結果とともに表示する。本報告では密度流計算の本質を明瞭に示すため、あえて格子生成⁸⁾、方程式の移流項の差分の高精度化¹²⁾、時間積分の工夫などの数値計算技法の高度化を行わず、もっとも単純化された数値計算手法を用いた。

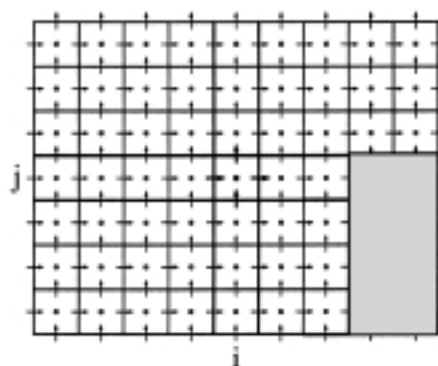


Fig. 1 Numerical Grids

2 - 2 静水圧近似

静水圧近似は鉛直方向の運動方程式において鉛直方向の流速の影響が小さく、重力項と圧力項のみが近似的につりあう流れ場を意味している。この近似は鉛直方向の流速が小さい場合や鉛直方向の空間スケールに比べて水平方向の空間スケールが非常に大きい場合に成立する。大規模なスケールを対象とした気象力学や海洋流体力学、海岸工学における高潮、津波、潮汐、また河川の非定常流などはこのような近似に基づいていることがほとんどである。この仮定に基づけば鉛直方向の運動方程式は、

$$-\left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad (4)$$

のように簡略化され、計算領域の圧力は単純に鉛直方向に積分することにより

$$P = \int_z^0 -(\bar{\rho} + \Delta\rho)gdz \quad (5)$$

となる。鉛直方向の流速は非圧縮性の連続式から計算することができる。すなわち運動方程式から決定された水平流速を用いて水平方向の発散を計算し、それを鉛直積分することによって鉛直方向の流速が計算される。以上の説明から、この方法は非圧縮性流体の支配方程式における連続式と鉛直方向の運動方程式の役割を交換していることを意味することがわかる。すなわち、連続式によって鉛直流速を決定し、鉛直方向運動方程式によって圧力を決めることになる。このため次節で解説するMAC法のような反復計算を行う必要がなく、簡便なプログラムとなる。なおスタガード格子で自由表面を持たない固定蓋を持った流れを考える場合、連続式を鉛直積分して計算される下端および上端の流速と固定蓋による不透過の境界条件とが相容れず矛盾が生じる。このため静水圧近似による計算では自由表面の変動を含め計算する必要がある。このため数値積分の時間間隔が自由表面の水位変動すなわち表面波の伝播に規定されるため計算の時間間隔が阻害されることに注意を要する。

2 - 3 静水圧近似を用いない数値計算

非圧縮性の流体運動を静水圧近似なしで計算する方法は古くからいくつか提案されているが、大きく分けて渦度 - 流関数系とMAC系^{7),8)}の2つに分類される。前者の方法は、運動方程式の回転をとった渦度方程式と渦度定義式を使った流関数発展方程式を解く。この方法では運動方程式の回転をとる際に圧力が消去され、渦度と流関数という2つの未知のスカラー量の発展を解くため、未知数と方程式の関係が明確で計算スキーム作成も容易であるが、3次元への拡張が困難であり、また渦度の境界条件を何らかの方法で設定する必要がある。

一方MAC系のスキームでは運動方程式から計算された流速値が非圧縮性の連続式を満足するように圧力や流速などを調整する。この方法はいくつか種類に分類されるが基本的な方針は同様である。本研究ではその中の1つであるSOLA法⁷⁾を用いている。SOLAはHirt⁴⁾らの論文 (Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flow) に由来しているが、HSMAC (Highly Simplified MAC) と称される場合もある。SOLA法のアルゴリズムを以下に示す。

- ナビエストークス方程式(2)に従って流速の時間発展を計算する。(その流速値は連続条件式の拘束は受けていない。)
- 計算された流速値を連続条件式(1)の左辺に代入して連続条件式を満足しているか検討する。式(1)の左辺が0となっているかどうかを調べるが、通常正か負の値をとる。
- 正になっている場合は、計算格子から外部に出て行く流量が過剰となっていることを意味するので圧力を低下させて格子内に流れを吸引するように流速と圧力を修正する。負になった場合はその逆の処理を行う (Fig. 2)。この処理を全部の格子に対して実行する。なお流速ベクトルはスタガード格子で配置されているので流速の修正は単一格子の状況以外に隣接格子の影響も反映される。したがってこの処理を反復的に行う。
- 全格子において連続条件の左辺の値を調べ、最大値があらかじめ指定された値 (通常十分小さい値とする) を下回っているかどうかを判断する。それを満足していればその時間ステップの解が選ばれたと判断し、次のステップに進む。

以上の手順を繰り返すことによって次々に場の時間発展を計算することができる。また、連続条件式を完全に満足するわけではなく0に十分近いと判断される値を指定しておく必要がある。その値についての明確な指標は現在でも与えられておらず、流速値や計算格子長によって適宜調整する必要がある。また計算時間の大部分は上記の反復計算に使われるが、その過程で運動方程式の影響をまったく受けないことは奇妙な印象を与える。しかしながら、MAC系の計算手法はいずれも同じような問題を含んでおり、SOLA法が著しく劣っているとは思われない。また本稿の冒頭にも述

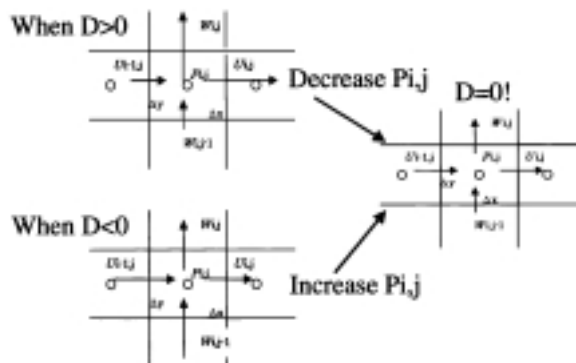


Fig.2 Iterative Procedure for SOLA Method

べたが、従来の研究において通常のMAC法に比してSOLA法の計算時間の遅さが指摘されている⁶⁾。しかしながら今日の計算機能力の進歩によってその問題は解決されつつある。

2 - 4 密度場の取り扱い

密度場の時間発展は、密度偏差の移流・拡散方程式を時間積分することによって計算する。この方程式において移流項の流速は運動方程式から計算されたものを用いる。また運動方程式においては密度偏差の影響は重力項のみに現れるというブシネスク近似を用いている。なおブシネスク近似を用いない場合、密度偏差の影響は圧力項及び密度の拡散項に現れる。本研究に先立ち非ブシネスク近似による計算も実施したが、ブシネスク近似をした場合と有意な差が認められなかったため、本論文に示した結果はすべてブシネスク近似を用いている。

2 - 5 初期条件および境界条件

未知変数のうち、流速と密度場の初期値は各変数の定義点で値を与えることによって任意に設定できる。また圧力場の初期値は静水圧を仮定して密度と重力加速度の積を鉛直積分して求める。この方法では、例えば初期に上側が重く下側が軽いという不安定な状況であっても計算することは可能である。本報告では種々の密度流れについて計算を行っているがそれらはすべて初期の密度分布および流速分布を変えることによって生成されている。

流速の境界条件は固体壁面上で不透過、滑りなしとする。ただし流入流出条件を付加する場合には固体壁面上の法線方向の流速成分を与える。密度場の境界条件は各固体壁境界上で通過するフラックスなしという条件とした。圧力に関してはSOLA法では計算領域内部だけしか参照しないため境界条件を設定する必要がある。これはSOLA法の簡便さを示す1例である。MAC法において圧力のポアソン方程式を計算する際に圧力の境界を設定する必要があることと対比される。

3 . 計算結果

本論文は、密度差によって駆動される流れ一般に対して本計算法が適用可能であることを示すことが目的である。そのためには種々の密度流れに対して本計算手法を適用してみる必要がある。本研究では、

- 1 2次元の水路端部から放出される密度流
- 2 2次元のロックイクスチェンジ流れ⁹⁾
- 3 下方境界上から放出されるサーマル
- 4 回転系の3次元密度流
- 5 密度二成層流の界面波

に対してそれぞれ適用しその計算結果を示す。

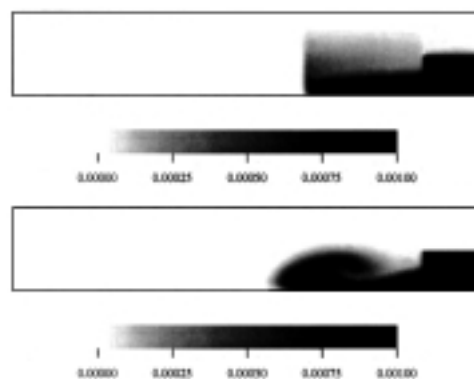


Fig. 3 Density Driven Currents in a tank
upper : Hydrostatic, Lower : SOLA
 $\Delta x=1.0\text{cm}$, $\Delta z=0.2\text{cm}$, $\Delta\rho=0.001$,
number of grids : 200×100

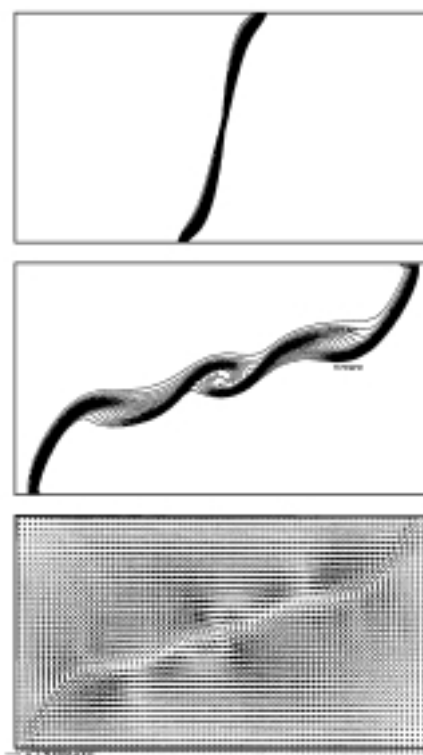


Fig. 4 Lock Exchange Flow
 $\Delta x=1.0\text{cm}$, $\Delta z=1.0\text{cm}$, $\Delta\rho=0.01$
Number of Grids : 200×100
Initial Condition : left: pure water
Right : positive density
Contour line interval : 0.0005

3.1 水路端部から放出される密度流（例1）

この流れは、2次元水路の右端下部の矩形領域に密度差をつけた流体を設置して解放させることによって発生する。なお計算の間、初期に密度差をつけた矩形領域の密度は一定となるようにし、密度の駆動力を一定としている。水槽の壁面は不透過条件となっている。

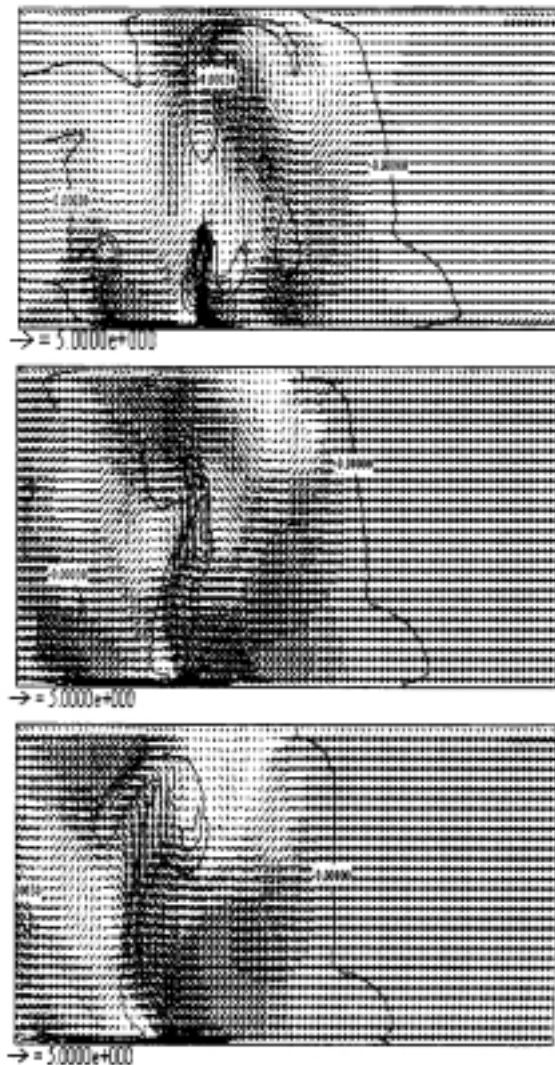


Fig. 5 Thermal in an oscillating ambient flow
 $\Delta x=1.0\text{cm}$, $\Delta z=0.2\text{cm}$, $\Delta\rho: -0.005$
 Velocity amplitude: 2.0cm/s ,
 oscillation period: 30s
 time interval for each chart: 4s

Fig.3には、このようにして発生させた密度流の密度分布を示す。上段は2 - 2節で説明した静水圧近似を用いた例であり、下段はSOLA法での計算例である。放出された密度流は底面に沿って流れるが、静水圧近似ではグラヴィティヘッドを示さないのに対し、非静水圧近似による計算（下段）はグラヴィティヘッドを明瞭に示している。

3.2 ロックエクスチェンジ流れ（例2）

ロックエクスチェンジは室内実験において以下の方法によって生じる。はじめに水槽の中央に仕切り板（ロックゲート）を設けて密度の異なる水を入れておく。そしてその仕切り板を瞬時に除去すれば密度界面が転倒し、重たい水と軽い水が入れ替わる（エクスチェンジする）。数値シミュレーションにおいては仕切り板の除去を行う必要がなく、流れを乱すことなく密度界面の変動などを観察することが可能となる。

Fig.4の上・中段にはロックエクスチェンジ流れによって生じる密度界面の変化、下段には流速ベクトルを示す。密度界面が急速に転倒し、その界面付近には3つの渦がほぼ等間隔で発生している。これらの渦は界面における強いシアと密度差によって生じていると考えられ、後述するケルビンヘルムホルツ型の流れとの関連で議論できるものと思われる。

3.3 下方境界から放出されるサーマル（例3）

計算領域の上端や下端の壁面上において密度差が生じた場合、浮力によって流れが生じる。密度差をつけた壁面上において運動量の流入がない場合、その現象をサーマルと呼び、運動量の流入がある場合、プルームと呼ばれる。本節ではサーマル現象のシミュレーション結果を示す。サーマル現象は、夏季に陸面で加熱された大気的不安定や冬期の海洋混合層の発達などに関連している。

Fig.5には底面での負の密度偏差によって生じるサーマルの密度分布と流速ベクトルを示す。底面よりも1つだけ上の格子で全水平方向200個の格子のうち、左端から20から40個に負の密度偏差を与え、周囲流体は周期30秒で水平方向に正弦振動している。上段から下へ4秒間隔で示している。負の密度偏差を設定したところから強い上昇流が生じているが、設定した個所の端部で強い上昇流が発生していることがわかる。これは上昇に伴って発生する側方からの補流が流入しやすい部分から上昇流が発生することを示している。この上昇流が発生する地点は周囲流体の振動とともに移動することも確認された。強い上昇流は振動している周囲流体の流れをブロックするほど強力である。上昇流の先端はキノコ曇状となっているが、上昇速度が速いため密度流本体から分離している。

3.4 回転系の3次元密度流（例4）

3.1から3.3節までは鉛直2次元の現象であり、定性的には妥当であることが示された。本節では3次

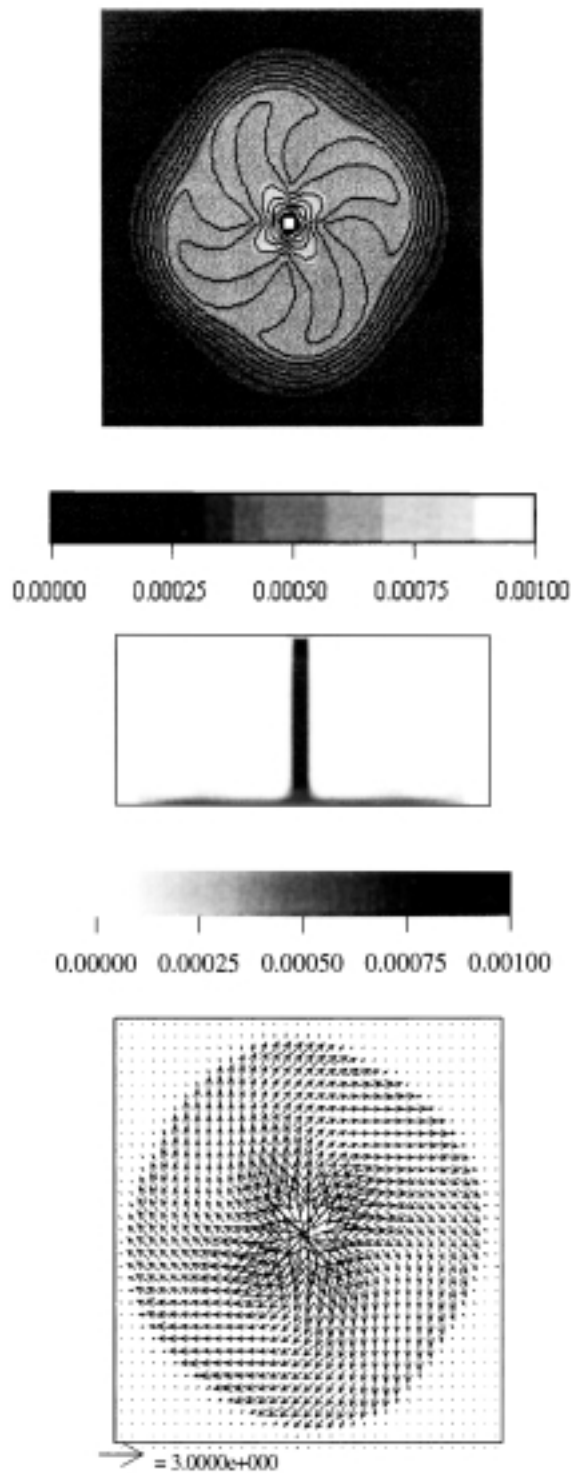


Fig. 6 3 D density currents in a rotating system,
 $\Delta x=1.0\text{cm}$, $\Delta z=1.0\text{cm}$, $\Delta y=1.0\text{cm}$,
 Number of grids $100 \times 100 \times 30$ (vertical)
 $\Delta \rho : 0.001$, period of rotation : 100s,
 Coriolis Parameter $f: 0.0628\text{s}^{-1}$

元の現象について報告する。言うまでもなく本来の物理現象は3次元空間内で生じており、物理シミュレーションも3次元であることが本来望ましい。従来、計算機速度の制約で非圧縮性流体コードの3次元の現象

への適用は少なかった。また建設工学や地球科学の分野では現象のスケール効果のために静水圧近似が成り立ち、3次元の浅水方程式が用いられることが多い。

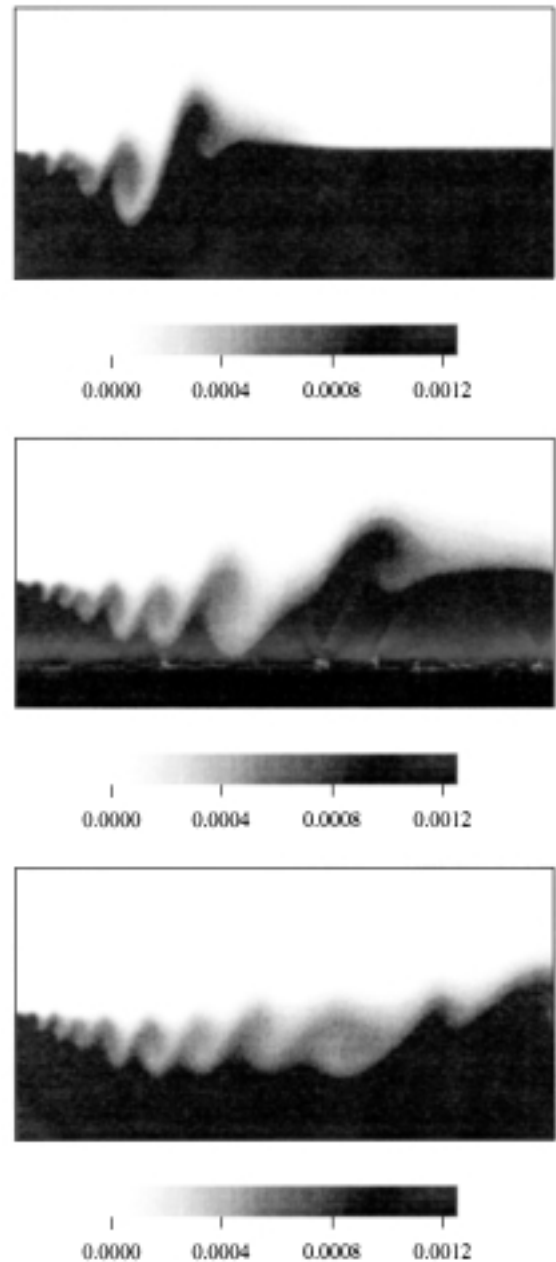


Fig. 7 Waves in interface of two phase flow
 $\Delta x=1.0\text{cm}$, $\Delta z=0.2\text{cm}$, $\Delta \rho : 0.00125$, Velocity in upper layer : 5cm/s, number of grids 200×100

しかしながら、近年のフラクタル研究により、スケールの変化に対して現象の普遍性が報告されており¹¹⁾、そのような現象を調べるためにはスケールに依存しない静水圧近似なしの数値計算手法を確立しておく必要がある。また、海洋物理学では両極において生じる深

層循環流の生成に関して2次元の渦度・流関数による非静水圧近似・非圧縮性流体計算が用いられ始めている。今後、非圧縮性流体のアルゴリズムが広く地球科学の分野においても適用される可能性がある。本節ではSOLAアルゴリズムに基づく3次元の密度流の数値計算結果について示す。プログラム作成は2次元計算の拡張であり、基本的には2次元の場合の2重ループが3重ループになるだけである。なお、系の回転を含めるために系の回転角速度であるコリオリパラメータ f を導入している。

Fig.6には回転系での3次元の密度流として矩形水槽の中央部から放出される正の密度偏差をもった密度流の計算結果を示す。上段、中段、下段はそれぞれ底面に広がる密度流の平面図、その断面2次元および流速ベクトルを示す。上段の密度分布と下段の流速ベクトルによれば中央から放出された密度流は回転の影響を受けながら進行方向に向かって右方向に回転している。これはコリオリ力による影響である。系の回転はテイラーブラウドマンの定理が示すとおり、鉛直方向に諸量を一様化する性質を持っており¹⁰⁾、密度流が水槽底部に沈降して流れようとする性質と正反対の性質を持つ。中段では水槽底部に沿う密度流のうち先頭のヘッド部以外に密度流の幅が厚くなっている部分が確認できる(図中矢印)。これが密度流に対する回転の影響である。なおここでは示さないが、さらに回転速度を上げると密度流は底部を広がりにくくなり、鉛直方向の循環流を生じることが確認されている。

3.5 密度二成層流の界面波(例5)

鉛直方向に二成層している場において上側と下側の流体に速度差がある場合、界面に波動が生じる。これをケルビンヘルムホルツ不安定と言う。この場合、成層の界面において波動が生じる。本節ではケルビンヘルムホルツ型流れによって生じる界面変動の模様について示す。

従来ケルビンヘルムホルツ不安定の数値計算は、密度界面に何らかの変動を加えて、その変動の時間発展を計算していた。本研究ではそのような人工的な変動を全く用いずに界面に生じる波動を発生させた。Fig.7には二層界面に生じる波動の時間発展を示す。上側が淡水であり右方向に5cm/sで流れている。水槽左端の界面から発生した波動は右方向に伝播しながら振幅・波長とも増大している。しかしながらそれが十分発達した後はほぼ様な振幅になる。成層界面では連行現象やその他の要因による物質フラックスの推定が重要で

あり、本計算によって精度良く解析できる可能性が十分あると思われる。

4. まとめ

本論文ではSOLAアルゴリズムに基づく非圧縮性流体の計算手法を種々の密度流場に適用しその妥当性について検討した。SOLA法に基づく計算手法が密度流一般に対して適用可能であることが定性的に示された。静水圧近似を用いた計算との対比により密度フロントのヘッド構造や密度界面の変動などが動的に把握される可能性が示された。密度差が関与した種々の流れ場の不安定構造に対しても十分適用可能であることが分かった。本計算方法は、今後、建設工学、気象学、海洋物理学、化学機械工学など流体の密度差による現象を取り扱う各分野において広く適用されていくと思われる。そのためには以下のような問題点を克服していく必要がある。

- 現象の空間スケールを変えた場合、同一アルゴリズムで対応できるか。
- 時間スケールがかなり異なる現象が同一系に存在する場合、対応可能か。
- 空間分解能と時間分解能はCFL条件によって規定されるが、目的とした現象に対して適合するか。
- 空間スケールの増大とともに乱流モデルの導入が必要になる。

これらの問題は、今後の計算機能力の発展によって徐々に解決されていくものと思われる。

計算手法の定量的な妥当性を示すためには実験によって計算結果に見合うほどの大量のデータを取得する必要がある画像解析に基づく手法が有効であろう。この検証は現在進行中であるが良好な結果を得ている。これらの結果については今後、随時公表していく予定である。

冒頭にも述べたが、本数値計算によって計算された結果はすべて動画処理されコンピュータによって観察することが可能である。それらはCDROM化して自由頒布できる準備が完了している。入手希望者は第一著者まで連絡されることを付記する。

参考文献

- 1) J. S. Turner, Buoyancy Effects in Fluids, pp. 368, Cambridge University Press, 1973.
- 2) 陸田秀実, 大規模碎波による気液混相流体場における高精度数値計算法の開発, pp. 198, 学位論文, 2000.

- 3) 福嶋祐介,成層中の平面二次元密度噴流と軸対象密度流、長岡技術科学大学研究報告、第13号, pp79-89,1991.
- 4) C.W.Hirt, B.D.Nichols and N.C.Romero, SOLA A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows, LosAlamos Scientific Laboratory LA-5852,pp.1-50,1975.
- 5) 松信八十男,変形と流れの力学,pp.220,朝倉書店, 1981.
- 6) 竹光信正,非圧縮粘性流体の差分法による反復解法,生産研究,38巻12号,pp.534-542,1986.
- 7) 高橋亮一,棚町芳弘、差分法 計算力学とCAEシリーズ3, pp.323, 培風館, 1991.
- 8) 河村哲也、流体解析I、 pp.192, 朝倉書店、1997.
- 9) 細山田 得三、コンピュータシミュレーションによるロックエクステンジ流れの可視化、流体力学会誌ながれ、18巻3号、pp.133-134,1999.
- 10) 木村竜治、地球流体力学入門、 pp.247,東京堂出版,1983.
- 11) 高安秀樹、フラクタル,pp.186,朝倉書店,1986.
- 12) 朝位孝二、細田尚、移流方程式の数値解析、水工学における計算機利用の講習会講義集、土木学会水理委員会基礎水理部会、pp.13-21,1999.