ながれ 27（2008）339 − 346

〔連載〕極超音速流の世界への誘い
(Invitation to the World of Hypersonic Flow)

第 4 章　極超音速流をとく

*帝京大学　理工学部　　　久保田　弘　敏†

宇宙輸送系の構築にとって極超音速流の理解は最も重要なキーテクノロジーのひとつである．宇宙輸送系が遭遇する極超音速流の本質を把握することは，宇宙輸送系実現の成否を左右するといえよう．前回までに極超音速の性質，作り方，および測定法を述べたので，今回は極超音速流をとく（解く：解析する）手法について述べることとする．

Chapter 4: How to analyze a Hypersonic Flow

Hirotoshi KUBOTA, Faculty of Science and Technology, Teikyo University

(**KEY WORDS**): Hypersonic flow, High-enthalpy flow, Computational fluid dynamics, Navier-Stokes equations

1　はじめに

宇宙飛行体が遭遇する極超音速環境の特性を把握するためには解析，実験（地上試験，飛行試験），数値シミュレーションが必要であることは既に述べた．これらの統合によって理論が確立されてゆく．解析と実験は相互補完的な意味合いを持つが，特に実験することが容易ではない高いマッハ数の流れも，然るべき近似やモデルを導入した解析によって把握することができるという利点がある．

図 1 は，縦軸に高度，横軸に速度（マッハ数）をとって宇宙往還機の飛行経路を描いたものである．飛行経路に沿っての特性を知るためには，マッハ数が 10 程度までは風洞実験データが豊富にあるが，マッハ数 10〜15 では風洞実験データが少なくなってくるので，数値解析と併用することになる．マッハ数 15 以上では風洞実験データは非常に少なくなるので，数値解析に頼らざるを得ない．したがって，数値解析によって流れを把握し得る数値流体力学（Computational Fluid Dynamics: CFD）の役割は非常に大きくなる．しかし，熱特性をも含む複雑な極超音速流に対して信頼性のある数値解析が行えるためには，図中にも示されているように，レイノルズ数，マッハ数，比熱比，実在気体，非平衡化学過程，粘性干渉等の効果を考慮しなければならない．

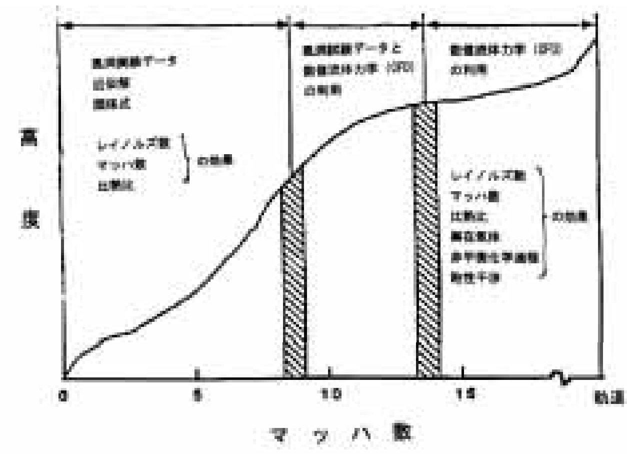

図 1　風洞実験データと数値解析データの使用領域

この点に留意しながら，本号では文献 1 に沿って，解析と数値シミュレーションについて述べることとする．

2　極超音速流の基礎方程式

極超音速で飛行する物体まわりの流れを解析するには，まず流れ場の適切なモデル化と支配方程式の構築が必要である．**表 1** は高速流の取り扱いの階層を示し，飛行体形状，方程式系，層流/乱流，化学反応，熱平衡性，輻射等について，簡単なモデルから複雑なものへの順序を左から右へ記述したものである．

*〒320-8551　栃木県宇都宮市豊郷台 1-1
† E-mail: kubota@koala.mse.teikyo-u.ac.jp

表 1　高速流計算のカテゴリー[2)]

パラメータ	数値計算の困難さ ——→
形　状	よどみ点→1次元→2次元／軸対称→3次元（前面，全機）
方程式系	非粘性方程式＋境界層方程式→PNS（放物化ナビエ・ストークス）→完全ナビエ・ストークス→ボルツマン方程式
層流－乱流	層流→レイノルズ平均→LES→直接シミュレーション
化学反応	完全気体→化学平衡→化学非平衡
熱平衡性	1温度→2温度→多温度
輻　射	なし→バンドモデル→線モデル

方程式系でいえば，粘性と熱伝導性のあるナビエ・ストークス程式（Navier-Stokes equations）が基本となり，その非粘性形であるオイラー方程式（Euler equations），あるいは特別な近似を設けた境界層方程式（boundary layer equations），放物型ナビエ･ストークス方程式（PNS : parabolized Navier-Stokes equations）および粘性衝撃層方程式（VSL : viscous shock layer equations）等の派生型方程式が生じる．

そこで，まず基本となる圧縮性ナビエ・ストークス方程式を記述することとする．

2.1　圧縮性ナビエ･ストークス方程式

ここでは, 粘性と熱伝導性を有する質量, 運動量, エネルギーの保存の式を総称してナビエ･ストークス方程式と呼ぶこととする．流体中に単位体積 υ をとり，その表面積を Σ とし，そこを出入りするフラックスを $\vec{J}$ とし，表面 $d\Sigma$ に垂直な外向きの単位ベクトルを $\vec{n}$ とする（**図 2**）．

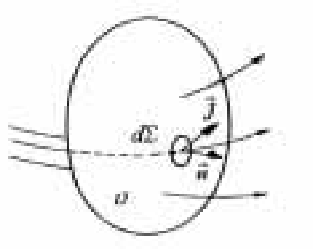

図 2　単位体積へのフラックスの出入り

2.1.1　質量保存の式（連続の式）

流体中にとった単位体積中の質量変化は流入質量と流出質量の差に等しいから，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\upsilon}\rho d\upsilon + \int_{\Sigma}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}d\Sigma = 0 \tag{1}$$

ここで，$t, \rho, \vec{V}$ は，ぞれぞれ，時間，密度，速度，である．

ベクトル $\vec{A}$ に対するガウス（Gauss）の定理

$$\int_{\Sigma}\vec{n}\cdot\vec{A}d\Sigma = \int_{\upsilon}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}d\upsilon \tag{2}$$

を用いると，式（1）は演算子 $\vec{\nabla}$ によって次の保存形（conservative 形，divergence 形）で書ける．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\right) = 0 \tag{3}$$

2.1.2　運動量保存の式（運動の式）

流体中にとった単位体積中の運動量変化は，

（単位時間の運動量変化の割合）＝（外力による運動量の変化）＋（応力による運動量変化）－（対流によって持ち去られる運動量）で表されるから，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\upsilon}\rho\vec{V}d\upsilon + \int_{\Sigma}\left[(\vec{n}\cdot\vec{V})\rho V - \vec{n}\cdot\vec{\Pi}\right]d\Sigma = \int_{\upsilon}\vec{f}_e d\upsilon \tag{4}$$

ここで，$\vec{f}_e, \vec{\Pi}$ は，ぞれぞれ，外力および応力テンソルであり，応力テンソルは次のように表される．

$$\vec{\Pi} = -p\vec{I} + \vec{\tau} \tag{5}$$

$p, \vec{I}, \vec{\tau}$ は圧力，主軸方向の単位ベクトル，および粘性応力である．粘性応力 $\vec{\tau}$ は

$$\vec{\tau} = \lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)\vec{I} + 2\mu(def\vec{V}) \tag{6}$$

と書ける．ただし，$def\vec{V}$ は粘性によるせん断ひずみであり, μ は粘性係数（せん断ひずみを生じる割合), λ は第二粘性係数（体積膨張を生じる割合＝$-\frac{2}{3}\mu$）である．

ガウスの定理を用いて書き直すと，式 (4) は次のような保存形で書ける．

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\vec{V} - \vec{\Pi}\right) = \vec{f}_e \tag{7}$$

なお，オイラー微分（流れ微分）

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla} \tag{8}$$

を用いると，式(7)より非保存系（non-conservative, convective）の方程式が導かれるが，ここでは省略する．

2.1.3　エネルギー方程式

流体中にとった単位体積中のエネルギー移動の関係は，

（単位時間における流体のエネルギー変化の割合）＝（単位時間に外から加えられた熱量）＋（外力によるエネルギーの増加）＋（応力によって外部からされた仕事エネルギー）－（対流によって持ち去られるエネルギー）－（熱伝導によって出て行くエネルギー）

と書けるので，これを式で表すと

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\upsilon}\rho E d\upsilon+\int_{\Sigma}\vec{n}\cdot\left(\rho E\vec{V}-\vec{\Pi}\vec{V}+\vec{\dot{q}}\right)d\Sigma=\int_{\upsilon}\frac{\partial Q}{\partial t}d\upsilon+\int_{\upsilon}\vec{f}_e\cdot\vec{V}d\upsilon \tag{9}$$

となる．ここで，$E, e, \vec{\dot{q}}$ は，それぞれ，単位質量あたりの全エネルギー，単位質量あたりの内部エネルギー，および熱流束で

$$E=e+\tfrac{1}{2}V^2 \tag{10}$$

であり，$\partial Q/\partial t$ は単位時間，単位体積あたりに外から加えられる熱量である．

エネルギー保存の式(9)は，質量保存式，運動量保存式と同様に，ガウスの定理を用いると，次のような保存形で書ける．

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho E\vec{V}-\vec{\Pi}\vec{V}+\vec{\dot{q}}\right)=\vec{f}_e\cdot\vec{V} \tag{11}$$

ただし，$\partial Q/\partial t$ の項は省略してある．非保存系表示も省略する．

以上の基礎方程式を連立して解けば，速度分布，空気力，温度，熱流束等が得られる．なお，マッハ数が大きくなるとニュートン流近似によって簡単に空気力が計算できるが，ここでは省略する．

2.1.4 三次元デカルト座標系での圧縮性ナビエ・ストークス方程式の一般形

以上の 3 つの基礎方程式を三次元デカルト座標 (x, y, z) で書けば，質量保存 1，運動量保存 3，エネルギー保存 1 の 5 つの式となる．これらは全て保存形であるので，それらをまとめて書くと，次のようになる．（ただし，外力 $\vec{f}_e$ と熱量 $\partial Q/\partial t$ は省略），

$$\frac{\partial\vec{Q}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}+\frac{\partial\vec{G}}{\partial z}=0 \tag{12}$$

ここで，$\vec{Q}$ は保存量ベクトル，$\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$ は流束ベクトルで，

$$\vec{Q}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho\upsilon\\ \rho w\\ E_t\end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\vec{E}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p-\tau_{xx}\\ \rho u\upsilon-\tau_{xy}\\ \rho uw-\tau_{xz}\\ (E_t+p)u-u\tau_{xx}-\upsilon\tau_{xy}-w\tau_{xz}+\dot{q}_x\end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}\rho\upsilon\\ \rho u\upsilon-\tau_{xy}\\ \rho\upsilon^2+p-\tau_{yy}\\ \rho uw-\tau_{yz}\\ (E_t+p)\upsilon-u\tau_{xy}-\upsilon\tau_{yy}-w\tau_{yz}+\dot{q}_y\end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\vec{G}=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho u\upsilon-\tau_{xz}\\ \rho uw-\tau_{yz}\\ \rho w^2+p-\tau_{zz}\\ (E_t+p)w-u\tau_{xz}-\upsilon\tau_{yz}-w\tau_{zz}+\dot{q}_z\end{pmatrix} \tag{16}$$

ここで，(u, υ, w) は速度成分であり，

$$\begin{aligned}
\tau_{xx}&=\tfrac{2}{3}\mu\left[2\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\\
\tau_{yy}&=\tfrac{2}{3}\mu\left[2\frac{\partial\upsilon}{\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\\
\tau_{zz}&=\tfrac{2}{3}\mu\left[2\frac{\partial w}{\partial z}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\right)\right]\\
\tau_{yx}&=\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right),\tau_{zy}=\tau_{yz}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon}{\partial z}\right),\\
\tau_{xz}&=\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
\dot{q}_x&=-\kappa\frac{\partial T}{\partial x},\dot{q}_y=-\kappa\frac{\partial T}{\partial y},\dot{q}_z=-\kappa\frac{\partial T}{\partial z}
\end{aligned} \tag{17}$$

で，T は温度，E_t は単位体積あたりの全エネルギーで，$E_t=\rho E=\rho e+\frac{1}{2}\left(u^2+\upsilon^2+w^2\right)$ である．

2.1.5 実在気体の基礎方程式

極超音速の飛行体まわりの流れ場では，温度，エンタルピーが高くなり，化学反応などの実在気体効果（real gas effect）を無視することができない．このような流れ場では気体モデルは非常に複雑になり，数値解析が重要なツールとなる．

化学反応によって生じた i 種の成分物質を含む混合気体では，単位体積内の i 種成分物質の生成率を $\dot{w}_i$ としたとき，i 種物質に対する質量保存の式は

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho_i\vec{V}_i\right)=\dot{w}_i \tag{18}$$

である．したがって，N 個の化学種の化学反応を含む保存形ナビエ・ストークス方程式を，式（12）と同様のベクトル形式にまとめると

$$\frac{\partial\vec{Q}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}+\frac{\partial\vec{G}}{\partial z}=\vec{S} \tag{19}$$

となり，

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \upsilon \\ \rho w \\ E_t \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \rho_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho u \upsilon - \tau_{xy} \\ \rho u w - \tau_{xz} \\ (E_t + p)u - u\tau_{xx} - \upsilon\tau_{xy} - w\tau_{xz} + \dot{q}_x \\ \rho_1 u \\ \rho_2 u \\ \bullet \\ \bullet \\ \rho_{\mathrm{N}} u \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \rho \upsilon \\ \rho u \upsilon - \tau_{xy} \\ \rho \upsilon^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho u w - \tau_{yz} \\ (E_t + p)v - u\tau_{xy} - \upsilon\tau_{yy} - w\tau_{yz} + \dot{q}_y \\ \rho_1 \upsilon \\ \rho_2 \upsilon \\ \bullet \\ \bullet \\ \rho_{\mathrm{N}} \upsilon \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u \upsilon - \tau_{xz} \\ \rho u w - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ (E_t + p)w - u\tau_{xz} - \upsilon\tau_{yz} - w\tau_{zz} + \dot{q}_z \\ \rho_1 w \\ \rho_2 w \\ \bullet \\ \bullet \\ \rho_{\mathrm{N}} w \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \mathrm{S}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \tag{24}$$

と書ける．すなわち，化学反応の効果は，右辺に生成項（source term）$\vec{S}$ が付加され，同時に N 種成分の質量の増減を考慮することになる．生成項の成分は，i 種成分物質の拡散速度を d_i としたとき，

$$S_i = \dot{w}_i - \left(\frac{\partial \rho_i d_{i_x}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_i d_{i_y}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_i d_{i_z}}{\partial z} \right) \tag{25}$$

せん断応力については，式（17）と変わらないが，熱伝達については，i 種成分物質の拡散の効果を考慮し，

$$\begin{aligned} \dot{q}_x &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} + \sum_{i=1}^{N} \rho_i d_{i\,x} h_i, \\ \dot{q}_y &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_{i=1}^{N} \rho_i d_{i\,y} h_i, \\ \dot{q}_z &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} + \sum_{i=1}^{N} \rho_i d_{i\,z} h_i \end{aligned} \tag{26}$$

となる．ここで，h_i は i 種成分物質のエンタルピーである．

ナビエ･ストークス方程式を任意形状物体に適用するために，一般座標系で書いておく必要がある [4)]．

2.1.6　ナビエ･ストークス方程式の数値解法

（1）数値計算における作業の流れ

ナビエ･ストークス方程式は非線形の多元連立偏微分方程式であるので，解析的に解くことは難しい．したがって基礎方程式を離散化し，数値的に解く必要がある．**図 3** にこのときの作業の流れとデータのやり取りを示す．作業は，「計算用の格子を作る（格子形成 : grid generation）」，「流れの計算をする」，「計算結果を処理する」の 3 つのグループに分けられる．**図 4** は宇宙飛行体まわりの格子形成の例である．

（2）衝撃波の扱い

極超音速流は強い衝撃波とその背後の高温気体で特徴付けられる．したがって，その数値解法は衝撃波による密度や温度など各種物理量の不連続な変化

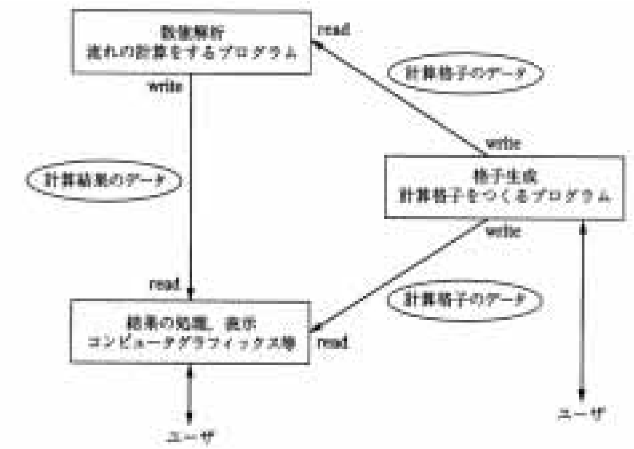

図 3　作業の流れとデータのやりとり [1)]

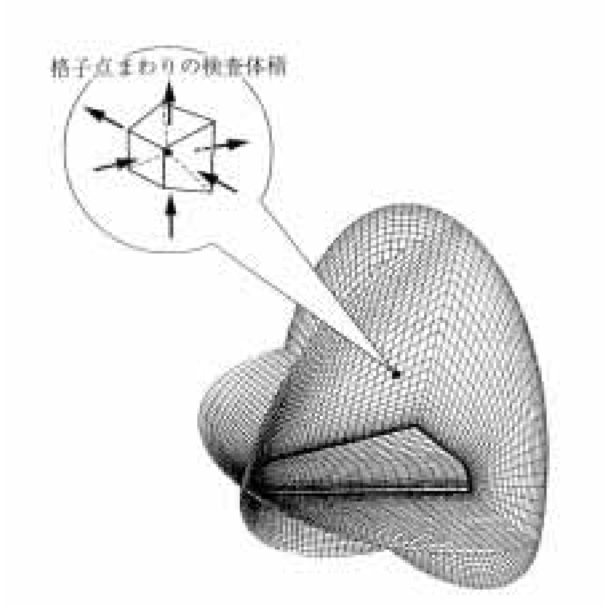

図 4　計算格子 [1)]

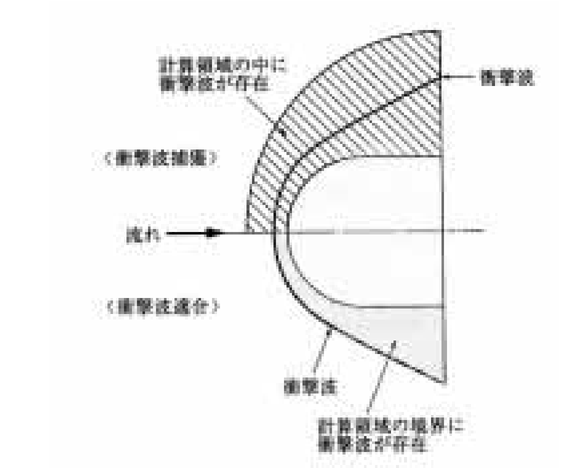

図 5　数値解析における衝撃波の扱い：衝撃波捕獲と衝撃波適合 [1)]

を扱えるものでなければならない．そのため，**図 5** に示すように，

① 衝撃波を計算領域の中に含め，衝撃波前後の物理量の「跳び」を格子点と格子点の間における物理量の急激な変化として数値的に解く衝撃波捕獲（shock capturing）法

② 何らかの方法で衝撃波形状を予測し，衝撃波と物体表面に挟まれた領域（衝撃層）を計算対象とする衝撃波適合（shock fitting）法

の二つの方法があるが，両者には長所短所があるので，必要に応じて使い分けるのが望ましい [1)]．

（3）圧縮性ナビエ･ストークス方程式の数値スキーム

圧縮性ナビエ・ストークス方程式の理論的説明や計算法の詳細については，文献 3 および 4 等に詳しい．二次元流を例にとると，衝撃波捕獲法を用いるため，解くべき方程式は保存系表示を用い，流束ベクトル $\vec{E},\vec{F}$ を粘性項（添え字 υ）および非粘性項に分けて書くと

$$\frac{\partial\vec{Q}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}=\frac{\partial\vec{E}_\upsilon}{\partial x}+\frac{\partial\vec{F}_\upsilon}{\partial y} \tag{27}$$

となる．これを**図 6** に示すような格子点を用いて，各境界面からの流束の出入りと検査体積内にある全保存量の変化を考えれば

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta x\Delta y\Delta\vec{Q}}{\Delta t}+\Delta y\left(\vec{E}_{i+\frac{1}{2}}-\vec{E}_{i-\frac{1}{2}}\right)+\Delta x\left(\vec{F}_{i+\frac{1}{2}}-\vec{F}_{i-\frac{1}{2}}\right)\\&=\Delta y\left(\vec{E}_{\upsilon,i+\frac{1}{2}}-\vec{E}_{\upsilon,i-\frac{1}{2}}\right)+\Delta x\left(\vec{F}_{\upsilon,i+\frac{1}{2}}-\vec{F}_{\upsilon,i-\frac{1}{2}}\right)\end{aligned} \tag{28}$$

のように離散化できる．したがって，各境界面における流束が求められれば，式（28）によって保存量 $\vec{Q}+\Delta\vec{Q}$ が計算できる．これを繰り返せば流れの時間変動がシミュレートできる．

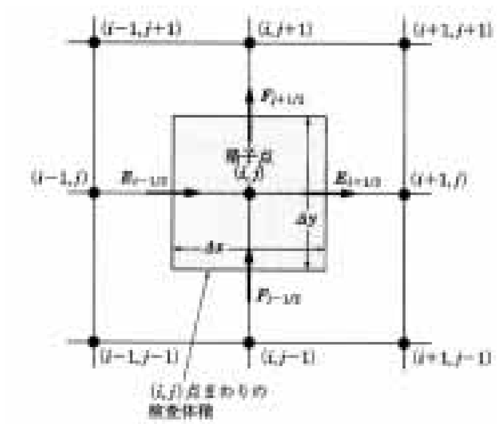

図 6　二次元計算のための格子点と検査体積 [1)]

圧縮性流体の数値シミュレーションにおけるスキームは，上流側からの情報を重視する「風上法（upwind method)」が便利であるが，同時に「単調性（monotonicity)」，「精度（accuracy)」をうまくバランスさせたものになっていなければならない．圧縮性流体解析によく用いられる対称型 TVD スキーム（symmetric total variation diminishing scheme）は，1 次精度の風上差分法と 2 次精度中心差分の Lax-Wendroff 法を必要に応じて切り替える制御測を見出すことで構築される [1]．

2.1.7 ナビエ･ストークス解の例

マッハ数 15.7，飛行高度 60.6km，迎え角 42 度で飛行するスペースシャトル（Space Shuttle）まわりに 86×69×66 個の格子をとり，完全気体を仮定した場合，および実在気体を仮定した場合（O_2, O, N_2, N, NO, NO^+, e^-の 7 種成分の化学反応を考慮し，壁面は等温，非触媒性とする）のナビエ・ストークス解を**図 7〜9** に示す [5]．**図 7** は表面流線（限界流線）で，機体背面での流れの剥離が可視化されている．

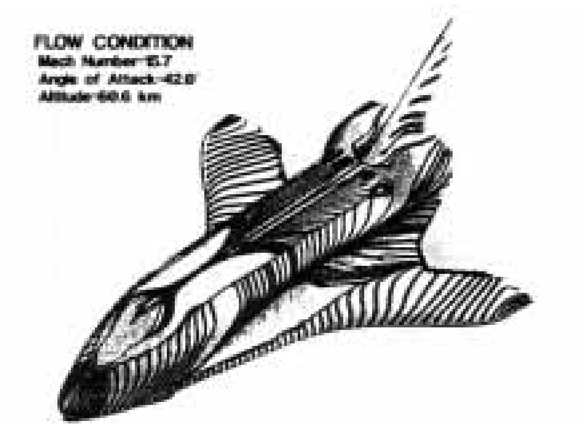

図 7 スペースシャトルの表面流線パターン [5]

図 8 は空間の三次元圧力分布を示し，実在気体効果によって衝撃波離脱距離は完全気体を仮定した場合より減少することがわかる．実在気体を仮定した場合には，化学反応によってエネルギーが吸収されるため，機体への熱流束は減少し，加熱量が少なくなる（**図 9**）．実在気体を仮定した解析結果は STS-2（スペースシャトル 2 号機）の飛行試験結果に一致するので，その仮定が正しいことがわかる．

図 10 はこの解析手法を将来型スペースプレーン（spaceplane）まわりの高度 35km，マッハ数 15，迎え角 4° の流れに適用し，解離酸素濃度を可視化したものである [6]．HOPE-X，HYFLEX，X-33 等の機体について，構造材料を含めて多分野統合解析も行われている [7]．

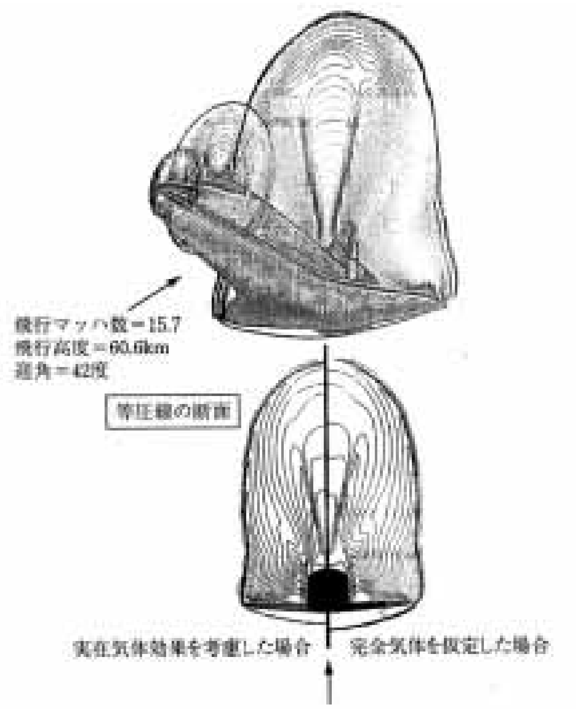

図 8 スペースシャトルまわりの化学反応流のナビエ･ストークス解 [5]

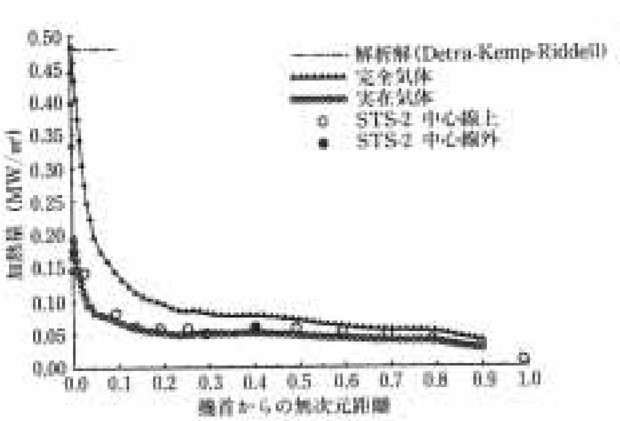

図 9 スパースシャトルの加熱量分布 [5]

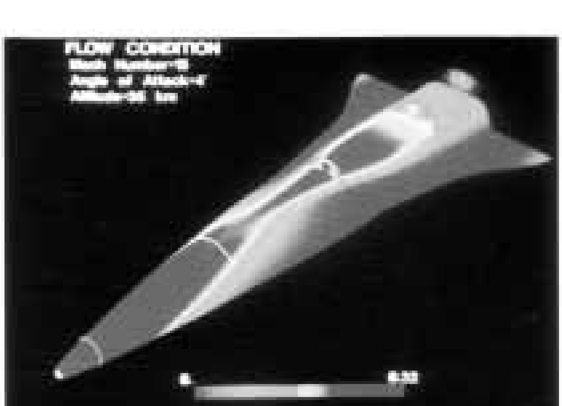

図 10 スペースプレーンまわりの酸素原子分布 [6]

2.2 圧縮性境界層解析

境界層方程式は物体近傍の薄い粘性層の近似を用いてナビエ･ストークス方程式から導かれ, 比較的簡単に表面摩擦や熱伝達を予測するのに使われる [8].

化学反応のある定常境界層では， x 方向の速度を u，i 種成分物質の質量分率を Y_i，全エンタルピーを H とし，境界層外端での量を添え字 e で表し，

$$f \equiv \frac{u}{u_e}, z_i \equiv \frac{Y_i}{(Y_i)_e}, g \equiv \frac{H}{H_e}, (\ )' \equiv \frac{d}{d\eta}$$

とおく（ξ,η は変換された座標）と，次の連立常微分方程式が得られる.

$$(Cf'')' + ff'' + \frac{2\xi}{u_e}\frac{du_e}{d\xi}\left[\frac{\rho_e}{\rho} - (f')^2\right] = 2\xi\left(f'\frac{\partial f'}{\partial \xi} - f''\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \tag{29}$$

$$\left(\frac{C}{Sc}z_i'\right)' + fz_i' - \frac{2\xi}{(Y_i)_e}\frac{d(Y_i)_e}{d\xi}f'z_i + \frac{2\xi}{\rho\rho_e u_e^2 \mu_e r^{2m}}\frac{\dot{w}_i}{(Y_i)_e} = 2\xi\left(f'\frac{\partial z_i}{\partial \xi} - z_i'\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)$$

(r は中心軸から測った物体表面までの距離) (30)

$$\left(\frac{C}{\Pr}g'\right)' + fg' - \frac{2\xi}{H_e}\frac{dH_e}{d\xi}f'g - \left[\frac{C}{Sc}\left(\frac{1}{Le}-1\right)\sum_{i=1}^{N}\frac{h_i(Y_i)_e}{H_e}z_i\right]' - \frac{u_e^2}{H_e}\left[\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)Cff''\right]' = 2\xi\left(f'\frac{\partial g}{\partial \xi} - g'\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \tag{31}$$

ここで，C, Pr, Sc, Le はチャプマン・ルベシン数，プラントル数，シュミット数，ルイス数で，$m=0$ は二次元流，$m=1$ は軸対称流を表す.

この連立常微分方程式を適当な境界条件のもとで解くことになるが，詳細は文献 1 に譲る.

2.3 粘性衝撃層解析

飛行体の速度が大きくなるにつれ，先頭衝撃波の離脱距離が減少する．このとき，衝撃波後方の流れの層は薄いので，もはや非粘性流と境界層を分けることはできず，全て粘性層と考えられる．これを粘性衝撃層（viscous shock layer）と呼ぶ．境界層方程式と同様に, ナビエ･ストークス方程式の各項の大きさを比較し，小さいものを省略することで簡略化することができる．粘性衝撃層方程式はその一つで，宇宙飛行体まわりの極超音速流によく用いられる [9].

粘性衝撃層方程式の解法は，衝撃波適合と空間進行法（space marching method）を特徴とし，境界層方程式と同様，元の非定常ナビエ・ストークス方程式の解法とは異なり，上流から下流へ向かって空間進行法で解くことができる.

先端よどみ点を原点として物体表面に沿ってとった座標を s，それに垂直外方にとった座標を n とすると，粘性衝撃層方程式は次のように書ける.

① 質量保存の式

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[(r + n\cos\theta)^m \rho u\right] + \frac{\partial}{\partial n}\left[(1+nk)(r + n\cos)^m \rho \upsilon\right] = 0 \tag{32}$$

② s-方向運動量の式

$$\rho\left(\frac{u}{1+uk}\frac{\partial u}{\partial s} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{u\upsilon k}{1+nk}\right) + \frac{1}{1+nk}\frac{\partial p}{\partial s} = \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial n}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{uk}{1+nk}\right)\right] + \varepsilon^2\mu\left(\frac{2k}{1+nk} + \frac{m\cos\theta}{r + n\cos\theta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{uk}{1+nk}\right) \tag{33}$$

③ n-方向運動量の式

$$\rho\left(\frac{u}{1+nk}\frac{\partial \upsilon}{\partial s} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial n} - \frac{u^2 k}{1+nk}\right) + \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \tag{34}$$

④ エネルギーの式

$$\rho C_p\left(\frac{u}{1+kn}\frac{\partial T}{\partial s} + \upsilon\frac{\partial T}{\partial n}\right) - \left(\frac{u}{1+kn}\frac{\partial p}{\partial s} + \upsilon\frac{\partial p}{\partial n}\right) = \varepsilon^2\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right) + \left(\frac{k}{1+kn} + \frac{m\cos\theta}{r + n\cos\theta}\right)\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right] + \varepsilon^2\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{ku}{1+kn}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}\rho Y_i d_i C_{p_i}\right)\frac{\partial T}{\partial n}\right] - \sum_{i=1}^{N}h_i\dot{w}_i \tag{35}$$

⑤ 化学種の式

$$\rho\left(\frac{u}{1+kn}\frac{\partial Y_i}{\partial s} + \upsilon\frac{\partial Y_i}{\partial s}\right) = \dot{w}_i - \frac{\varepsilon^2}{(1+kn)(r + n\cos\theta)^m}\frac{\partial\left[(1+kn)(r + n\cos\theta)^m \rho Y_i d_i\right]}{\partial n} \tag{36}$$

ここで，m，r の定義は境界層方程式と同じで， k は表面の曲率， ε は粘性干渉パラメータである.

図 11 は，マッハ数 15.4 の半球まわりの極超音速流について, ナビエ･ストークス解析と粘性衝撃層解析の結果を比較したものである．左は等圧力係数線図，右は等温度線図であり，両者とも一致は良好である [1]．化学反応流れに対しても，同様である [10].

粘性衝撃層解析の計算時間はナビエ・ストークス解析に比べて非常に短いので，単純な形状まわりの流れの解析には便利であるが，スペースシャトルのような複雑な形状物体に対してはほとんど不可能で, そのような場合には, やはりナビエ･ストークス解析に頼らざるを得ない.

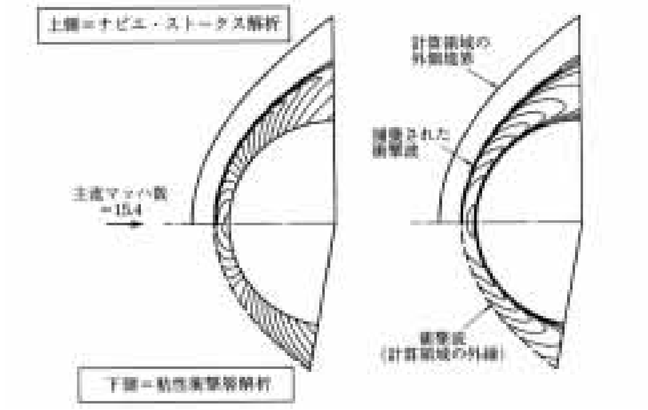

図 11　半球まわりの極超音速流に対するナビエ･ストークス解析と粘性衝撃層解析の比較（左：等圧力係数線図，等高線間隔 0.1，右：等温度線，等高線間隔 1000K）[1)]

2.4　乱流と輻射に関する取り扱い

乱流については，工学的には適当な乱流モデルを適用するのが通常の方法であるが，極超音速流や実在気体効果を含んだ高いエンタルピー流のための特別な乱流モデルはなく，亜音速や遷音速流れによく用いられる Baldwin-Lomax モデル [11)]等を用いる [1)].

輻射の解析については，JAXA（旧 ISAS）で開発された SPRADIAN[12)]等が有効である．

3　計算機環境の進歩

数値解析には大型のコンピュータを使う必要がある．**図 12** は日本とアメリカのスーパーコンピュータ開発の状況を示したものである．2002 年に使用開始された地球シミュレータはピーク性能が 40 テラ FLOPS ほどであったが，2010 年以降に完成が予定されている次世代スパコンは 10 ペタ FLOPS（京速）以上で著しい性能向上が見込まれ，計算機環境はさらに進歩する．このことは最終回に再度議論したい．

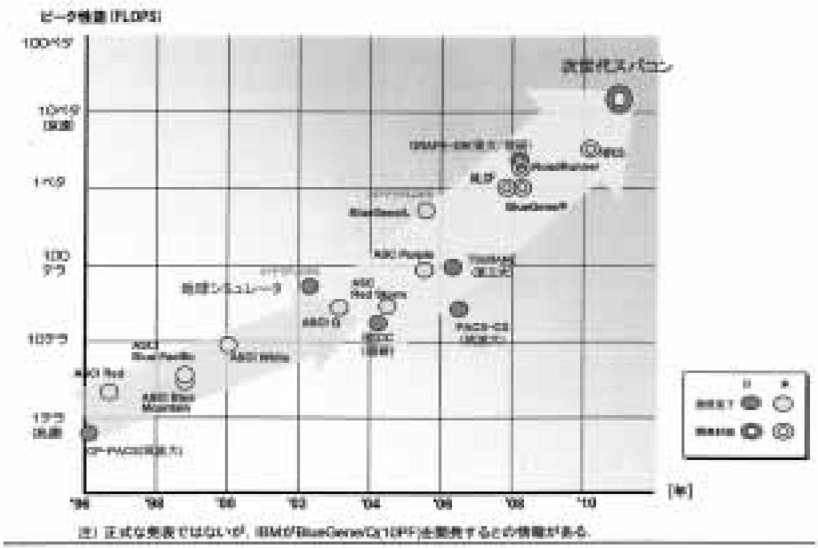

図 12　日米の主要なスーパーコンピュータ [13)]

引 用 文 献

1) 久保田弘敏，鈴木宏二郎，綿貫忠晴 : 宇宙飛行体の熱気体力学，東京大学出版会，2002.
2) Li, C. P. : Chemistry-split techniques for various reacting blunt body flow computations, AIAA Paper 87-0282, 1987.
3) 数値流体力学編集委員会編 : 圧縮性流体解析，数値流体力学シリーズ 2，東京大学出版会，1995.
4) 藤井孝蔵 : 流体力学の数値計算法，東京大学出版会，1994.
5) Wada, Y. and Kubota, H.: Numerical simulation of re-entry flow around the Space Shuttle with finite-rate chemistry. J. Aircraft, Vol. 29, No. 6, pp. 1049-1056, 1992.
6) 和田安弘，小川　哲，石黒登美子，久保田弘敏 : スペースプレーン飛行時の流れのシミュレーション，コンピュータ応用の最前線 1，コンピュータ科学，秀潤社，Vol.1, No.2, pp.119-123, 1991.
7) Yamamoto, Y. and Kurotaki, T.: CFD activity for future winged space transport system. JAXA SP-06-029E, 2007.
8) Schlichting, H : Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
9) Davis, R. T.: Numerical solution of the hypersonic viscous shock layer equations, AIAA Journal, Vol. 8, pp. 843-851, 1970.
10) Suzuki, K. and Abe, T.: Effect of wall conditions on chemically nonequlibrium shock-layer flow over hypersonic reentry bodies. JSASS Transaction, Vol. 36, No. 111, pp. 21-35, 1993.
11) Baldwin, B. S. and Lomax, H.: Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flow. AIAA-78-257, 1978.
12) Fujita, K. and Abe, T.: SPRADIAN, Structural package for radiation analysis: theory and application. ISAS Report No. 669, 1997.
13) 総合科学技術会議 : 最先端・高性能汎用スーパーコンピュータの開発利用について，2007.