

扇形板・骨組複合構造の解法に関する研究

Analysis of Circular Ring Sector Plates Stiffened with Frames

金子 忠 男*

Tadao Kaneko

Synopsis:

Circular ring sector plate-frame structures which are often seen at the curved corner of elevated highway bridges are analyzed by Fourier series. The concept of analysis is based on a force method named here "The redundant force method for plate structures", which is expanded from a redundant force method well applied to the analysis of frame-structures. Namely, a plate structure whose two straight edges are simply supported and two circular edges are elastically supported by a circular simple beam is selected as primary structure, and consequently, the statically indeterminate quantities are calculated, so that deformations and section forces of this composite structure are determined by the principle of superposition.

From many numerical examples thus obtained in this analysis, it is explicit that torsional rigidities of the beam members in frames have a significant influence on the mechanics behavior of the structure and the aspect of the deformation and stress in the neighborhood of inner circular edge is considerably different from that of the outer.

1. 緒 言

近来、わが国における交通は経済活動の活発化にともない、その量の急増と高速化の点で著しく進展を遂げつつあるが、これを適確に処理し安全に流通させるためには技術的な道路網の整備や新設が必要である。ところが家屋の密集する都市内においては経済性、安全性の面からも、また住民感情の面からも既存道路の拡幅はきわめて困難であり、このため空間の立体的利用による道路網の確立をはからねばならない。実際、今日大都市に見受けられる高速道路はそのほとんどが高架化されており、しかも既存建造物を避けて通過するため、好むと好まざるとにかかわらず小曲率半径の

曲線を挿入せざるを得ない。しかるとき、曲線部床版構造は扇形状の平板とこれを弾性支持する曲線ばり、あるいは柱で構成されるいわゆる板・骨組複合構造（本論では特に扇形板・骨組複合構造と称する）となるが、従来この種複合構造の設計では平板解析の複雑困難性のため、床版と骨組とを個々に分割した近似計算法が採用されており、板と骨組との間の力学的相互作用が正確に評価されていない点、不合理であるばかりでなく場合によっては不経済となることも十分考えられる。さらに本論文で対象とするような扇形板・骨組複合構造においては便宜上曲線部を多角形の折線で近似する方法が用いられているが、これも前述のごとく比較的曲率半径が小さい今日の構造物では自ら近似性も劣化する。すなわち、扇形板や曲線ば

* エンジニアリングセンター建設開発部鋼構造研究所構造研究室・工博

りはそれ自体でも矩形板や直線ばりとは異なる複雑な力学的性状を呈するものであり、扇形板・骨組複合構造は床版としての扇形板と主桁としての曲線ばりとが一体的に結合するものであるゆえ、さらに複雑な力学的挙動を呈示することが容易に推察される。したがって、この種構造物に死荷重や活荷重などの外力が作用する場合の板骨組間の力学的相互作用を正確に究明することは、実用上の観点からもまた曲線のもつ景観上の美点からも今後増々多用されることが期待されるだけにその合理的設計上きわめて重要な課題となっている。

以上の所論により本研究は日常道路橋の曲線部で多見されるとき扇形板・骨組複合構造がその直線辺を橋台や橋脚で支持されかつ橋軸にそって円弧状に円形曲りばり、連続円形曲りばり、あるいは水平円弧部材をもつラーメンのはり部材（以下単にはり部材と総称する）により弾性支持されることにかんがみ、直線辺が単純支持され橋軸にそってはり部材により弾性支持されるとき構造にモデル化して解析のうえ、この種複合構造の力学的特性の把握を行ない、もって設計上注意すべき諸事項の検討を行なわんとするものである。本法の特色は複合構造の諸変位や諸断面力がすべて板を支持する骨組の不静定量と外荷重との一次結合式で与えられる点にある。解法の基本原理は板を支持する骨組の不静定量を未知数とする応力法の一種であるが、特に板構造が単スパンである場合は直線辺が単純支持され円弧辺が単スパンの円形曲りばりで弾性支持されるとき構造を静定基本構に選ぶことにより不静定量が算定され、この手法を本論では“板構造における不静定余力法”と命名した。

2. 解 法

2.1 フーリエ級数による連続ばりおよびラーメンの解法

2.1.1 たわみ曲線

扇形板・骨組複合構造を一体解析する際、扇形板と骨組とを変位および応力の連続条件で結合せねばならないが、一般に扇形板の解が無限フー

リエ級数で与えられるゆえ、板を弾性支持するはり部材の解もこれと同一の関数型で与えられることが望ましい。したがって、本節でははり部材が板より面外荷重を伝達されることを考慮し、この場合の解法を提示のうえ、以下の構造解析の基礎理論とする。

Fig. 2.1 に示すように断面が一樣な円形曲りば

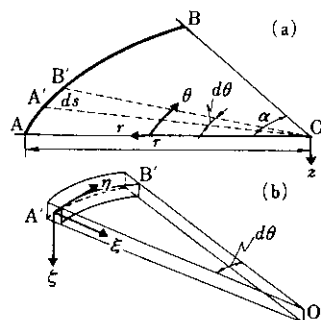


Fig. 2.1 Polar coordinates (r, θ, z) and local coordinates (ξ, η, ζ)

りの中心をOとし、半径 r および開角を α とする。さらに、中心Oを原点とする円筒座標 (r, θ, z) および円弧AB上に移動座標 (ξ, η, ζ) を導入する。しかるとき、面外荷重として ζ 方向垂直荷重 $\bar{p}_\zeta(\theta)$ 、 ξ 軸まわりの曲げモーメント $\bar{m}_\xi(\theta)$ および η 軸まわりのねじりモーメント $\bar{m}_\eta(\theta)$ が作用するものとすれば、はりの z 軸方向のたわみ w を求めるための基礎微分方程式は次式である。

$$\begin{aligned} \frac{d^6 w}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 w}{d\theta^4} + \frac{d^2 w}{d\theta^2} = \frac{r^4}{EI_\xi} \left\{ \frac{d^2 \bar{p}_\zeta(\theta)}{d\theta^2} \right. \\ - \frac{1}{\rho} \bar{p}_\zeta(\theta) - \frac{1}{r} \frac{d^3 \bar{m}_\xi(\theta)}{d\theta^3} + \frac{1}{\rho r} \frac{d \bar{m}_\xi(\theta)}{d\theta} \\ \left. - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \frac{d^2 \bar{m}_\eta(\theta)}{d\theta^2} \right\} \quad \dots\dots(2.1) \end{aligned}$$

ここに、 E :ヤング率、 I_ξ : ξ 軸に関する断面2次モーメント、 $\rho = GJ_\eta / EI_\xi$ 、 G :せん断弾性係数、 GJ_η : η 軸に関するねじり剛性
式(2.1)の斉次方程式の解を正弦フーリエ級数で仮定し、面外荷重 $\bar{p}_\zeta(\theta)$ 、 $\bar{m}_\xi(\theta)$ 、 $\bar{m}_\eta(\theta)$ をフーリエ級数に展開のうえ、式(2.1)に適用すれば一般解は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 w(\theta) &= C_1 + C_2\theta + (C_3 + C_4\theta) \sin \theta + (C_5 + C_6\theta) \\
 &\times \cos \theta = \frac{r^4}{EI\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2 (\alpha_n^2 - 1)^2} \\
 &\times \left\{ \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{\rho} \right) \bar{p}_{cn} + \frac{\alpha_n}{r} \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{\rho} \right) \bar{m}_{\epsilon n} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha_n^2}{r} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \bar{m}_{\eta n} \right\} \sin \alpha_n \theta \quad \dots\dots(2.2)
 \end{aligned}$$

ここに、 $C_1 \sim C_6$ ：積分定数、 $\alpha_n = n\pi / \alpha$ 、 n ：正整数、

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{cn} &= \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \bar{p}_c(\theta) \sin \alpha_n \theta d\theta, \\
 \bar{m}_{\epsilon n} &= \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \bar{m}_{\epsilon}(\theta) \cos \alpha_n \theta d\theta, \\
 \bar{m}_{\eta n} &= \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \bar{m}_{\eta}(\theta) \sin \alpha_n \theta d\theta
 \end{aligned}$$

いま、Fig. 2.2に示すような $t+1$ スパンの連続

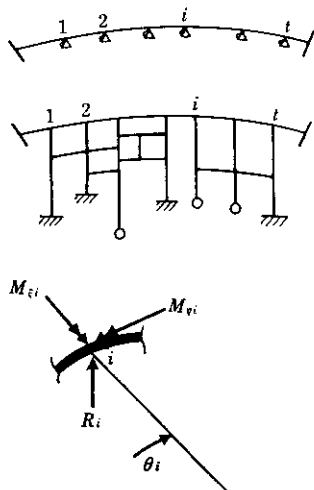


Fig. 2.2 Beam members and statically indeterminate forces

円形曲りばり、あるいは水平円弧部材をもつラーメンに面外荷重 $\bar{p}_c(\theta)$ 、 $\bar{m}_{\epsilon}(\theta)$ 、 $\bar{m}_{\eta}(\theta)$ が作用するとき任意中間支点 i (あるいは支柱頭部) に中間不静定量である垂直反力 R_i および ϵ 、 η 軸まわりの反力モーメント $M_{\epsilon i}$ 、 $M_{\eta i}$ を生ずるが、これらの面外荷重および不静定量をすべてはり部材に作用する荷重とみなせば、式(2.1)における $\bar{p}_{cn}$ 、 $\bar{m}_{\epsilon n}$ 、 $\bar{m}_{\eta n}$ は次のように置換される。

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{cn} &= \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \bar{p}_c(\theta) \sin \alpha_n \theta d\theta \\
 &\quad - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t R_i \sin \alpha_n \theta_i \quad \dots\dots(2.3a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_{\epsilon n} &= \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \bar{m}_{\epsilon}(\theta) \cos \alpha_n \theta d\theta \\
 &\quad - \frac{2}{\alpha r^2} \sum_{i=1}^t M_{\epsilon i} \cos \alpha_n \theta_i \quad \dots\dots(2.3b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_{\eta n} &= \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \bar{m}_{\eta}(\theta) \sin \alpha_n \theta d\theta \\
 &\quad - \frac{2}{\alpha r^2} \sum_{i=1}^t M_{\eta i} \sin \alpha_n \theta_i \quad \dots\dots(2.3c)
 \end{aligned}$$

ここに、 θ_i は、はり端部から中間支点(支柱)までの開角である。また、はり部材が両端で曲げに対して単純支持、ねじりに対して固定されているものとすれば、式(2.1)における積分定数はすべて零となり、けっきょくこの境界条件に対するたわみ曲線として次式がえられる。

$$\begin{aligned}
 w(\theta) &= \frac{r^3}{EI\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ r D_n \left(\bar{p}_{cn} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t R_i \right. \right. \\
 &\quad \times \sin \alpha_n \theta \Big) + \alpha_n D_n \left(\bar{m}_{\epsilon n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t M_{\epsilon i} \right. \\
 &\quad \times \cos \alpha_n \theta_i \Big) - D_n \left(\bar{m}_{\eta n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t M_{\eta i} \right. \\
 &\quad \times \sin \alpha_n \theta_i \Big) \Big\} \times \sin \alpha_n \theta \quad \dots\dots(2.4)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 D_n &= \frac{\alpha_n^2 + 1/\rho}{\alpha_n^2 (\alpha_n^2 - 1)^2}, \quad \bar{D}_n = \frac{1 + 1/\rho}{(\alpha_n^2 - 1)^2}, \\
 \bar{A}_n &= \frac{\alpha_n^2/\rho + 1}{(\alpha_n^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

式(2.4)における $\bar{p}_{cn}$ 、 $\bar{m}_{\epsilon n}$ 、 $\bar{m}_{\eta n}$ は荷重が与えられれば容易に決定され、残る不静定量 R_i 、 $M_{\epsilon i}$ 、 $M_{\eta i}$ が何らかの方法により求められれば、たわみ曲線は n について級数和を計算するだけで算定されることとなる。そのほかの諸変位、諸断面力もたわみ w の微分式で与えられるゆえ、同様に計算可能となる。

2.1.2 基本連立方程式

式(2.4)に未知数のまま含まれている中間不静定量 R_i 、 $M_{\epsilon i}$ 、 $M_{\eta i}$ は、はり部材の中間支点(支柱頭部)の変位および回転角に関する条件式により決定されるが、このうち、はり部材の ϵ 、 η 軸まわりの回転角は式(2.4)より次のごとく求めら

れる。

$$\tau_{\xi} = \frac{r^2}{EI_{\xi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ r A_n \left(p_{\xi n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t R_i \right. \right. \\ \times \sin \alpha_n \theta_i \Big) + \alpha_n A_n \left(\mathcal{M}_{\xi n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t M_{\xi i} \right. \\ \times \cos \alpha_n \theta_i \Big) - A_n \left(\mathcal{M}_{\eta n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t M_{\eta i} \right. \\ \times \sin \alpha_n \theta_i \Big) \Big\} \cos \alpha_n \theta \quad \dots\dots(2.5)$$

$$\tau_{\eta} = \frac{r^2}{EI_{\xi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -r A_n \left(p_{\xi n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t R_i \right. \right. \\ \times \sin \alpha_n \theta_i \Big) - \alpha_n A_n \left(\mathcal{M}_{\xi n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t M_{\xi i} \right. \\ \times \cos \alpha_n \theta_i \Big) + \bar{A}_n \left(\mathcal{M}_{\eta n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t M_{\eta i} \right. \\ \times \sin \alpha_n \theta_i \Big) \Big\} \sin \alpha_n \theta \quad \dots\dots(2.6)$$

いま、はり部材の中間支点（支柱） k が垂直変位 d_k を生ずるものとすれば、式（2.4）より次式がえられる。

$$d_k = \frac{r^3}{EI_{\xi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \left(r p_{\xi n} - \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^t R_i \right. \right. \\ \times \sin \alpha_n \theta_i \Big) + \alpha_n A_n \left(\mathcal{M}_{\xi n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t M_{\xi i} \right. \\ \times \cos \alpha_n \theta_i \Big) - A_n \left(\mathcal{M}_{\eta n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t M_{\eta i} \right. \\ \times \sin \alpha_n \theta_i \Big) \Big\} \sin \alpha_n \theta_k \quad \dots\dots(2.7)$$

同様に、はり部材の中間支点（支柱頭部）が、 ξ, η 軸まわりの回転角 $\tau_{\xi k}, \tau_{\eta k}$ を生ずるものとすれば、式（2.5）、（2.6）より次の関係が成立する。

$$\tau_{\xi k} = \frac{r^2}{EI_{\xi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n A_n \left(r p_{\xi n} - \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^t R_i \right. \right. \\ \times \sin \alpha_n \theta_i \Big) + \alpha_n^2 A_n \left(\mathcal{M}_{\xi n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t M_{\xi i} \right. \\ \times \cos \alpha_n \theta_i \Big) - \alpha_n A_n \left(\mathcal{M}_{\eta n} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t M_{\eta i} \right. \\ \times \sin \alpha_n \theta_i \Big) \Big\} \cos \alpha_n \theta_k \quad \dots\dots(2.9)$$

連続円形曲りばりあるいはラーメンは中間支点（支柱） t 個を有するゆえ、未知数である不静定量は全部で $3t$ 個である。これに対し 1 支点（支

柱）で上記の式（2.7）～（2.9）の 3 式が与えられ、変位変形条件式も $3t$ 個となり、もし変位 d_k および変形 $\tau_{\xi k}, \tau_{\eta k}$ を外的に定めれば、未知数の数と条件式の数が一致し、未知量はこれらの条件式よりえられる式群を連立に解くことによりすべて決定されることとなる。式（2.7）～（2.9）を演算のうえ整理すれば、中間不静定量を求めるための基本連立方程式が次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^t D_{ik} R_i + \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t D'_{ik} M_{\xi i} \\ & - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t \bar{D}_{ik} M_{\eta i} \\ & = r D_k + D'_k - \bar{D}_k - \frac{EI_{\xi}}{r^3} d_k \\ & \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^t H_{ik} R_i + \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t H'_{ik} M_{\xi i} \\ & - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t \bar{H}_{ik} M_{\eta i} \\ & = r H_k + H'_k - \bar{H}_k - \frac{EI_{\xi}}{r^2} \tau_{\xi k} \\ & \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^t L_{ik} R_i + \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t L'_{ik} M_{\xi i} \\ & - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^t \bar{L}_{ik} M_{\eta i} \\ & = r L_k + L'_k - \bar{L}_k + \frac{EI_{\xi}}{r^2} \tau_{\eta k} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

（ただし、 $k=1, 2, \dots, t$ ）

ここに、

$$\begin{aligned} D_{ik} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n S_i S_k, & D'_{ik} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_i S_k, \\ \bar{D}_{ik} &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n S_i S_k, & H_{ik} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n S_i C_k, \\ H'_{ik} &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n C_i C_k, & \bar{H}_{ik} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \bar{A}_n S_i C_k, \\ L_{ik} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n S_i S_k, & L'_{ik} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n C_i S_k, \\ \bar{L}_{ik} &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n S_i S_k, & D_k &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n p_{\xi n} S_k, \\ D'_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n \mathcal{M}_{\xi n} S_k, & \bar{D}_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \mathcal{M}_{\eta n} S_k, \\ H_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n p_{\xi n} C_k, & H'_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 A_n \mathcal{M}_{\xi n} C_k, \\ \bar{H}_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \bar{A}_n \mathcal{M}_{\eta n} C_k, & L_k &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n p_{\xi n} S_k, \end{aligned}$$

$$L_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \bar{A}_n \bar{m}_{\xi n} S_k, \quad \bar{L}_k = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \bar{m}_{\eta n} S_k, \\ S_k = \sin \alpha_n \theta_k, \quad C_k = \cos \alpha_n \theta_k$$

式(2・10)左辺における未知数 R_i , $M_{\xi i}$, $M_{\eta i}$ の係数は中間支点(支柱)の位置およびはり部材の材質、断面諸寸法によって定まる定数で形状定数と称することとする。また、右辺の第1～3項ははり部材に作用する外荷重によって定まる荷重項である。式(2・10)を用いる場合、連続円形曲りばりのように中間支点が垂直反力のみを生ずる構造形式(球支承)では第1式のみを採用すればよく、このとき当然のことながら $M_{\xi i}$, $M_{\eta i}$ の項は消失する。また、垂直反力およびねじりモーメントを生ずる構造形式(ローラ支承)では第1, 3式を用いればよく、 $M_{\eta i}$ の項は削除する。さらに、はり部材と中間支柱が剛結するラーメン構造の場合は式(2・10)はすべて有効となる。なお右辺における d_k は中間支点(支柱)の変位であるが、これは通常零であり、支点(支柱)が不等沈下する場合はその値を用いれば良い。 $\tau_{\xi k}$, $\tau_{\eta k}$ は中間支点(支柱)の ξ , η 軸まわりの回転角であるが、これらは次に示すように柱部材に既往のたわみ角式を適用することにより柱頭の反力モーメント $M_{\xi i}$, $M_{\eta i}$ と関係づけられる(FIG. 2・3 参照)。

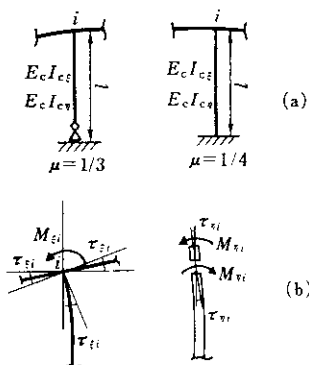


Fig. 2.3 Slopes and reacting moments at the top of columns

$$\tau_{\xi i} = -\mu_{\xi} \frac{l}{E_c I_{c\xi}} M_{\xi i}, \quad \tau_{\eta i} = -\mu_{\eta} \frac{l}{E_c I_{c\eta}} M_{\eta i}, \quad \dots (2.11)$$

ここに、

E_c : 柱材のヤング率, l : 柱材の長さ,
 $I_{c\xi}$, $I_{c\eta}$: 柱材の ξ , η 軸に関する断面2次モーメント

2.2 円弧辺がはり部材により弾性支持される等方性扇形板の解法

2.2.1 たわみ曲面

一般に曲線橋にあっては扇形床版の直線辺は橋台や橋脚などにより支持されているが、この支承を単純支持と見なすことができ、また橋台間あるいは橋脚間には床版を支える曲線主桁が用いられる。その際、床版と主桁とは一体的に結合する場合がそのほとんどであり、さらに両側の耳桁に対して床版はある程度張出しているのが通常であるが、その量はさほど大きいものでなく、実用計算上は無視しても差し支えないものと考えられる。結局、曲線主桁と曲線床版で構成される実際の曲線橋をまずは円弧辺が連続円形曲りばりあるいは水平円弧はり部材を有するラーメンで弾性支持されるごとき平板・骨組複合構造としてモデル化することが可能である。本節はかかる扇形板・骨組複合構造の解析法を提示し、その力学的挙動を究明するものであるが、解析にあたっては薄板理論が適用でき、骨組の弾性支持はり部材の中立軸と平板の中立面は同一レベルにあり、平板よりはり部材には面外応力のみが伝達され面内応力は伝達されないものとする。

いま、FIG. 2・4 に示す扇形板・骨組複合構造に垂直荷重 $q(r, \theta)$ が作用するものとすれば、扇形板 ABCD の z 軸方向のたわみ w を求めるための基礎微分方程式は周知のように次式であらわされる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \\ + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \\ + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad \dots (2.12)$$

ここに、

$D = E_p h_p^3 / [12 (1 - \nu^2)]$: 板剛度, E_p : ヤン

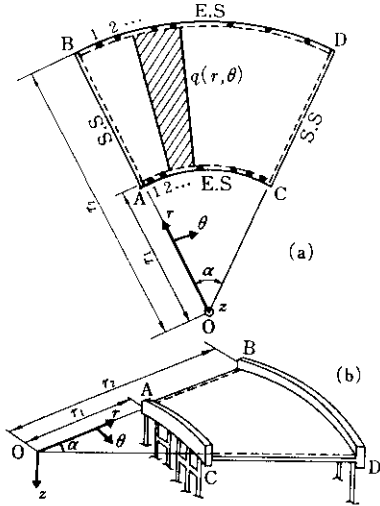


Fig. 2.4 General view of circular ring sector plate-frame structure

グ率, h_p : 板厚, ν : ポアソン比。

式(2.12)の一般解は次式のごとき級数で与えられる。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n r^{\alpha_n} + B_n r^{-\alpha_n} + C_n r^{\alpha_n+2} + D_n r^{-\alpha_n+2} + \frac{F_n(r)}{D} \right\} \sin \alpha_n \theta \quad (2.13)$$

ここに,

$A_n \sim D_n$ 積分定数, $F_n(r)$: 荷重によって定まる関数。

式(2.13)に含まれる積分定数は円弧辺 AC, BD の境界条件により決定されるが, いま, 円弧辺におけるはり部材のたわみ曲線を AC 側で $\delta_A(\theta)$, BD 側で $\delta_B(\theta)$ とし, また, 円弧辺に作用する端モーメントをそれぞれ $M_r^A(\theta)$, $M_r^B(\theta)$ とする。しかるとき, 円弧辺における境界条件は次のとおりである。

辺 AC で,

$$(w)_{r=r_1} = \delta_A(\theta) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{An} \sin \alpha_n \theta \right) \quad (2.14a)$$

$$(M_r)_{r=r_1} = M_r^A(\theta) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} M_{rn}^A \sin \alpha_n \theta \right) \quad (2.14b)$$

辺 BD で,

$$(w)_{r=r_2} = \delta_B(\theta) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} \sin \alpha_n \theta \right) \quad (2.14c)$$

$$(M_r)_{r=r_2} = M_r^B(\theta) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} M_{rn}^B \sin \alpha_n \theta \right) \quad (2.14d)$$

ここに,

δ_{An} , δ_{Bn} , M_{rn}^A , M_{rn}^B : それぞれたわみおよび端モーメントのフーリエ展開係数。

式(2.13)を式(2.14)に代入のうえ, 左右両辺の係数を比較すれば, 未知積分定数 $A_n \sim D_n$ に関する4式がえられるゆえ, これらを連立に解けば各積分定数は任意定数 δ_{An} , δ_{Bn} , M_{rn}^A , M_{rn}^B の関数で求められるゆえ, その結果を, さらに式(2.13)に代入すれば板のたわみ曲面は次式のように表わされる。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ s_n(r) \frac{M_{rn}^A}{D} + t_n(r) \frac{M_{rn}^B}{D} + u_n(r) \delta_{An} + v_n(r) \delta_{Bn} + \frac{F_n(r)}{D} \right\} \times \sin \alpha_n \theta \quad (2.15)$$

ここに,

$$s_n(r) = a_n r^{\alpha_n} + c_n r^{-\alpha_n} + e_n r^{\alpha_n+2} + g_n r^{-\alpha_n+2},$$

$$t_n(r) = a_n' r^{\alpha_n} + c_n' r^{-\alpha_n} + e_n' r^{\alpha_n+2} + g_n' r^{-\alpha_n+2},$$

$$u_n(r) = b_n r^{\alpha_n} + d_n r^{-\alpha_n} + f_n r^{\alpha_n+2} + h_n r^{-\alpha_n+2},$$

$$v_n(r) = b_n' r^{\alpha_n} + d_n' r^{-\alpha_n} + f_n' r^{\alpha_n+2} + h_n' r^{-\alpha_n+2},$$

$$F_n(r) = F_n(r) + G_1 r^{\alpha_n} + G_2 r^{-\alpha_n} + G_3 r^{\alpha_n+2} + G_4 r^{-\alpha_n+2},$$

$$E_n a_n = 2 r_1^2 r_2^2 R_1 K_2,$$

$$E_n a_n' = 2 r_1^2 r_2^2 R_2 K_1,$$

$$E_n b_n = 2 \bar{\alpha}_n r_2^2 R_1 (a_1 a_2 R_{12} r_1^2$$

$$+ \nu_3 \nu_2 r_{12} R_2^2 \alpha_n^2)$$

$$E_n b_n' = -2 \bar{\alpha}_n r_1^2 R_2 (a_1 a_2 R_{12} r_2^2$$

$$\begin{aligned}
& + \nu_3 \nu_2 r_{12} R_1^2 \alpha_n^2) \\
E_n G_1 = & -2 r_1^2 r_2^2 R_2 K_1 F_n^{(2)}(r_2) \\
& + 2 r_1^2 r_2^2 R_1 K_2 F_n^{(2)}(r_1) \\
& - 2 \nu r_1^2 r_2 R_2 K_1 F_n^{(1)}(r_2) \\
& + 2 \nu r_1 r_2^2 R_1 K_2 F_n^{(1)}(r_1) \\
& + 2 r_1^2 R_2 (\alpha_{n2} a_3 a_1 r_2^2 R_{12} \\
& + \nu_3 r_{12} R_1^2 \alpha_n^2 a_4) F_n(r_2) \\
& - 2 r_2^2 R_1 (\alpha_{n2} a_3 a_1 r_1^2 R_{12} \\
& + \nu_3 r_{12} R_2^2 \alpha_n^2 a_4) F_n(r_1) \\
E_n C_n = & -2 r_1^2 r_2^2 R_1 R_2^2 (\nu_3 r_{12} R_1^2 \alpha_n \\
& - a_1' R_{12} r_2^2) \\
E_n C_n' = & -2 r_1^2 r_2^2 R_1^2 R_2 (\nu_3 r_{12} R_2^2 \alpha_n \\
& - a_1' R_{12} r_2^2) \\
E_n d_n = & -2 r_2^2 R_1 R_2^2 (\nu_2 \nu_3 \alpha_{n1} \alpha_n^2 r_{12} R_1^2 \\
& - a_2' a_1' \alpha_{n1} R_{12} r_1^2) \\
E_n d_n' = & 2 r_1^2 R_1^2 R_2 (\nu_2 \nu_3 r_{12} \alpha_{n1} \alpha_n^2 R_2^2 \\
& - a_2' a_1' \alpha_{n1} R_{12} r_2^2) \\
E_n G_2 = & 2 r_1^2 r_2 R_1^2 R_2 (\nu_3 r_{12} R_2^2 \alpha_n \\
& - a_1' R_{12} r_2^2) \{r_2 F_n^{(2)}(r_2) \\
& + \nu F_n^{(1)}(r_2)\} - 2 r_1 r_2^2 R_1 R_2^2 \\
& \times (\nu_3 r_{12} R_1^2 \alpha_n - a_1' R_{12} r_1^2 \{r_1 F_n^{(2)}(r_1) \\
& + \nu F_n^{(1)}(r_1)\} + 2 r_1^2 R_1^2 \\
& \times R_2 (a_1' a_3' \alpha_{n2} R_{12} r_2^2 \\
& - \nu_3 a_3' a_4' r_{12} \alpha_n^2 R_2^2) F_n(r_2) \\
& - 2 r_2^2 R_1 R_2^2 (a_1' a_4' \alpha_{n2} R_{12} r_1^2 \\
& - \nu_3 a_4' r_{12} \alpha_n^2 R_1^2) F_n(r_1) \\
E_n e_n = & -r_1^2 R_1 D_2, \quad E_n e_n' = -r_2^2 R_2 D_1 \\
E_n f_n = & -2 \nu_2 \alpha_{n1} \alpha_n R_1 (a_1 R_{12} r_2^2 \\
& - a_2' r_{12} R_2^2) \\
E_n f_n' = & 2 \nu_2 \alpha_{n1} \alpha_n R_2 (a_1 R_{12} r_1^2 - a_2' r_{12} R_1^2) \\
E_n G_3 = & r_2^2 R_2 D_1 F_n^{(2)}(r_2) - r_1^2 R_1 D_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times F_n^{(2)}(r_1) + \nu r_2 R_2 D_1 F_n^{(1)}(r_2) \\
& - \nu r_1 R_1 D_2 F_n^{(1)}(r_1) - 2 \alpha_n R_2 \\
& \times (a_1 a_5 R_{12} r_1^2 - \nu_2 a_4' \alpha_{n2} r_{12} R_1^2) \\
& \times F_n(r_2) + 2 \alpha_n R_1 (a_1 a_5 R_{12} r_2^2 \\
& - \nu_2 a_4' \alpha_{n2} r_{12} R_2^2) F_n(r_1) \\
E_n g_n = & -r_1^2 R_1 L_2, \quad E_n g_n' = -r_2^2 R_2 L_1 \\
E_n h_n = & -2 \nu_2 \bar{\alpha}_{n1} \alpha_n R_1 R_2^2 (a_2 r_{12} R_1^2 \\
& + a_1' r_2^2 R_{12}) \\
E_n h_n' = & 2 \nu_2 \bar{\alpha}_{n1} \alpha_n R_1^2 R_2 (a_2 r_{12} R_2^2 \\
& + a_1' r_1^2 R_{12}) \\
E_n G_4 = & r_2^2 R_2 L_1 F_n^{(2)}(r_2) - r_1^2 R_1 L_2 \\
& \times F_n^{(2)}(r_1) + \nu r_2 R_2 L_1 F_n^{(1)}(r_2) \\
& - \nu r_1 R_1 L_2 F_n^{(1)}(r_1) - 2 \alpha_n R_1^2 R_2 \\
& \times (a_3 a_1' R_{12} r_1^2 + \nu_2 a_3 \alpha_{n2} r_{12} R_2^2) \\
& \times F_n(r_2) + 2 \alpha_n R_1 R_2^2 \\
& \times (a_3 a_1' R_{12} r_2^2 + \nu_2 a_3 \alpha_{n2} r_{12} R_1^2) \\
& \times F_n(r_1) \\
E_n = & 4 r_1^2 r_2^2 R_{12}^2 a_1 a_1' - 4 r_{12}^2 R_1^2 R_2^2 \nu_2 \nu_3 \alpha_n^2 \\
K_1 = & a_1 R_{12} r_2^2 + \nu_3 r_{12} R_1^2 \alpha_n \\
K_2 = & a_1 R_{12} r_1^2 + \nu_3 r_{12} R_2^2 \alpha_n \\
D_1 = & 2 (a_1 R_{12} r_1^2 - \nu_2 r_{12} R_1^2 \alpha_n) \\
D_2 = & 2 (a_1 R_{12} r_2^2 - \nu_2 r_{12} R_2^2 \alpha_n) \\
L_1 = & 2 R_1^2 (a_1' R_{12} r_1^2 + \nu_2 r_{12} R_2^2 \alpha_n) \\
L_2 = & 2 R_2^2 (a_1' R_{12} r_2^2 + \nu_2 r_{12} R_1^2 \alpha_n) \\
R_1 = & r_1^{\alpha_n}, \quad R_2 = r_2^{\alpha_n}, \quad \alpha_{n1} = \alpha_n - 1, \\
\bar{\alpha}_{n1} = & \alpha_n + 1, \quad \alpha_{n2} = \alpha_n + 2, \quad \alpha'_{n2} = \alpha_n - 2, \\
a_1 = & 2 \alpha_n - \nu_1, \quad a_2 = \nu_2 \alpha_n + 2 \nu_1, \\
a_3 = & \alpha_n + \nu_1, \quad a_4 = \alpha_n + \nu_2, \quad a_1' = 2 \alpha_n + \nu_1, \\
a_2' = & \nu_2 \alpha_n - 2 \nu_1, \quad a_3' = \alpha_n - \nu_1, \quad a_4' = \alpha_n - \nu_2, \\
R_{12} = & R_1^2 - R_2^2, \quad r_{12} = r_1^2 - r_2^2, \\
\nu_1 = & 1 + \nu, \quad \nu_2 = 1 - \nu, \quad \nu_3 = 3 + \nu
\end{aligned}$$

式 (2.15) に含まれる任意定数 M_{rn}^A , M_{rn}^B ,

δ_{An} , δ_{Bn} は未知定数のままであるが、これらは扇形板とこれを弾性支持するはり部材との間に成立すべき変形および力の連続条件により決定される。すなわち、(i) 辺ACおよびBDを弾性支持するはり部材のたわみ曲線 $\delta_A(\theta)$, $\delta_B(\theta)$ は扇形板に作用する r 方向板反力 $V_r^A(\theta) = (V_r)_{r=r_1}$, $V_r^B(\theta) = (V_r)_{r=r_2}$ と等大逆向きの力を垂直荷重として受け、かつ端モーメント $M_r^A(\theta)$, $M_r^B(\theta)$ と等大逆向きのモーメントをねじりモーメント荷重として受ける場合に生ずるたわみにはかならない。(ii) 辺ACおよびBDにおける扇形板の r 方向のたわみ角 $(\partial w / \partial r)_{r=r_1}$, $(\partial w / \partial r)_{r=r_2}$ はそれぞれの辺を弾性支持するはり部材AC, BDが板反力 $V_r^A(\theta)$, $V_r^B(\theta)$ と等大逆向きの力を垂直荷重として、また端モーメント $M_r^A(\theta)$, $M_r^B(\theta)$ と等大逆向きのモーメントをねじりモーメント荷重として受ける場合に生ずるねじれ回転角に等しい。

条件(i), (ii)より前節2・1で求めたはり部材のたわみ曲線式(2・4)およびねじれ回転角式(2・6)において $p_i(\theta)$ の代りに $V_r^A(\theta)$ および $-V_r^B(\theta)$, $m_i(\theta)$ の代りに $M_r^A(\theta)$, $M_r^B(\theta)$ をそれぞれ換用すれば、辺ACおよびBDにおけるはり部材のたわみ曲線およびねじれ回転角曲線が求められ、これらと板のたわみ曲面式(2・15)およびその r に関する一次微係数とを等置すれば、未知定数 M_{rn}^A , M_{rn}^B , δ_{An} , δ_{Bn} に関する4条件式が得られる。したがって、これらを連立に解けば、未知定数 M_{rn}^A , M_{rn}^B , δ_{An} , δ_{Bn} は辺AC, BDにおけるはり部材の中間不静定量と板に作用する外荷重との一次結合式で求められることとなり、結果のみ示せば次のとおりである。

$$\begin{aligned} M_{rn}^A &= P_n \sum_{i=1}^s R_i^A \sin \alpha_n \theta_i^A + Q_n \sum_{i=1}^t R_i^B \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^B + \frac{\alpha_n}{r_1} P_n \sum_{i=1}^s M_{\xi i}^A \\ &\times \cos \alpha_n \theta_i^A + \frac{\alpha_n}{r_2} Q_n \sum_{i=1}^t M_{\xi i}^B \\ &\times \cos \alpha_n \theta_i^B + R_n \sum_{i=1}^s M_{\eta i}^A \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^A + Z_n \sum_{i=1}^t M_{\eta i}^B \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^B + G_n \end{aligned} \quad \dots\dots(2\cdot16)$$

$$\begin{aligned} M_{rn}^B &= \bar{P}_n \sum_{i=1}^s R_i^A \sin \alpha_n \theta_i^A + \bar{Q}_n \sum_{i=1}^t R_i^B \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^B + \frac{\alpha_n}{r_1} \bar{P}_n \sum_{i=1}^s M_{\xi i}^A \\ &\times \cos \alpha_n \theta_i^A + \frac{\alpha_n}{r_2} \bar{Q}_n \sum_{i=1}^t M_{\xi i}^B \\ &\times \cos \alpha_n \theta_i^B + \bar{R}_n \sum_{i=1}^s M_{\eta i}^A \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^A + \bar{Z}_n \sum_{i=1}^t M_{\eta i}^B \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^B + \bar{G}_n \end{aligned} \quad \dots\dots(2\cdot17)$$

$$\begin{aligned} D\delta_{An} &= S_n \sum_{i=1}^s R_i^A \sin \alpha_n \theta_i^A + T_n \sum_{i=1}^t R_i^B \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^B + \frac{\alpha_n}{r_1} S_n \sum_{i=1}^s M_{\xi i}^A \\ &\times \cos \alpha_n \theta_i^A + \frac{\alpha_n}{r_2} T_n \sum_{i=1}^t M_{\xi i}^B \\ &\times \cos \alpha_n \theta_i^B + U_n \sum_{i=1}^s M_{\eta i}^A \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^A + Y_n \sum_{i=1}^t M_{\eta i}^B \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^B + C_n \end{aligned} \quad \dots\dots(2\cdot18)$$

$$\begin{aligned} D\delta_{Bn} &= \bar{S}_n \sum_{i=1}^s R_i^A \sin \alpha_n \theta_i^A + \bar{T}_n \sum_{i=1}^t R_i^B \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^B + \frac{\alpha_n}{r_1} \bar{S}_n \sum_{i=1}^s M_{\xi i}^A \\ &\times \cos \alpha_n \theta_i^A + \frac{\alpha_n}{r_2} \bar{T}_n \sum_{i=1}^t M_{\xi i}^B \\ &\times \cos \alpha_n \theta_i^B + \bar{U}_n \sum_{i=1}^s M_{\eta i}^A \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^A + \bar{Y}_n \sum_{i=1}^t M_{\eta i}^B \\ &\times \sin \alpha_n \theta_i^B + \bar{C}_n \end{aligned} \quad \dots\dots(2\cdot19)$$

ここに、

$$\begin{aligned} H_n P_n &= \bar{L}_n P_n - L_n \bar{P}_n, & H_n Q_n &= \bar{L}_n Q_n - L_n \bar{Q}_n, \\ H_n R_n &= \bar{L}_n R_n - L_n \bar{R}_n, & H_n Z_n &= \bar{L}_n Z_n - L_n \bar{Z}_n, \\ H_n G_n &= \bar{L}_n J_n - L_n \bar{J}_n, & H_n \bar{P}_n &= K_n \bar{P}_n - K_n P_n, \\ H_n Q_n &= K_n \bar{Q}_n - \bar{K}_n Q_n, & H_n \bar{R}_n &= K_n \bar{R}_n - \bar{K}_n R_n, \\ H_n \bar{Z}_n &= K_n \bar{Z}_n - \bar{K}_n Z_n, & H_n \bar{G}_n &= K_n \bar{J}_n - \bar{K}_n J_n, \\ H_n &= K_n \bar{L}_n - \bar{K}_n L_n, \end{aligned}$$

$$K_n = \tilde{s}_n(r_1) + \kappa_A r_1 \bar{J}_{An} / \alpha + \kappa_A r_1^2 \bar{J}_{An}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{S}_n(r_1)/\alpha + \textcircled{A} I_n + \textcircled{B} \bar{I}_n \\
L_n = & \tilde{I}_n(r_1) + \kappa_A r_1^3 \Delta_{An} \bar{I}_n(r_1)/\alpha \\
& + \textcircled{A} I_n + \textcircled{B} \bar{I}_n \\
P_n = & -2\kappa_A r_1 \Delta_{An}/\alpha^2 - \textcircled{A} S_n - \textcircled{B} \bar{S}_n \\
Q_n = & -\textcircled{A} T_n - \textcircled{B} \bar{T}_n \\
R_n = & 2\kappa_A \bar{\Delta}_{An}/\alpha^2 - \textcircled{A} U_n - \textcircled{B} \bar{U}_n \\
Z_n = & -\textcircled{A} Y_n - \textcircled{B} \bar{Y}_n \\
J_n = & -\{\kappa_A r_1^3 \Delta_{An} \bar{F}_n(r_1)/\alpha + \tilde{F}_n(r_1)\} \\
& - \textcircled{A} G_n - \textcircled{B} \bar{G}_n \\
\bar{K}_n = & \tilde{S}_n(r_2) - \kappa_B r_2^2 \Delta_{Bn} \bar{S}_n(r_2)/\alpha \\
& + \textcircled{B} I_n + \textcircled{A} \bar{I}_n \\
\bar{L}_n = & \tilde{I}_n(r_2) - \kappa_B r_2^2 \Delta_{Bn} \bar{I}_n(r_2)/\alpha \\
& + \kappa_B r_2 \bar{\Delta}_{Bn}/\alpha + \textcircled{B} J_n + \textcircled{A} \bar{J}_n \\
\bar{P}_n = & -\textcircled{B} S_n - \textcircled{A} \bar{S}_n \\
\bar{Q}_n = & -2\kappa_B r_2 \Delta_{Bn}/\alpha^2 - \textcircled{B} T_n - \textcircled{A} \bar{T}_n \\
\bar{R}_n = & -\textcircled{B} U_n - \textcircled{A} \bar{U}_n \\
\bar{Z}_n = & 2\kappa_B \Delta_{Bn}/\alpha^2 - \textcircled{B} Y_n - \textcircled{A} \bar{Y}_n \\
\bar{J}_n = & -\{\tilde{F}_n(r_2) - \kappa_B r_2^2 \Delta_{Bn} \bar{F}_n(r_2)/\alpha\} \\
& - \textcircled{B} G_n - \textcircled{A} \bar{G}_n \\
H_n = & \kappa_A \kappa_B r_1^3 r_2^2 \Delta_{An} \Delta_{Bn} \{\bar{u}_n(r_1) \bar{v}_n(r_2) \\
& - \bar{u}_n(r_2) \bar{v}_n(r_1)\}/\alpha^2 \\
& - \kappa_A r_1^3 \bar{\Delta}_{An} \bar{u}_n(r_1)/\alpha \\
& + \kappa_B r_2^3 \Delta_{Bn} \bar{v}_n(r_2)/\alpha - 1 \\
I_n = & -\kappa_A \kappa_B r_1^3 r_2^2 \Delta_{An} \Delta_{Bn} \{\bar{S}_n(r_1) \bar{v}_n(r_2) \\
& - \bar{S}_n(r_2) \bar{v}_n(r_1)\}/\alpha^2 \\
& - \kappa_A \kappa_B r_1^2 r_2^3 \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{v}_n(r_2)/\alpha^2 \\
& + \kappa_A r_1^3 \Delta_{An} \bar{S}_n(r_1)/\alpha + \kappa_A r_1^2 \Delta_{An}/\alpha \\
J_n = & -\kappa_A r_1^3 \Delta_{An}/\alpha \{\kappa_B r_2^2 \bar{I}_n(r_1) \bar{v}_n(r_2)/\alpha \\
& - \kappa_B r_2^3 \Delta_{Bn} \bar{I}_n(r_2) \bar{v}_n(r_1)/\alpha \\
& + \kappa_B r_2^2 \Delta_{Bn} \bar{v}_n(r_1)/\alpha - \bar{I}_n(r_1)\} \\
S_n = & 2\kappa_A r_1^2 \Delta_{An}/\alpha^2 - 2\kappa_A \kappa_B r_1^2 r_2^3 \\
& \times \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{v}_n(r_2)/\alpha^3 \\
T_n = & -2\kappa_A \kappa_B r_1^3 r_2^2 \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{v}_n(r_1)/\alpha^3 \\
U_n = & -2\kappa_A r_1 \Delta_{An}/\alpha^2 + 2\kappa_A \kappa_B r_1 r_2^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{v}_n(r_2)/\alpha^3 \\
Y_n = & 2\kappa_A \kappa_B r_1^3 r_2 \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{v}_n(r_1)/\alpha^3 \\
G_n = & -\kappa_A r_1^3 \Delta_{An}/\alpha \{\kappa_B r_2^3 \Delta_{Bn} \bar{v}_n(r_2)/\alpha \\
& - 1\} \bar{F}_n(r_1) + \kappa_A \kappa_B r_1^3 r_2^3 \\
& \times \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{v}_n(r_1) \bar{F}_n(r_2)/\alpha^2 \\
\bar{I}_n = & \kappa_B r_2^3 \Delta_{Bn}/\alpha \{\kappa_A r_1^3 \Delta_{An} \bar{S}_n(r_1) \bar{u}_n(r_2)/\alpha \\
& + \kappa_A r_1^2 \Delta_{An} \bar{u}_n(r_2)/\alpha - \kappa_A r_1^3 \\
& \times \Delta_{An} \bar{S}_n(r_2) \bar{u}_n(r_1) - \bar{S}_n(r_2)\} \\
\bar{J}_n = & -\kappa_A \kappa_B r_1^3 r_2^2 \Delta_{An} \Delta_{Bn}/\alpha^2 \{\bar{u}_n(r_1) \\
& \times \bar{I}_n(r_2) - \bar{u}_n(r_2) \bar{I}_n(r_1)\} \\
& + \kappa_A \kappa_B r_1^2 r_2^2 \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{u}_n(r_1)/\alpha^2 \\
\bar{S}_n = & 2\kappa_A \kappa_B r_1^2 r_2^3 \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{u}_n(r_2)/\alpha^3 \\
\bar{T}_n = & 2\kappa_B r_2^2 \Delta_{Bn}/\alpha^2 + 2\kappa_A \kappa_B r_1^3 r_2^2 \\
& \times \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{u}_n(r_1)/\alpha^3 \\
\bar{U}_n = & -2\kappa_A \kappa_B r_1 r_2^3 \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{u}_n(r_2)/\alpha^3 \\
\bar{Y}_n = & -2\kappa_B r_2 \Delta_{Bn}/\alpha^2 - 2\kappa_A \kappa_B r_1^3 r_2 \\
& \times \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{u}_n(r_1)/\alpha^3 \\
\bar{G}_n = & -\{\kappa_B r_2^3 \Delta_{Bn}/\alpha + \kappa_A \kappa_B r_1^3 r_2^3 \\
& \times \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{u}_n(r_1)/\alpha^2\} \bar{F}_n(r_2) \\
& + \kappa_A \kappa_B r_1^3 r_2^3 \Delta_{An} \Delta_{Bn} \bar{u}_n(r_2) \\
& \times \bar{F}_n(r_1)/\alpha^2 \\
H_n S_n = & S_n + P_n I_n + \bar{P}_n J_n, \\
H_n T_n = & T_n + Q_n I_n + \bar{Q}_n J_n, \\
H_n U_n = & U_n + R_n I_n + \bar{R}_n J_n, \\
H_n Y_n = & Y_n + Z_n I_n + \bar{Z}_n J_n, \\
H_n C_n = & G_n + J_n I_n + \bar{J}_n J_n, \\
H_n \bar{S}_n = & \bar{S}_n + P_n \bar{I}_n + \bar{P}_n \bar{J}_n, \\
H_n \bar{T}_n = & \bar{T}_n + Q_n \bar{I}_n + \bar{Q}_n \bar{J}_n, \\
H_n \bar{U}_n = & \bar{U}_n + R_n \bar{I}_n + \bar{R}_n \bar{J}_n, \\
H_n \bar{Y}_n = & \bar{Y}_n + Z_n \bar{I}_n + \bar{Z}_n \bar{J}_n, \\
H_n \bar{C}_n = & \bar{G}_n + J_n \bar{I}_n + \bar{J}_n \bar{J}_n,
\end{aligned}$$

$$\Delta_{An} = (\alpha_n^2 + 1 / \rho_A) / \alpha_n^2 (\alpha_n^2 - 1)^2,$$

$$\Delta_{Bn} = (\alpha_n^2 + 1 / \rho_B) / \alpha_n^2 (\alpha_n^2 - 1)^2,$$

$$\bar{\Delta}_{An} = (1 + 1 / \rho_A) / (\alpha_n^2 - 1)^2,$$

$$\bar{\Delta}_{Bn} = (1 + 1 / \rho_B) / (\alpha_n^2 - 1)^2,$$

$$\bar{\Delta}_{An} = (\alpha_n^2 / \rho_A + 1) / (\alpha_n^2 - 1)^2,$$

$$\bar{\Delta}_{Bn} = (\alpha_n^2 / \rho_B + 1) / (\alpha_n^2 - 1)^2$$

$$\begin{aligned} \tilde{s}_n(r) &= \alpha_n a_n r^{\alpha_n-1} - \alpha_n c_n r^{-\alpha_n-1} \\ &\quad + (\alpha_n + 2) e_n r^{\alpha_n+1} \\ &\quad - (\alpha_n - 2) g_n r^{-\alpha_n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}_n(r) &= \alpha_n \alpha_n' r^{\alpha_n-1} - \alpha_n c_n' r^{-\alpha_n-1} \\ &\quad + (\alpha_n + 2) e_n' r^{\alpha_n+1} \\ &\quad - (\alpha_n - 2) g_n' r^{-\alpha_n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(r) &= \alpha_n b_n r^{\alpha_n-1} - \alpha_n d_n r^{-\alpha_n-1} \\ &\quad + (\alpha_n + 2) f_n r^{\alpha_n+1} \\ &\quad - (\alpha_n - 2) h_n r^{-\alpha_n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_n(r) &= \alpha_n b_n' r^{\alpha_n-1} - \alpha_n d_n' r^{-\alpha_n-1} \\ &\quad + (\alpha_n + 2) f_n' r^{\alpha_n+1} \\ &\quad - (\alpha_n - 2) h_n' r^{-\alpha_n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(r) &= F_n^{(1)}(r) + \alpha_n G_1 r^{\alpha_n-1} \\ &\quad - \alpha_n G_2 r^{-\alpha_n-1} + (\alpha_n + 2) G_3 r^{\alpha_n+1} \\ &\quad - (\alpha_n - 2) G_4 r^{-\alpha_n+1} \end{aligned}$$

$$H_n \oplus_{An} = \kappa_A r_1^2 \Delta_{An} \bar{u}_n(r_1) / \alpha + \tilde{u}_n(r_1)$$

$$H_n \oplus_{Bn} = \kappa_B r_2^2 \Delta_{Bn} \bar{v}_n(r_2) / \alpha + \tilde{v}_n(r_2)$$

$$H_n \oplus_{An} = \tilde{u}_n(r_2) - \kappa_B r_2^2 \Delta_{Bn} \bar{u}_n(r_2) / \alpha$$

$$H_n \oplus_{Bn} = \tilde{v}_n(r_2) - \kappa_B r_2^2 \Delta_{Bn} \bar{v}_n(r_2) / \alpha$$

s, t: 辺ACおよびBDにおけるはり部材の中間支点(支柱)の総数

$$\kappa_A = r_1 \alpha D / E^A I_\xi^A, \quad \kappa_B = r_2 \alpha D / E^B I_\xi^B,$$

$$\rho_A = G^A J^A / E^A I_\xi^A, \quad \rho_B = G^B J^B / E^B I_\xi^B$$

$E^A I_\xi^A, E^B I_\xi^B$: はり部材の曲げ剛性

以上のように、未知定数 $M_{rn}^A, M_{rn}^B, \delta_{An}$, δ_{Bn} が求められたので、これらを式(2.15)に再代入すればたわみ曲面もまた次式のように板を弾性支持するはり部材の中間不静定量と外荷重の一

次結合式で表現されることとなる。

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= \frac{1}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \tilde{S}_n(r) \sum_{i=1}^s R_i^A S_i^A \right. \\ &\quad + \tilde{T}_n(r) \sum_{i=1}^t R_i^B S_i^B \\ &\quad + \frac{\alpha_n}{r_1} \tilde{S}_n(r) \sum_{i=1}^s M_{\xi i}^A C_i^A \\ &\quad + \frac{\alpha_n}{r_2} \tilde{T}_n(r) \sum_{i=1}^t M_{\xi i}^B C_i^B \\ &\quad + \tilde{U}_n(r) \sum_{i=1}^s M_{i\eta}^A S_i^A \\ &\quad + \tilde{Y}_n(r) \sum_{i=1}^t M_{\eta i}^B S_i^B \\ &\quad \left. + \tilde{C}_n(r) \right\} \sin \alpha_n \theta \quad \dots\dots (2.20) \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(r) &= P_n s_n(r) + \bar{P}_n t_n(r) \\ &\quad + S_n u_n(r) + \bar{S}_n v_n(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n(r) &= Q_n s_n(r) + \bar{Q}_n t_n(r) \\ &\quad + T_n u_n(r) + \bar{T}_n v_n(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n(r) &= R_n s_n(r) + \bar{R}_n t_n(r) \\ &\quad + U_n u_n(r) + \bar{U}_n v_n(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_n(r) &= Z_n s_n(r) + \bar{Z}_n t_n(r) \\ &\quad + Y_n u_n(r) + \bar{Y}_n v_n(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n(r) &= F_n(r) + G_n s_n(r) + \bar{G}_n t_n(r) \\ &\quad + C_n u_n(r) + \bar{C}_n v_n(r) \end{aligned}$$

したがって、前節2.1と同様の手法により辺ACBDにおける、はり部材の中間不静定量を求めるための基本連立方程式を誘導すれば、これを解くことにより各不静定量が求められ、その結果を式(2.20)に用いれば、単に級数和を計算するだけで板内任意点のたわみが算定されることとなる。また、たわみが求められれば、ほかの諸変位、諸断面力はたわみの微分型で与えられるゆえ、これらも全く同様に計算されることとなる。

2.2.2 基本連立方程式

扇形板・骨組複合構造の弾性支持はり部材の中間不静定量を算定するための基本連立方程式は円弧辺ACおよびBDにおいて前節2.1における

式(2.10)をたてればよいが、右辺の荷重項では $p_c(\theta)$ の代りに $V_r^A(\theta)$, $-V_r^B(\theta)$, $m_\eta(\theta)$ の代りに $M_r^A(\theta)$, $M_r^B(\theta)$ を換用し, $m_\varepsilon(\theta)$ に関しては本複合構造では伝達されないのですべて省略する。上記の操作により次のごとき結果がえられる。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^s (D_{ik}^A - \Gamma_{ik}^A) R_i^A - \sum_{i=1}^t A_{ik}^A R_i^B \\ & + \sum_{i=1}^s (D_{ik}^{A'} - \Gamma_{ik}^{A'}) M_{\xi i}^A \\ & - \sum_{i=1}^t A_{ik}^{A'} M_{\xi i}^B - \sum_{i=1}^s (\bar{D}_{ik}^A - \bar{\Gamma}_{ik}^A) \\ & \times M_{\eta i}^A + \sum_{i=1}^t \bar{A}_{ik}^A M_{\eta i}^B = \tilde{D}_k^A - d_k^A D, \\ & \sum_{i=1}^s (H_{ik}^A - \varepsilon_{ik}^A) R_i^A - \sum_{i=1}^t \Phi_{ik}^A R_i^B \\ & + \sum_{i=1}^s (H_{ik}^{A'} - \varepsilon_{ik}^{A'}) M_{\xi i}^A - \sum_{i=1}^t \Phi_{ik}^{A'} M_{\xi i}^B \\ & - \sum_{i=1}^s (\bar{H}_{ik}^A - \bar{\varepsilon}_{ik}^A) M_{\eta i}^A \\ & + \sum_{i=1}^t \bar{\Phi}_{ik}^A M_{\eta i}^B = \tilde{H}_k^A - \tau_{\xi k}^A D, \\ & \sum_{i=1}^s (L_{ik}^A - \Psi_{ik}^A) R_i^A - \sum_{i=1}^t \Omega_{ik}^A R_i^B \\ & + \sum_{i=1}^s (L_{ik}^{A'} - \Psi_{ik}^{A'}) M_{\xi i}^A \\ & - \sum_{i=1}^t \Omega_{ik}^{A'} M_{\xi i}^B - \sum_{i=1}^s (\bar{L}_{ik}^A - \bar{\Psi}_{ik}^A) \\ & \times M_{\eta i}^A + \sum_{i=1}^t \bar{\Omega}_{ik}^A M_{\eta i}^B = \tilde{L}_k^A + \tau_{\eta k}^A D, \end{aligned}$$

ただし, $k = 1, 2, \dots, s$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^s A_{ik}^B R_i^A + \sum_{i=1}^t (D_{ik}^B - \Gamma_{ik}^B) R_i^B \\ & - \sum_{i=1}^s A_{ik}^{B'} M_{\xi i}^A + \sum_{i=1}^t (D_{ik}^{B'} \\ & - \Gamma_{ik}^{B'}) M_{\xi i}^B + \sum_{i=1}^s \bar{A}_{ik}^B M_{\eta i}^A \\ & - \sum_{i=1}^t (\bar{D}_{ik}^B - \bar{\Gamma}_{ik}^B) M_{\eta i}^B = \tilde{D}_k^B - d_k^B D, \\ & - \sum_{i=1}^s \Phi_{ik}^B R_i^A + \sum_{i=1}^t (H_{ik}^B - \varepsilon_{ik}^B) R_i^B \\ & - \sum_{i=1}^s \Phi_{ik}^{B'} M_{\xi i}^A + \sum_{i=1}^t (H_{ik}^{B'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \varepsilon_{ik}^{B'}) M_{\xi i}^B + \sum_{i=1}^s \bar{\Phi}_{ik}^B M_{\eta i}^A \\ & - \sum_{i=1}^t (\bar{H}_{ik}^B - \bar{\varepsilon}_{ik}^B) M_{\eta i}^B = \tilde{H}_k^B - \tau_{\xi k}^B D, \\ & - \sum_{i=1}^s \Omega_{ik}^B R_i^A + \sum_{i=1}^t (L_{ik}^B - \Psi_{ik}^B) R_i^B \\ & - \sum_{i=1}^s \Omega_{ik}^{B'} M_{\xi i}^A + \sum_{i=1}^t (L_{ik}^{B'} \\ & - \Psi_{ik}^{B'}) M_{\xi i}^B + \sum_{i=1}^s \bar{\Omega}_{ik}^B M_{\eta i}^A \\ & - \sum_{i=1}^t (\bar{L}_{ik}^B - \bar{\Psi}_{ik}^B) M_{\eta i}^B = \tilde{L}_k^B + \tau_{\eta k}^B D \\ & \text{ただし, } k = 1, 2, \dots, t \end{aligned}$$

.....(2.21)

ここに、形状定数

$$\begin{aligned} D_{ik}^A &= 2 r_1 / \alpha \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} A_{An} S_i^A S_k^A, \\ D_{ik}^{A'} &= 2 / \alpha \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_{An} C_i^A S_k^A, \\ \bar{D}_{ik}^A &= 2 / \alpha \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} A_{An} S_i^A S_k^A, \\ H_{ik}^A &= 2 \bar{\kappa}_A / \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_{An} S_i^A C_k^A, \\ H_{ik}^{A'} &= 2 \bar{\kappa}_A / \alpha r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 A_{An} S_i^A C_k^A, \\ \bar{H}_{ik}^A &= 2 \bar{\kappa}_A / \alpha r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_{An} S_i^A C_k^A, \\ L_{ik}^A &= 2 \bar{\kappa}_A / \alpha \sum_{n=1}^{\infty} A_{An} S_i^A S_k^A, \\ L_{ik}^{A'} &= 2 \bar{\kappa}_A / \alpha r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_{An} C_i^A S_k^A, \\ \bar{L}_{ik}^A &= 2 \bar{\kappa}_A / \alpha r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{An} S_i^A S_k^A, \\ D_{ik}^B &= 2 r_2 \bar{\kappa}_B / \alpha \sum_{n=1}^{\infty} A_{Bn} S_i^B S_k^B, \\ D_{ik}^{B'} &= 2 \bar{\kappa}_B / \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_{Bn} C_i^B S_k^B, \\ \bar{D}_{ik}^B &= 2 \bar{\kappa}_B / \alpha \sum_{n=1}^{\infty} A_{Bn} S_i^B S_k^B, \\ H_{ik}^B &= 2 \bar{\kappa}_B / \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_{Bn} S_i^B C_k^B, \\ H_{ik}^{B'} &= 2 \bar{\kappa}_B / \alpha r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 A_{Bn} C_i^B C_k^B, \\ \bar{H}_{ik}^B &= 2 \bar{\kappa}_B / \alpha r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_{Bn} S_i^B C_k^B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{ik}^B &= 2\bar{\kappa}_B / \alpha \sum_{n=1}^{\infty} A_{Bn} S_i^B S_k^B, \\
L_{ik}^{B'} &= 2\bar{\kappa}_B / \alpha r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_{Bn} C_i^B S_k^B, \\
\bar{L}_{ik}^B &= 2\bar{\kappa}_B / \alpha r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{Bn} S_i^B S_k^B, \\
\Gamma_{ik}^A &= r_1 \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_{An} S_i^A S_k^A, \\
A_{ik}^A &= r_1 \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Q}_{An} S_i^A S_k^A, \\
\Gamma_{ik}^{A'} &= \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{P}_{An} C_i^A S_k^A, \\
A_{ik}^{A'} &= r_1 \bar{\kappa}_A / r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{Q}_{An} C_i^A S_k^A, \\
\bar{\Gamma}_{ik}^A &= -r_1 \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{R}_{An} S_i^A S_k^A, \\
\bar{A}_{ik}^A &= -r_1 \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{R}_{An} S_i^A S_k^A, \\
\bar{E}_{ik}^A &= \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{P}_{An} S_i^A C_k^A, \\
\Phi_{ik}^A &= \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{Q}_{An} S_i^B C_k^A, \\
\bar{E}_{ik}^{A'} &= \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 / r_1 \tilde{P}_{An} C_i^A C_k^A, \\
\Phi_{ik}^{A'} &= \bar{\kappa}_A / r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \tilde{Q}_{An} C_i^B C_k^A, \\
\bar{E}_{ik}^A &= -\bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{R}_{An} S_i^A C_k^A, \\
\bar{\Phi}_{ik}^A &= -\bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{Z}_{An} S_i^B S_k^A, \\
\Psi_{ik}^A &= \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_{An} S_i^A S_k^A, \\
\Omega_{ik}^A &= \bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Q}_{An} S_i^B S_k^A, \\
\Psi_{ik}^{A'} &= \bar{\kappa}_A / r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{P}_{An} C_i^A S_k^A, \\
\Omega_{ik}^{A'} &= \bar{\kappa}_A / r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{Q}_{An} C_i^B S_k^A, \\
\bar{\Psi}_{ik}^A &= -\bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{R}_{An} S_i^A S_k^A, \\
\bar{\Omega}_{ik}^A &= -\bar{\kappa}_A \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Z}_{An} S_i^B S_k^A, \\
A_{ik}^B &= r_2 \bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_{Bn} S_i^A S_k^B, \\
\Gamma_{ik}^B &= r_2 \bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Q}_{Bn} S_i^B S_k^B, \\
A_{ik}^{B'} &= r_2 / r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{P}_{Bn} C_i^A S_k^B, \\
\Gamma_{ik}^{B'} &= \bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Q}_{Bn} C_i^B S_k^B, \\
\bar{A}_{ik}^B &= -r_2 \bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{R}_{Bn} S_i^A S_k^B, \\
\bar{\Gamma}_{ik}^B &= -r_2 \bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Z}_{Bn} S_i^B S_k^B, \\
\Phi_{ik}^B &= \bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{P}_{Bn} S_i^A C_k^B, \\
\bar{E}_{ik}^B &= \bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{Q}_{Bn} S_i^B C_k^B, \\
\Phi_{ik}^{B'} &= \bar{\kappa}_B / r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \tilde{P}_{Bn} C_i^A C_k^B, \\
\bar{E}_{ik}^{B'} &= \bar{\kappa}_B / r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \tilde{Q}_{Bn} C_i^B C_k^B, \\
\bar{\Phi}_{ik}^B &= -\bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{R}_{Bn} S_i^A C_k^B, \\
\bar{E}_{ik}^B &= -\bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{Z}_{Bn} S_i^B C_k^B, \\
\Omega_{ik}^B &= \bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_{Bn} S_i^A S_k^B, \\
\Psi_{ik}^B &= \bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Q}_{Bn} S_i^B S_k^B, \\
\Omega_{ik}^{B'} &= \bar{\kappa}_B / r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{P}_{Bn} C_i^A S_k^B, \\
\Psi_{ik}^{B'} &= \bar{\kappa}_B / r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{Q}_{Bn} C_i^B S_k^B, \\
\bar{\Omega}_{ik}^B &= -\bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{R}_{Bn} S_i^A S_k^B, \\
\bar{\Psi}_{ik}^B &= -\bar{\kappa}_B \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Z}_{Bn} S_i^B S_k^B, \\
\tilde{P}_{An} &= r_1 A_{An} P'_n - A_{An} P_n, \\
\tilde{Q}_{An} &= r_1 A_{An} Q'_n - A_{An} Q_n, \\
\tilde{R}_{An} &= r_1 A_{An} R'_n - A_{An} R_n, \\
\tilde{Z}_{An} &= r_1 A_{An} Z'_n - A_{An} Z_n, \\
\tilde{P}_{Bn} &= r_2 A_{Bn} \bar{P}'_n - A_{Bn} \bar{P}_n, \\
\tilde{Q}_{Bn} &= r_2 A_{Bn} \bar{Q}'_n - A_{Bn} \bar{Q}_n, \\
\tilde{R}_{Bn} &= r_2 A_{Bn} \bar{R}'_n - A_{Bn} \bar{R}_n, \\
\tilde{Z}_{Bn} &= r_2 A_{Bn} \bar{Z}'_n - A_{Bn} \bar{Z}_n, \\
P'_n &= \tilde{P}_n(r_1), & \bar{P}'_n &= \tilde{P}_n(r_2), \\
Q'_n &= \tilde{Q}_n(r_1), & \bar{Q}'_n &= \tilde{Q}_n(r_2), \\
R'_n &= \tilde{R}_n(r_1), & \bar{R}'_n &= \tilde{R}_n(r_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z'_n &= \tilde{Z}_n(r_1), & \bar{Z}'_n &= \tilde{Z}_n(r_2), \\
H_n \tilde{P}_n(r) &= -S_n \bar{u}_n(r) - \bar{S}_n \bar{v}_n(r) \\
&\quad - (P_n I_n + \bar{P}_n J_n) \bar{u}_n(r) \\
&\quad - (P_n \bar{I}_n + \bar{P}_n \bar{J}_n) \bar{v}_n(r) \\
&\quad - H_n \{P_n \bar{s}_n(r) + \bar{P}_n \bar{t}_n(r)\}, \\
H_n \tilde{Q}_n(r) &= -T_n \bar{u}_n(r) - \bar{T}_n \bar{v}_n(r) \\
&\quad - (Q_n I_n + \bar{Q}_n J_n) \bar{u}_n(r) \\
&\quad - (Q_n \bar{I}_n + \bar{Q}_n \bar{J}_n) \bar{v}_n(r) \\
&\quad - H_n \{Q_n \bar{s}_n(r) + \bar{Q}_n \bar{t}_n(r)\}, \\
H_n \tilde{R}_n(r) &= -U_n \bar{u}_n(r) - \bar{U}_n \bar{v}_n(r) \\
&\quad - (R_n I_n + \bar{R}_n J_n) \bar{u}_n(r) \\
&\quad - (R_n \bar{I}_n + \bar{R}_n \bar{J}_n) \bar{v}_n(r) \\
&\quad - H_n \{R_n \bar{s}_n(r) + \bar{R}_n \bar{t}_n(r)\}, \\
H_n \tilde{Z}_n(r) &= -Y_n \bar{u}_n(r) - \bar{Y}_n \bar{v}_n(r) \\
&\quad - (Z_n I_n + \bar{Z}_n J_n) \bar{u}_n(r) \\
&\quad - (Z_n \bar{I}_n + \bar{Z}_n \bar{J}_n) \bar{v}_n(r) \\
&\quad - H_n \{Z_n \bar{s}_n(r) + \bar{Z}_n \bar{t}_n(r)\}, \\
H_n \tilde{G}_n(r) &= -H_n \bar{F}_n(r) - G_n \bar{u}_n(r) \\
&\quad - \bar{G}_n \bar{v}_n(r) - (J_n I_n + \bar{J}_n J_n) \\
&\quad \times \bar{u}_n(r) - (J_n \bar{I}_n + \bar{J}_n \bar{J}_n) \bar{v}_n(r) \\
&\quad - H_n \{J_n \bar{s}_n(r) + \bar{J}_n \bar{t}_n(r)\}
\end{aligned}$$

荷重項：

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_k^A &= \sum_{n=1}^{\infty} \{r_1 \mathcal{A}_{An} \tilde{G}_n(r_1) - \mathcal{A}_{An} G_n\} \\
&\quad \times S_k^A r_1 \bar{\kappa}_A D, \\
\tilde{H}_k^A &= \sum_{n=1}^{\infty} \{r_1 \mathcal{A}_{An} \tilde{G}_n(r_1) - \mathcal{A}_{An} G_n\} \\
&\quad \times \alpha_n C_k^A \bar{\kappa}_A D, \\
\tilde{L}_k^A &= \sum_{n=1}^{\infty} \{r_1 \mathcal{A}_{An} \tilde{G}_n(r_1) - \mathcal{A}_{An} G_n\} \\
&\quad \times S_k^A \bar{\kappa}_A D, \\
\tilde{D}_k^B &= \sum_{n=1}^{\infty} \{r_2 \mathcal{A}_{Bn} \tilde{G}_n(r_2) - \mathcal{A}_{Bn} \bar{G}_n\} \\
&\quad \times S_k^B r_2 \bar{\kappa}_B D, \\
\tilde{H}_k^B &= \sum_{n=1}^{\infty} \{r_2 \mathcal{A}_{Bn} \tilde{G}_n(r_2) - \mathcal{A}_{Bn} \bar{G}_n\} \\
&\quad \times \alpha_n C_k^B \bar{\kappa}_B D, \\
\tilde{L}_k^B &= \sum_{n=1}^{\infty} \{r_2 \mathcal{A}_{Bn} \tilde{G}_n(r_2) - \mathcal{A}_{Bn} \bar{G}_n\}
\end{aligned}$$

$$\times S_k^B \bar{\kappa}_B D,$$

$$\bar{\kappa}_A = r_1 \kappa_A / \alpha, \quad \bar{\kappa}_B = r_2 \kappa_B / \alpha$$

式(2.21)が本複合構造の中間不静定量を求めるための基本連立方程式であるが、左辺の形状定数のうちゴシック体英文字であらわした D_{ki}^A , D_{ki}^B , $\dots$, L_{ik}^B , L_{ik}^B , $\bar{L}_{ik}^B$ は扇形板を弾性支持するはり部材自身の変位、変形に由来するもので、ギリシャ文字であらわした Γ_{ik}^A , Γ_{ik}^B , $\bar{\Gamma}_{ik}^B$, $\dots$, Ψ_{ik}^B , Ψ_{ik}^B , $\bar{\Psi}_{ik}^B$ はそれぞれはり部材が扇形板と結合してそれだけ剛性が高まるゆえ、その結果として生ずる扇形板のはり部材の変位、変形に及ぼす抵抗をあらわすものである。これらの形状定数は本複合構造における静定基本構、すなわち、直線辺が単純支持され、円弧辺が単スパンの円形曲りばりで弾性支持されるごとき力学系の円弧辺に沿って単位垂直荷重、単位曲げモーメントおよび単位ねじりモーメントが作用する場合の当該円弧辺の示す垂直変位および ξ , η 方向の回転角をある定数倍して得られる物理量である。また、右辺第1項の荷重項は本複合構造に作用する荷重の種類によって定まる。右辺第2項の d , τ_ξ , τ_η は垂直変位 ξ , η 軸まわりの回転角であり、 τ_ξ , τ_η は前節2.1で述べたと同様骨組の柱部材にたわみ角式を適用することにより柱頭の未知反力モーメントと関連づけられる。

これらの形状定数および荷重項は扇形板の形状すなわち開角や辺長比(直線辺長と中央円弧長との比)あるいは支点(支柱)位置、はり部材の断面諸寸法により定まるゆえ、あらかじめ各パラメータにつき計算し、数表に整理しておけば、あとはこれらを適出して単に連立方程式を解くだけの簡単な操作で本複合構造の不静定量が算出される。さらに、扇形板自体のたわみ、曲げモーメント、そのほかの変位、断面力もあらかじめ各種の構造形状および材質に関するパラメータについて単位中間不静定量を作用させた場合の結果を算出のうえ数表化すれば、これらに上記基本連立方程式より得られる不静定量を乗算するだけで得られるゆえ、机上において簡単に本複合構造のごとき複雑な構造物の各種の変位や応力が求められるこ

ととなり、特にコンピューターの無い現場において非常に便利である。

2.2.3 計算例

(a) 単スパン円形曲りばりに弾性支持される場合
Fig. 2.5 に示すように、開角 α が $\pi/3$ 、辺長比

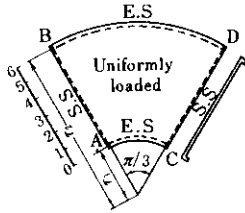


Fig. 2.5

$(r_2 - r_1) / \{ (r_1 + r_2) \alpha / 2 \}$ が 1.0 なる扇形板 ABCD において、直線辺 AB, CD が単純支持され円弧辺 AC, BD がそれぞれ $\kappa_A = 15.634$, $\kappa_B = 50$, $\rho_A = \rho_B = 0.64875$ (正方形断面) なる諸値を

有する単スパンの円形曲りばりで弾性支持され、かつ等分布荷重 (強度 p_0) が満載されているものとする。また、簡単のために扇形板よりはりには垂直板反力のみが伝達され、曲げモーメントは伝達されないものとする。しかるとき、扇形板のたわみ曲面は本複合構造が中間不静定量をもたないゆえ、式 (2.20) を参照して次の形となる。

$$w(r, \theta) = \frac{1}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n(r) \sin \alpha_n \theta \quad \dots\dots (2.22)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n(r) &= F_n(r) + C_n u_n(r) + \bar{C}_n \times v_n(r), \\ C_n &= G_n / H_n, \quad \bar{C}_n = \bar{G}_n / H_n \end{aligned}$$

式 (2.22) を直線辺および開角を六等分してえられる格子点につき級数計算すれば、Table 2.1 のとき結果がえられる。同様に板内の半径および接線方向曲げモーメントを算定すれば、Table 2.2, 2.3 のように求まる。

Table 2.1 Deflection w of the primary plate structure subjected to uniformly distributed load

$r \backslash \theta$	1/6 ($\pi/3$)	2/6 ($\pi/3$)	3/6 ($\pi/3$)	4/6 ($\pi/3$)	5/6 ($\pi/3$)
0	.004728	.008175	.009432		
1	.009631	.016631	.019179		
2	.016443	.028353	.032677		
3	.025061	.043149	.049700	symmetry	
4	.035198	.060524	.069677		
5	.046626	.080100	.092180		
6	.059371	.101896	.117214		

($\times 10^{-1} p_0 r_2^4 / D$)

Table 2.2 Bending moment M_r of the primary plate structure subjected to uniformly distributed load

$r \backslash \theta$	1/6 ($\pi/3$)	2/6 ($\pi/3$)	3/6 ($\pi/3$)	4/6 ($\pi/3$)	5/6 ($\pi/3$)
0	0	0	0		
1	-.003991	-.007273	-.008503		
2	-.001945	-.003999	-.004817		
3	.001139	.000933	.000726	symmetry	
4	.003539	.004568	.004742		
5	.003804	.004833	.005305		
6	0	0	0		

($\times p_0 r_2^2$)

次に Fig. 2.5 と全く同様の構造形式および荷重状態の複合構造において、円弧辺のはり部材の剛度を種々変化させた場合のたわみおよび曲げモ

ーメントの挙動を調べれば、Fig. 2.6~2.8 のとき結果がえられる。たわみについては Fig. 2.6 より明らかなように、 $\kappa_B = 1$ を除いて $\kappa_B = 20$,

Table 2.3 Bending moment M_θ of the primary plate structure subjected to uniformly distributed load

$r \backslash \theta$	1/6 ($\pi/3$)	2/6 ($\pi/3$)	3/6 ($\pi/3$)	4/6 ($\pi/3$)	5/6 ($\pi/3$)
0	.029797	.050567	.057957		
1	.032181	.053614	.061108		
2	.035528	.058165	.065906		
3	.038797	.062470	.070404		
4	.041176	.065343	.073320		
5	.042134	.066195	.074048		
6	.041357	.064675	.072212		

($\times p_0 r_2^2$)

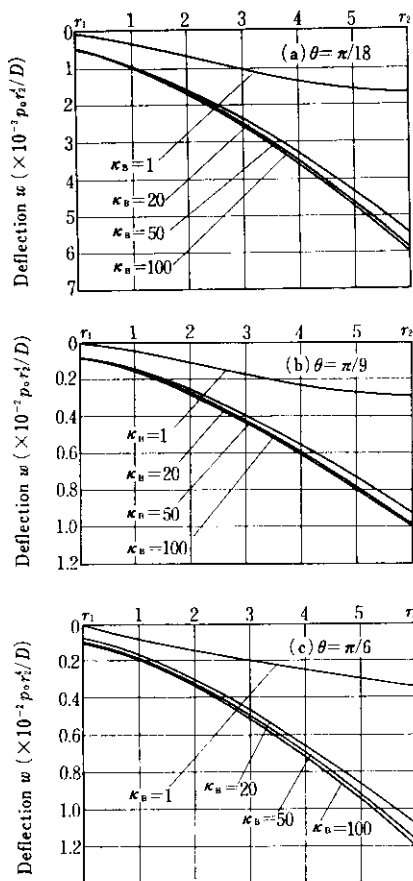


Fig. 2.6 Deflections for various values of stiffness parameter κ_B

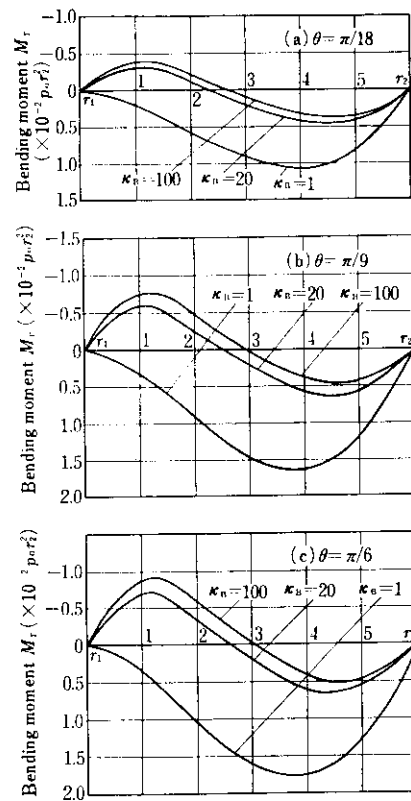


Fig. 2.7 Bending moments in radial direction for various values of stiffness parameter κ_B

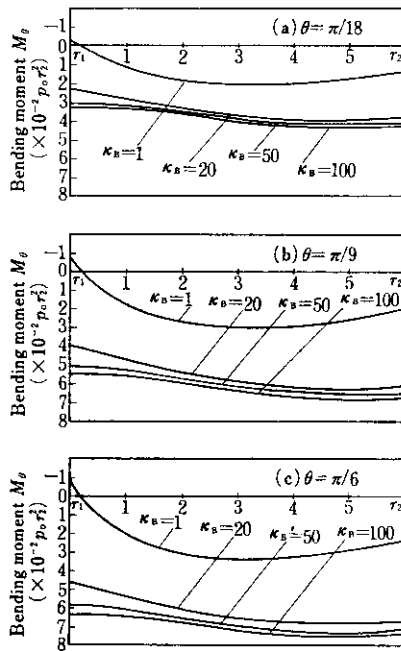


Fig. 2-8 Bending moments in tangential direction for various values of stiffness parameter κ_B

50, 100 の場合は、ほとんどその値に差異は見受けられないが、 $\kappa_B = 1$ は前 3 例に比して著しく値が減少し、板中央点 $\{(r_1 + r_2)/2, \alpha/2\}$ では約 6 割の減少を示し、外側円弧中央点 $(r_2, \alpha/2)$ では約 7 割減少することが判明する。半径方向曲げモーメントに関しては $\kappa_B = 20, 100$ はほぼ似たような挙動を呈するが $\kappa_B = 1$ では前 2 例と異なり板中央点近傍より内側円弧辺に至る領域で負値は生じない。このことは外側円弧辺のはり部材の剛性が増大するため全体のたわみ量が減少し、たわみの r 方向に関する曲率が正になることに起因している。同様に接線方向曲げモーメントについては $\kappa_B = 20, 50, 100$ の 3 例は、ほぼ類似の挙動を示し、 $\kappa_B = 1$ の場合は値が著しく減少し、内側円弧辺上で一部負値を生ずる。

さらに、Fig. 2-5 と同一構造形式、荷重状態において、はり部材の剛性を $\kappa_B = 1$ と一定にし、はり部材のねじれ抵抗を考慮する場合、すなわち、円弧辺において扇形板よりはり部材へ垂直反力のみならず、曲げモーメントも伝達される場合

についてたわみおよび曲げモーメントを算定のうえ図示すれば、Fig. 2-9 ~ 2-11 のごとき結果がえられる。なお、図中破線がねじり考慮の場合、実線はねじり無視の場合の曲線である。図より明らかなごとく、はり部材のねじり抵抗を考慮する場合とこれを無視する場合とではかなりの差異を生じ、たわみに関しては板中央点近傍での影響が著しく、ねじり無視の場合に比して約 12.7% 減少している。著しく様相の異なるのは半径方向曲げモーメントで、内外側円弧辺において大きな負曲げモーメントを生ずる。この負曲げモーメントは

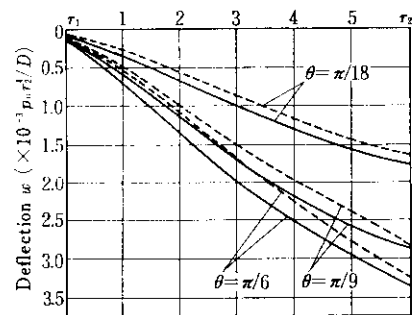


Fig. 2-9 Difference of deflection w between the case considered the torsional resistance of edge beam members and neglected it

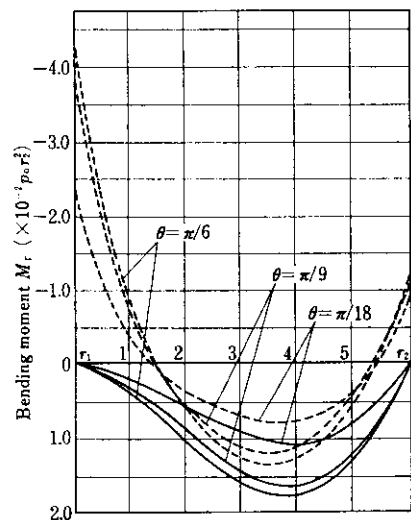


Fig. 2-10 Difference of bending moment M_r between the case considered the torsional resistance of edge beam members and neglected it

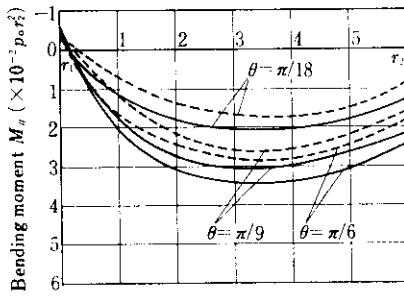


Fig. 2-11 Difference of bending moment M_θ between in the case considered the torsional resistance of edge beam members and neglected it

内側円弧辺上のものが外側円弧辺上のそれよりはるかに大きく、両辺の最大のものを比べると内側のものは外側のものの約4倍である。また、板中央点近傍の正曲げモーメントも著しく減少し、板中央点で約23%の減少を示す。同様に接線方向曲げモーメントについてもねじれ抵抗を考慮することにより、値は減少するが、板中央点において約16.5%程度の減少で半径方向曲げモーメントほど変化は大でない。以上の結果から、はりのねじり抵抗を無視することはあまりにも大胆な仮定であるといえ、実際の設計においてはねじり抵抗を考慮した厳密計算によらねばならないことが判明する。

(b) 2 スパン連続円形曲りばりに弾性支持される場合

Fig. 2-12 に示す扇形板・骨組複合構造におい

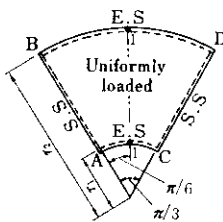


Fig. 2-12

て、円弧辺AC, BDが2スパンの連続円形曲りばりで弾性支持され、等分布荷重が満載されているものとする。このとき、円弧辺における連続円形曲りばりの中間支点反力 R_1^A , R_1^B を求めるための基本連立方程式は次のとき内容となる。

$$\left. \begin{aligned} (D_{11}^A - \Gamma_{11}^A) R_1^A - A_{11}^A R_1^B &= \tilde{D}_1^A d_1^A D \\ - A_{11}^A R_1^A + (D_{11}^B - \Gamma_{11}^B) R_1^B &= \tilde{D}_1^B d_1^B D \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(2-13)$$

いま、 $\kappa_A = 15.634$, $\kappa_B = 50$, $\nu = 0.3$, $\rho_A = \rho_B = 0.64875$, 辺長比1.0とし、また連続ばりの中間支点が沈下しないものとすれば(このとき、 $d_1^A = d_1^B = 0$)、式(2-23)の形状定数および荷重項が算定でき、次式のごとくなる。

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0.0050541 & 0.0035026 \\ 0.0035026 & 0.0083872 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1^A \\ R_1^B \end{pmatrix} \\ &= p_0 r_1^2 \begin{pmatrix} 0.00094324 \\ 0.011721 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(2-24) \end{aligned}$$

上式を解いて、次の結果を得る。

$$R_1^A = 0.09246 p_0 r_1^2, R_1^B = 0.1359 p_0 r_1^2 \quad \dots\dots(2-25)$$

式(2-25)の値と全作用荷重との割合を算定すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{支点の荷重分担率} &= \frac{R_1^A + R_1^B}{\text{全載荷重}} \times 100 \\ &= 48.4 (\%) \end{aligned}$$

すなわち、板面に作用する等分布荷重の約半分を支点で受け持つこととなる。当然のことながら R_1^A より R_1^B の方が分担率は大で、それぞれ 19.6%, 28.8%である。本例における扇形板のたわみ曲面は式(2-20)より次のごとく与えられる。

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= \frac{1}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \tilde{S}_n(r) R_1^A \sin \frac{n\pi}{2} \right. \\ &\quad + \tilde{T}_n(r) R_1^B \sin \frac{n\pi}{2} \\ &\quad \left. + \tilde{C}_n(r) \right\} \sin 3n\theta \quad \dots\dots(2-26) \end{aligned}$$

いま簡単のため、はり部材には曲げモーメントが伝達されないものとすれば、式(2-26)における第3項は前例(a)の Table 2-1 がそのまま適用でき、また、第1項および第2項の中間不静定量

の項は、単位反力すなわち $R_1^A = R_1^B = 1$ の場合について計算して **Table 2.4**、**2.5** のごとき結果を得る。したがって、式(2.25)の反力値を **Table 2.4** および **Table 2.5** にそれぞれ乗じたものと **Table 2.1** とを重ね合せば、式(2.26)のたわみ

曲面が算定されることとなる。かかる手法は本解法に一貫したもので、これはとりもなおさず冒頭に述べたごとく計算例(a)のごとき構造を静定基本構にした板における不静定余力法である。本例のたわみは **Table 2.6** に示すような結果であり、

Table 2.4 Deflection w of the primary plate structure subjected to concentrated reaction $R_1^A = 1$

$r \backslash \theta$	1/6 ($\pi/3$)	2/6 ($\pi/3$)	3/6 ($\pi/3$)	4/6 ($\pi/3$)	5/6 ($\pi/3$)
0	-.23085	-.41925	-.50541		
1	-.17509	-.30701	-.35693		
2	-.14862	-.25825	-.29869		
3	-.13975	-.24228	-.27989	symmetry	
4	-.14299	-.24774	-.28611		
5	-.15544	-.26926	-.31094		
6	-.17511	-.30332	-.35026		

($\times 10^{-2} R_1^A r_2^2/D$)

Table 2.5 Deflection w of the primary plate structure subjected to concentrated reaction $R_1^B = 1$

$r \backslash \theta$	1/6 ($\pi/3$)	2/6 ($\pi/3$)	3/6 ($\pi/3$)	4/6 ($\pi/3$)	5/6 ($\pi/3$)
0	-.01751	-.03033	-.03503		
1	-.04235	-.07339	-.08477		
2	-.08047	-.13967	-.16144		
3	-.13580	-.23523	-.27249	symmetry	
4	-.20607	-.36199	-.42143		
5	-.29131	-.51828	-.60984		
6	-.38668	-.69801	-.83871		

($\times 10^{-1} R_1^B r_2^2/D$)

Table 2.6 Deflection w of the uniformly loaded circular ring sector plate with two opposite circular edges elastically supported by two span circular continuous beams

$r \backslash \theta$	1/6 ($\pi/3$)	2/6 ($\pi/3$)	3/6 ($\pi/3$)	4/6 ($\pi/3$)	5/6 ($\pi/3$)
0	.00214	.00177	0		
1	.02257	.03819	.04360		
2	.04133	.06986	.07978		
3	.05423	.08942	.10083	symmetry	
4	.05872	.09042	.09763		
5	.05602	.07180	.06432		
6	.05205	.04237	0		

($\times 10^{-2} p_0 r_2^4/D$)

Table 2.7 Bending moment M_r of the uniformly loaded circular ring sector plate with two opposite circular edges elastically supported by two span circular continuous beams

$r \backslash \theta$	1/6 ($\pi/3$)	2/6 ($\pi/3$)	3/6 ($\pi/3$)	4/6 ($\pi/3$)	5/6 ($\pi/3$)
0	0	0	0		
1	.03915	.06840	.08150		
2	.07855	.14350	.16744		
3	.10986	.19603	.23422	symmetry	
4	.10766	.20135	.25788		
5	.07094	.13301	.21518		
6	0	0	0		

($\times 10^{-1} p_0 r_2^2$)

Table 2.8 Bending moment M_θ of the uniformly loaded circular ring sector plate with two opposite circular edges elastically supported by two span circular continuous beams

$r \backslash \theta$	1/6 ($\pi/3$)	2/6 ($\pi/3$)	3/6 ($\pi/3$)	4/6 ($\pi/3$)	5/6 ($\pi/3$)
0	.03451	-.02906	-.38836		
1	.09349	.12622	.12671		
2	.13802	.19668	.20922		
3	.16430	.21366	.21310	symmetry	
4	.18283	.19818	.15316		
5	.19845	.17157	-.00515		
6	.20745	.16784	-.62676		

($\times 10^{-1} p_0 r_2^2$)

板内半径および接線方向曲げモーメントも同様の手法により **Table 2.7**, **2.8**のごとく求められる。

次に **Fig. 2.12** の状態ではり部材のねじり抵抗を考慮する場合について解析すれば以下のとおりである。まず中間支点反力を求めるための基本連立方程式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 0.0045169 & 0.0036244 \\ 0.0036244 & 0.083752 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1^A \\ R_1^B \end{pmatrix} = p_0 r_2^2 \begin{pmatrix} 0.0009800 \\ 0.011724 \end{pmatrix} \quad \dots (2.27)$$

上式を解いて、次値が得られる。

$$R_1^A = 0.1011 p_0 r_2^2, \quad R_1^B = 0.1356 p_0 r_2^2 \quad \dots (2.28)$$

これらを式 (2.25) と比較すれば、 R_1^A は 9.3

%の増加を示し、 R_1^B についてはほとんど変化が見られず、わずかに減少する。したがって、はり部材のねじり抵抗を考慮する場合、荷重の分担が内側円弧辺の方に移動することが判明する。また、板内のたわみおよび曲げモーメントについて比較すれば、それぞれ **Fig. 2.13**~**2.15** のごとく

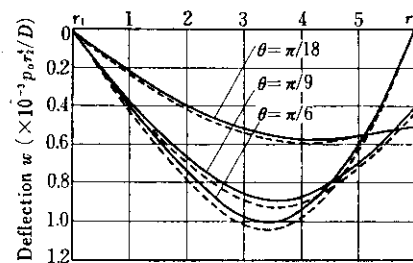


Fig. 2.13 Difference of deflection w between the case considered the torsional resistance of edge beam members and neglected it

なる。ただし、図中破線はねじり抵抗を無視した場合の曲線である。図より明らかなごとくたわみ

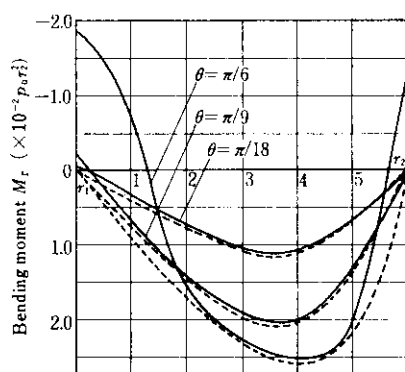


Fig. 2-14 Difference of bending moment M_r between the case considered the torsional resistance of edge beam members and neglected it

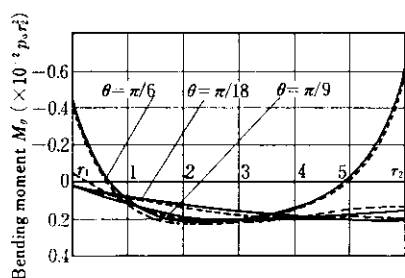


Fig. 2-15 Difference of bending moment M_θ between the case considered the torsional resistance of edge beam members and neglected it

に関しては当然のことながらねじり抵抗を考慮すればそれだけ構造的に剛度が増大するゆえ、値も減少するが、板中央点においてはねじり無視の場合に比して約2.4%の減少にすぎない。 M_r については様相が異なり、ねじり抵抗を考慮することにより、内側円弧辺上に負曲げモーメントが発生し、特に $\theta = \pi/6$ 断面上では内外側円弧辺ともに絶対値大なる負曲げモーメントを生ずる。しかるに、板中央部ではほとんど差異は見受けられず、このことからやはり部材のねじり抵抗はその近傍の曲げモーメントに影響を及ぼすが、板中央部までその影響が波及しないことが判明する。 M_θ 値は全体的にほとんどねじり抵抗の影響は見受けられず、その差異はたかだか3%内外である。

(c) T型ラーメンに弾性支持される場合

Fig. 2-16 に示すとき円弧辺をT型ラーメンで弾性支持される複合構造において、比較のためその形状および荷重状態を Fig. 2-12 と同一とすれば、基本連立方程式は次式のごとくなる。

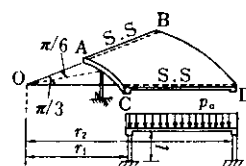


Fig. 2-16

Table 2-9 Reactions, deflections and bending moments for various types of elastic supports

Structural types of elastic support			Numerical ex. (b)		Numerical ex. (c)	$\frac{(3)-(1)}{(1)} \times 100$ %
			(1) Two span circular continuous beam without torsional rigidity	(2) Two span circular continuous beam with torsional rigidity	(3) T type rigid frame with circular beam member	
Reaction	R_1^A	$p_0 r_2^2$	.0925	.1011	.1085	17.3
	R_1^B	$p_0 r_2^2$	.1359	.1356	.1580	16.3
Midpoint of the plate	w	$p_0 r_2^2 / D$	.0010083	.0009841	.0006929	-31.3
	M_r	$p_0 r_2^2$	.02342	.02270	.01913	-18.3
	M_θ	$p_0 r_2^2$	.02131	.02067	.01422	-33.3
Point on the intermediate support	M_θ	$p_0 r_2^2$	-.03884	-.04243	-.08937	130.1
		$p_0 r_2^2$	-.06268	-.06718	-.08710	34.0

$$\begin{pmatrix} 0.0045169 & 0.0036244 & 0.013902 & -0.0042852 \\ -0.13904 & 0.034614 & (-0.74593+0.07461) & -0.049405 \\ 0.0036244 & 0.083752 & -0.034614 & -0.21544 \\ 0.0042852 & 0.21544 & -0.049405 & (-1.27633+0.07461) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} R_1^A \\ R_1^B \\ M_{r1}^A / r_2 \\ M_{r1}^B / r_2 \end{pmatrix} = p_0 r_2^2 \begin{pmatrix} 0.00094800 \\ 0.0070114 \\ 0.011724 \\ 0.023149 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(2.29)$$

式(2.29)より次の結果がえられる。

$$\left. \begin{aligned} R_1^A &= 0.1085 p_0 r_2^2, & R_1^B &= 0.1580 p_0 r_2^2 \\ M_{r1}^A &= -0.005257 p_0 r_2^2, & M_{r1}^B &= 0.009659 p_0 r_2^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(2.30)$$

式(2.30)の諸値を前例(b)の式(2.28)のそれと比較すれば、 R_1^A は前例に対し約7.3%、 R_1^B は約16.5%それぞれ増大しており、ここにおいても弾性支持部材の剛性が高まれば、それだけ全荷重の分担が直線辺より円弧辺側に移動することが判明する。式(2.30)の諸値を用いれば、前2例と同様たわみおよび曲げモーメントが算定されるが、これらについて演算のうえ、代表点について前例(b)と比較対照すれば、Table 2.9のごとくである。

2.3 円弧辺がはり部材により弾性支持される 等方性扇形板の影響面解法

2.3.1 たわみ曲面

前節で述べた扇形板・複合構造では、載荷される横荷重に対して接線方向(θ 方向)のフーリエ級数展開は可能であるが、半径方向(r 方向)の展開は不可能である。このため、半径方向に一樣な連続荷重以外は取り扱うことができず、垂直荷重として半径方向に不連続な荷重(特に集中荷重)を受ける場合には、ほかの解析手法を用いなければならない。本節では不連続荷重のうち特に集中荷重が作用する場合を対象として述べるとともに、その応用問題である影響面解法を提示し、種々の移動荷重が問題となる土木構造の能率的な設計計算のデータを提供することを目的とする。

一般に平板に集中荷重が作用する場合には、その載荷点を含む直線あるいは曲線により平板を分割し、切断面における変位、応力の連続条件をたて両者を結合する方法がしばしば用いられるが、本節でもかかる手法を用いることにする。

Fig. 2.17 に示すごとく、前節で取り扱ったと同様、連続円形曲りばりあるいはラーメンのはり

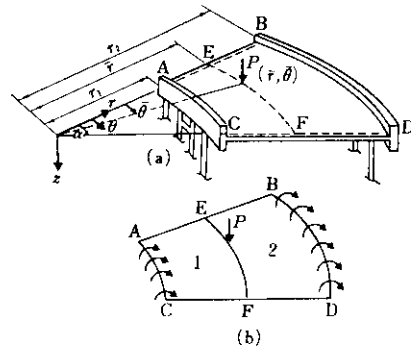


Fig. 2.17 Circular ring sector plate-frame structure with a concerned load

部材で弾性支持され、直線辺AB, CDで単純支持される扇形板ABDCに集中荷重 P が点($\bar{r}$, $\bar{\theta}$)に作用しているものとする。しかるとき、図(b)のごとく集中荷重作用点を含む円弧EFにて2つの扇形板AEFCおよびEBDFに分割し、それぞれ扇形板1、扇形板2と称することとする。扇形板1、2の z 軸方向のたわみ w_1 および w_2 は両者に垂直荷重が載荷されていないことに留意し、式(2.13)を参照すれば、次式で与えられる。

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{n1} r^{\alpha n} + B_{n1} r^{-\alpha n} + C_{n1} r^{\alpha n+2} + D_{n1} r^{-\alpha n+2}) \sin \alpha_n \theta \quad (\text{ただし, } r_1 \leq r \leq \bar{r}) \quad \dots\dots(2.31)$$

$$w_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{n2} r^{\alpha n} + B_{n2} r^{-\alpha n} + C_{n2} r^{\alpha n+2} + D_{n2} r^{-\alpha n+2}) \sin \alpha_n \theta$$

$$(ただし, \bar{r} \leq r \leq r_2) \dots\dots(2.32)$$

ここに, A_{n1} , B_{n1} , C_{n1} および D_{n1} は板 1 の境界 AC, EF の条件により決定される積分定数であり, A_{n2} , B_{n2} , C_{n2} および D_{n2} は板 2 の境界 EF, BD の条件により決定される積分定数である。境界 AC, BD における境界条件は前節で述べたと全く同様であり, 辺 AC における端モーメントを $M_r^A(\theta)$, はり部材のたわみ曲線 $\delta_A(\theta)$, 辺 BD におけるそれらを $M_r^B(\theta)$, $\delta_B(\theta)$ とすれば, 次のように表わしうる。

$$(w_1)_{r=r_1} = \delta_A(\theta) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{An} \sin \alpha_n \theta \right) \dots\dots(2.33a)$$

$$(M_{r1})_{r=r_1} = M_r^A(\theta) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} M_{rn}^A \sin \alpha_n \theta \right) \dots\dots(2.33b)$$

$$(w_2)_{r=r_2} = \delta_B(\theta) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} \sin \alpha_n \theta \right) \dots\dots(2.33c)$$

$$-(M_{r2})_{r=r_2} = M_r^B(\theta) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} M_{rn}^B \sin \alpha_n \theta \right) \dots\dots(2.33d)$$

また, $r = \bar{r}$ なる分割円弧上において板 1 と板 2 の変位, 変形および応力の連続条件として次の 4 式が成立する。

(i) $r = \bar{r}$ なる分割円弧上において板 1 と板 2 のたわみは相等しい。

$$(w_1)_{r=\bar{r}} = (w_2)_{r=\bar{r}} \dots\dots(2.34)$$

(ii) $r = \bar{r}$ なる分割円弧上において板 1 と板 2 の半径方向たわみ角は相等しい。

$$(\partial w_1 / \partial r)_{r=\bar{r}} = (\partial w_2 / \partial r)_{r=\bar{r}} \dots\dots(2.35)$$

(iii) $r = \bar{r}$ なる分割円弧上において板 1 と板 2 の半径方向曲げモーメントは相等しい。

$$(M_{r1})_{r=\bar{r}} = (M_{r2})_{r=\bar{r}} \dots\dots(2.36)$$

(iv) $r = \bar{r}$ なる分割円弧上において板 1 と板 2 のせん断力の差は当該円弧上に作用する垂直荷重 P に等しい。

$$(V_{r1})_{r=\bar{r}} = -(V_{r2})_{r=\bar{r}}$$

$$= P \left(= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \alpha_n \theta \right) \dots\dots(2.37)$$

ここに,

$$p_n = 2P / \alpha \bar{r} \sin \alpha_n \theta$$

上記の境界条件式 (2.33a ~ d) および分割円弧上の連続条件式 (2.34 ~ 2.37) の 8 式に板 1 および板 2 のたわみ曲面式 (2.31), (2.32) を代入のうへ, 積分定数に関して連立に解けば, 各積分定数は任意定数 M_{rn}^A , M_{rn}^B , δ_{An} , δ_{Bn} および p_n の関数として求められ, その結果を再び式 (2.31), (2.32) に用いれば, たわみ曲面式は式 (2.15) と全く同様の型式で求められる。

しかも, 本節の扇形板は前節のそれと荷重が異なるのみで構造は同一であることを考え合せると以下の理論, すなわち扇形板の円弧辺に作用する端モーメントのフーリエ展開係数 M_{rn}^A , M_{rn}^B および円弧辺直下のはり部材のたわみ曲線のフーリエ展開係数 δ_{An} , δ_{Bn} をはり部材の中間不静定量の一次結合式であらわすこと, ならびにこれらの不静定量を算定するための基本連立方程式を誘導することは, 内容が異なるだけで同様の操作でなされる。したがって, 本節では式の詳細な誘導は紙面の都合上割愛する(細部は文献(5)参照)。

2.3.2 影響面

前項の操作により, 中間不静定量を求めるための基本連立方程式が誘導されるが, これらは式 (2.21) と同様, 右辺の荷重項の移動集中荷重が任意座標 $(\bar{r}, \bar{\theta})$ を含むゆえ, 基本連立方程式を解けば, その未知数である中間不静定量は $\bar{r}$, $\bar{\theta}$ の関数として求まる。したがって, これらはとりもなおさず中間不静定量の影響面を与えることとなる。さらに, 本節の複合構造のたわみ曲面式は, 式 (2.20) のごとく与えられるゆえ, これらに中間不静定量を代入すれば, これがたわみの影響面であり, たわみ影響面を適宜 r および θ で偏微分することにより板の諸変位, 諸断面力の影響面もまた求められることとなる。

2.3.3 計算例

Fig. 2-18 に示すごとく, 開角 $\alpha = \pi / 3$, 辺長

比1.0, ポアソン比 $\nu=0.3$ なる扇形板が, 辺ACおよびBDで $\kappa_A=15,634$, $\kappa_B=50$, $\rho_A=\rho_B=0.64875$ なる3スパンの連続円形曲りばりにて弾性支持されているものとする。いま, 単位集中

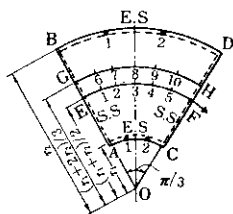
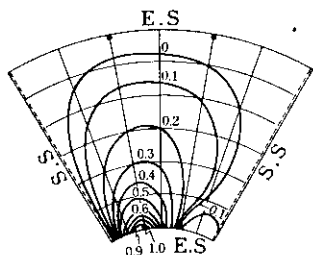
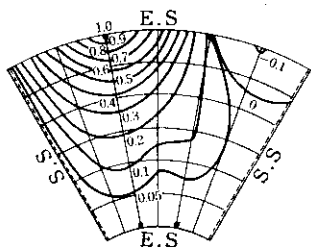
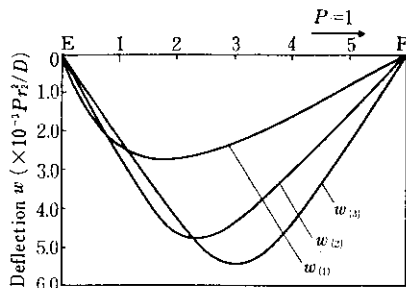
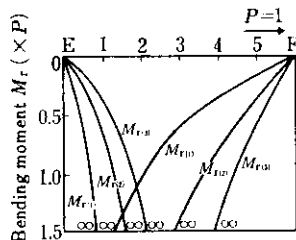
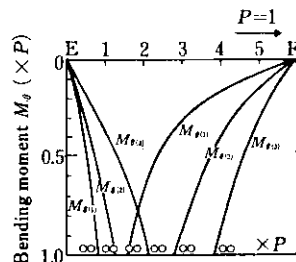
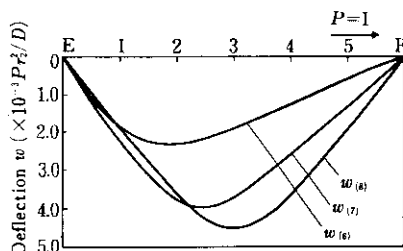
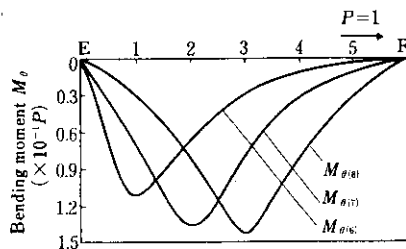


Fig. 2-18

Fig. 2-19 Influence surface of reaction R_1^A in the inner edgeFig. 2-20 Influence surface of reaction R_1^B in the outer edgeFig. 2-21 Influence surface of deflection w at the point 1, 2, 3

荷重 $P=1$ が中央円弧EFに沿って矢印の方向に移動する場合, 中間支点の反力影響面および中央円弧EFの6等分点1~5ならびに $r=(r_1+2r_2)/3$ なる円弧GHの6等分点6~10に関するたわみおよび曲げモーメントの影響面を図示すれば, それぞれFig. 2-19~2-26のごとくである。

Fig. 2-22 Influence surface of bending moment M_r at the point 1, 2, 3Fig. 2-23 Influence surface of bending moment M_θ at the point 1, 2, 3Fig. 2-24 Influence surface of deflection w at the point 6, 7, 8Fig. 2-25 Influence surface of bending moment M_r at the point 6, 7, 8

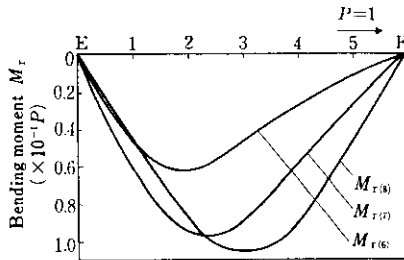


Fig. 2-26 Influence surface of bending moment M_r at the point 6, 7, 8

3. 結 語

本研究は骨組構造の解法に用いられる余力法を平板構造に応用した“板構造における不静定余力法”を用いて今日まで未解析のまま放置されている扇形板・骨組複合構造の厳密実用解法を提案したものであるが、改めて本法の特色を列挙すれば次のごとくである。

- (1) 本法によれば、複合構造のたわみおよび諸変位、諸断面力はすべて板に作用する外荷重と不静定量の一次結合式として表現されるが、このうち外荷重に由来する項は本複合構造の基本構の解を与え、不静定量に関する項は基本構の円弧辺に集中荷重およびモーメント荷重が作用する場合の解を与えている。
- (2) 本法は本複合構造の円弧辺におけるはり部材が全く任意に配列された支点あるいは支柱を有する場合に適用可能で、既往研究に勝るとも劣らない一般性を有している。
- (3) 本題の複合構造における不静定量は式(2-21)の多元連立方程式を解くだけの簡単な操作により求められる。
- (4) 式(2-21)に含まれる形状定数および荷重項は、本複合構造の基本構の円弧辺に集中荷重および曲げモーメント荷重が作用する場合のたわみおよびたわみ角に帰着され、これらを種々の板形状および剛性のパラメータについてあらかじめ計算のうえ、図表化しておけば、本複合構造の計算は連続ばりやラーメンなどの骨組と同様の労力により机上にて簡単に行なうことができる。
- (5) 式(2-21)の基本連立方程式の右辺第2項

には円弧辺を弾性支持するはり部材の中間支点(支柱)の垂直変位の項が含まれているゆえ、本複合構造ではこれらの不等沈下の問題も解析可能である。

- (6) はり部材の剛性パラメータ κ , ρ に関して、零あるいは無限大の極限計算を行なえば、円弧辺の境界条件が自由、単純支持、固定の場合も解析可能となり、逐一境界条件に応ずる解を求めるわずらわしさがなくなる。

つづいて、本題の扇形板・骨組複合構造の力学性状および設計上の留意事項について、解析結果より考察のうえ、列記すれば次のごとくである。

- (1) 円弧辺が単スパンの円形曲りばりで弾性支持される場合、はり部材の剛性パラメータ κ_B が 20~1 の範囲では、たわみおよび曲げモーメントは大きく変化し、特に半径方向曲げモーメント値に関して板中央点より内側半分において値が負より正に移り変る。また κ_B が 1 に近い場合ははり部材のねじり抵抗を考慮しない場合でも内側円弧辺上に負の M_θ を生ずる。
- (2) はり部材のねじれ抵抗を考慮の場合と無視の場合とではたわみおよび曲げモーメントに大きな差異を生じ、同一断面はり部材を用いた場合外側より内側円弧辺の方に大きな負の M_r を生ずる。
- (3) 同一開角の扇形板においては、円弧辺の骨組構造が剛になればなるほどこの骨組の荷重分担率が増大する。
- (4) 円弧辺の弾性支持骨組構造がラーメンである場合、その中間支柱の頭部に生ずる接線を回転軸とする反力モーメントは板内のたわみおよび曲げモーメントに多大の影響をおよぼす。
- (5) 円弧辺が連続ばりやラーメンのはり部材で弾性支持される場合には、その支点(支柱)上で大きな負の M_θ を生ずるゆえ、当該支点(支柱)の近傍でははり部材にハンチを設ける必要がある。

参 考 文 献

- 1) 芳村：曲線直交異方性扇形板の曲げについて，土木学会論文集，第82号，昭和37年
- 2) 芳村：Green 関数の扇形平板の曲げへの応用について，昭和44年度土木学会北海道支部研究発表会論文集
- 3) 山崎，樺木，金子：連続円形曲りばりにて弾性支持される扇形板の解法，九州大学工学集報，41，昭和43年12月，6
- 4) T.Yamasaki & T.Kaneko：“Analysis of Curvilinear Orthotropic Circular Ring Sector Plates with Two Opposite Circular Edges Stiffened with Frames” Proceedings of the 20th Japan National Congress for Applied Mechanics, (1970)
- 5) 山崎，金子：円形曲りばりで弾性支持される扇形板の影響面解法，土木学会第27回年次学術講演会講演概要集，昭和47年10月

