

〔特別講演〕

温度場によって誘起される低圧気流の数値解析

*京都大学 工学研究科 青木 一生[†]

Numerical Analysis of Low-pressure Gas Flows Induced by Temperature Fields

Kazuo AOKI, Graduate School of Engineering, Kyoto University

1 はじめに

低圧気体や微小な系（マイクロスケール）における気体では、気体分子の平均自由行程が系の代表長に比べて無視できない。この場合、気体は局所的平衡状態からずれているため、それを前提とする通常の巨視的流体力学では気体の挙動を正しく記述することができず、気体分子の速度がどのように分布しているかといった集団的な微視的情報を取り入れたアプローチが必要となる。それが気体分子運動論であり、その立場に立つ流体力学を分子気体力学あるいは希薄気体力学、その対象となる低圧気体や微小系における気体を希薄気体と呼ぶ¹⁻³⁾。分子気体力学は、1960年代から1970年代にかけて、航空宇宙工学に結びついて急速な発展を遂げた。それ以降は様々な分野に浸透し、とくに現在では、マイクロ・ナノ流体力学の重要な一分野として盛んに研究されている。

分子気体力学の基礎方程式は、ボルツマン方程式と呼ばれる複雑な非線形微積分方程式で、従属変数（未知関数）は気体分子の速度分布関数である¹⁻³⁾。希薄気体の振舞を知るには、この方程式をしかるべき初期条件と境界条件のもとで解かなければならない。実際問題では、ほとんどの場合何らかの数値解析が必要である。本稿では、紙数の都合上、ボルツマン方程式およびそのモデル方程式の数値解析のごく一端について述べる。

希薄気体では、外力が働いていなくても、温度場によって定常な流れが誘起される¹⁻⁴⁾。熱ほふく流や熱遷移流はその代表的なものである。3.1と3.2では、この種の流れを取り上げる。

2 ボルツマン方程式・モデル方程式の数値解法

2.1 確率論的解法

ボルツマン方程式の数値解法として最も普及しているのは DSMC (Direct Simulation Monte Carlo) 法と呼ばれるもので、1963年に G. A. Bird によって提案され、その後 Bird 自身と他の大勢の研究者によって改良が加えられた⁵⁾。これは、現実の気体分子をはるかに少ない数の擬似粒子で代表させ、擬似粒子の無衝突運動と擬似粒子同士の衝突による速度変化を時間ステップごとに繰り返すもので、衝突過程を確率を用いて処理することから、粒子的・確率的方法である。これは、手順が簡単で（ボルツマン方程式の知識はほとんど必要ない）適応性が高く、数値的にも安定で優れた方法である。また、その数値解がボルツマン方程式の解に収束することも数学的に証明されている⁶⁾。

この方法の弱点は、用いる擬似粒子数が限られる実際の計算では、常に統計的ノイズを伴うことである。たとえば、マッハ数が 0.01 といった遅い流れでは、巨視的な流れの場がノイズに埋没するため、計算が非常に難しくなる。上に述べた温度場による流れは、遅い流れである場合が多い。この統計的ノイズを避け、流れの構造の詳細を捉えたい場合には、以下で述べる非確率的、すなわち決定論的解法が用いられる。なお、平衡状態からのずれの部分だけを粒子的・確率的に計算することによってノイズの影響を低減し、遅い流れを精度よく求める DSMC 的な方法も、最近提案されている⁷⁾。

2.2 決定論的解法：ボルツマン方程式

ボルツマン方程式の場合、通常の流体力学における独立変数（時間変数と空間変数）に加えて、気体分子の速度も独立変数であるため、その数値解析は複雑である。静止平衡状態からのずれが小さい系に対しては、ボルツマン方程式を線形化したもの（線形化ボルツマン方程

* 〒 606-8501 京都市左京区吉田本町

† E-mail: aoki.kazuo.7a@kyoto-u.ac.jp

式)が通常用いられる。今から20年余り前に、線形化ボルツマン方程式の有限差分法による精密な数値解析が初めて行われ、基礎的な平面境界問題(平面ポアズイユ流、温度の跳びや速度のすべりの問題)の詳細が解明された⁸⁻¹⁰⁾。この解析はその後、球形物体の外部流問題(球を過ぎる遅い一様流、熱泳動など)に拡張され、これらの問題に対する初めての精密な数値解が求められた^{11,12)}。また、本来の非線形ボルツマン方程式にも拡張され、衝撃波の構造などの1次元問題の精密な決定論的解析が初めて行われた^{13,14)}。

非線形ボルツマン方程式に対する他の数値解法にも言及しておく。ロシアにおいて実用的問題(空間的に2次元、3次元の問題)への応用を視野に入れた離散分子速度法が開発され、ある程度の普及を見た¹⁵⁾。これらは上述の精密な数値解法とは目的を異にし、少ない計算格子でいかに定性的にもっともらしい結果を得るかを目指したものである。しかし、この面では、全般的にDSMC法が勝っている。また、いくつかの応用数学者グループが、スペクトル法、高速フーリエ変換、不連続ガラキン法などを用いた様々な解法を提案しているが、まだ理論的考察の域を大きく出てはいない。

2.3 決定論的解法：モデル方程式

上述のように、ボルツマン方程式の決定論的解法は、その衝突積分項(非線形かつ5重積分を含む項で、気体分子同士の2体衝突の効果を表わす)のため、非常に厄介である。そのため、BGKモデルと呼ばれる衝突積分項の簡単なモデルがよく用いられる。これは、半世紀以上も前の1954年にBhatnagar, Gross, Krook¹⁶⁾の3人とWelande¹⁷⁾が独立に提案したものである(BGKは前3著者名の頭文字をとったもの)。

BGKモデル方程式の差分法などによる数値解析は、1960年代から現在にいたるまで、盛んに行われている。ボルツマン方程式に近い結果を与える場合も多く、ボルツマン方程式では不可能な流れの場の微細構造も記述可能であるため、簡単な割には優れたモデルである。過去の膨大な数の論文を紹介するのは不可能であるので、筆者の所属してきた研究グループの論文をいくつか引用するとどめる：(i)平面境界問題：文献18,19)、(ii)球状・円柱状物体の外部流：文献20,21)、(iii)特異境界問題：文献22,23)。このうち、(i)、(ii)の文献は、主として界面で蒸発・凝縮を伴う流れの基本的性質を解明したもので、(ii)、(iii)の文献は、気体分子の速度分布関数(ボルツマン方程式あるいはBGKモデルにおける未知関数)が気体領域中で不連続になることに注意し、不連続の伝播と減衰を正確に記述したものである。流れの場の正確な記述には、この不連続の記述が不可欠である

が、それを考慮した数値解法は他には見当たらない。

3 数値解析の例

本章では、三つの異なる立場からの数値解析の例を示す。3.1, 3.2は温度場によって誘起される流れの例であり、3.3は平衡状態への緩和という統計力学における基礎的問題の数値解析例である。

3.1 直接的数値解析：ラジオメータ流れ²⁴⁾

まず、BGKモデル方程式を有限差分法で直接数値解析した例を示す。図1に示すように、一様温度 T_0 に保たれた一辺 L の正方形2次元容器内に希薄気体が入っており、その中央部に幅 D で厚さが無視できる2次元平板が置かれている。座標軸は図のように取る。平板の各面はそれぞれ一様温度 T_w^+ 、 T_w^- に保たれている。このときに誘起される気体の定常な流れについて調べる。ただし、容器壁と平板面では、気体分子は慣用の拡散反射条件に従うとする(反射分子の速度は境界の温度と速度に基づく平衡分布に従って分布しており、さらに境界を横切る正味の質量流量はゼロであるという条件、文献1-3)参照)。

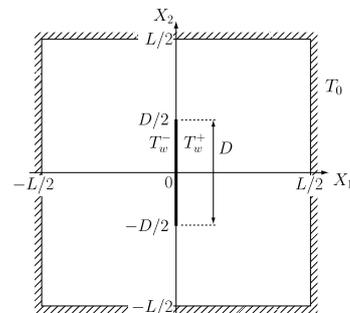


図1 正方形容器内の希薄気体中におかれた平板²⁴⁾

$L/D = 4$, $T_w^+/T_0 = 2$, $T_w^-/T_0 = 1$ のとき(平板の左面の温度が容器壁と同じで、右面が容器壁の2倍の温度に加熱されている)、平板の上部先端付近に生じる流れの様子をいくつかのクヌーセン数 $Kn = l/D$ に対して図2に示す。ここに l は、温度 T_0 、密度 $= \rho_{av}$ (平均密度)で静止平衡状態にある気体分子の平均自由行程で、図中の平板は上部先端から $D/10$ の部分である。図の(a)は $Kn = 5$ 、(b)は $Kn = 0.5$ 、(c)は $Kn = 0.05$ 、(d)は $Kn = 0.01$ に対する結果である。矢印は $X_1 X_2$ 平面での流速ベクトル (v_1, v_2) を $(2RT_0)^{1/2}$ (R は単位質量あたりの気体定数)で無次元化したもので、そのスケールは各図に示してある。平板上の流速が見やすいように、 $X_1 > 0$ と $X_1 < 0$ の領域を少し離して表示してある。クヌーセン数の減少とともに、流れの領域が先端付近に局在化していくことがわかる。巨視的物理量は、先端で

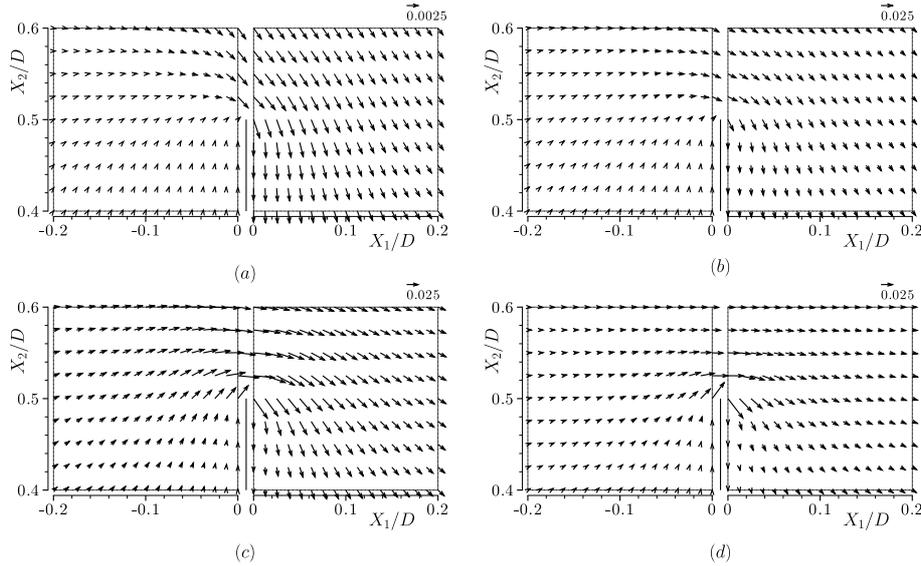


図2 平板先端付近の流れ ($L/D = 4, T_w^+/T_0 = 2, T_w^-/T_0 = 1$)²⁴. (a) $Kn = 5$, (b) $Kn = 0.5$, (c) $Kn = 0.05$, (d) $Kn = 0.01$

特異性を示す。たとえば等温線は先端に集中する。平板全体には X_1 方向に力 F が働く。それを Kn の関数として示したのが図3である。気体の流れ、平板に働く力ともに、連続流極限 ($Kn \rightarrow 0$) で消滅する。

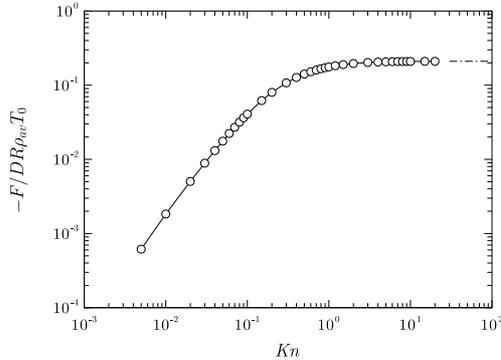


図3 平板に働く力 ($L/D = 4, T_w^+/T_0 = 2, T_w^-/T_0 = 1$)²⁴

本問題では、平板に先端があることと平板の温度がそこで不連続であることから、気体分子の速度分布関数が先端まわりで不連続になる（どちらか一方の原因でも不連続は発生する）。ここでの数値解析では、通常の差分法と特性曲線法を組み合わせた方法により、不連続の挙動を正確に捉えている。これによって初めて、巨視量の先端における特異性とその付近での急激な変化を正しく記述することができる。

ラジオメータは、光を当てるとガラス球の中の羽根車が回転する装置で、ガラス球の中は低圧に保たれており、羽根は片面が黒く着色されていることがポイントである。光が当たると黒い面の温度が上がり、両面で温度差が生じる。これと周りの気体が低圧であることから、

羽根のまわりに流れが生じて羽根には力が働き、これによって羽根車が回転する。したがって、ここで考えた問題は、ラジオメータの羽根の一つのモデルと言える。

3.2 間接的数値解析：曲がり流路を通る流れ^{25,26}

前節のような直接的数値解析だけではなく、理論を補助する間接的な数値解析も、しばしば重要な役割を果たす。ここではその例を示す。

一定幅 D で任意に曲がりくねった2次元流路を考える。両側の壁の温度は、直断面では等しいが、流路に沿って任意に変化してもよい。有意の温度変化が生じる流路の長さの尺度を L とする。いま、流路幅が十分狭く、 $\epsilon = D/L \ll 1$ が成り立つとする。このとき、ボルツマン方程式のBGKモデルをもとに、微小パラメータ ϵ について系統的漸近解析を行うと、 $O(\epsilon^2)$ の誤差を除いて、気体の温度、圧力などの巨視的物理量は流路の直断面で一様で、気体の密度変化は、次の（無次元）方程式によって記述されることが分かる（ボルツマン方程式を用いても、本質的には同じ方程式が得られる）：

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(s, t) + \frac{\partial}{\partial s} M(s, t) = 0. \tag{1}$$

ここに

$$M(s, t) = \sqrt{T_w(s)} M_P(K(s, t), |\kappa(s)|) \frac{\partial \rho(s, t)}{\partial s} + \frac{\rho(s, t)}{\sqrt{T_w(s)}} [M_P(K(s, t), |\kappa(s)|) + M_T(K(s, t), |\kappa(s)|)] \frac{dT_w(s)}{ds}, \tag{2}$$

$$K(s, t) = (\sqrt{\pi}/2) Kn T_w(s)^{1/2} / \rho(s, t). \tag{3}$$

上式において、 $L^2 D^{-1} (2RT_0)^{-1/2} t$ は時間変数、 Ls および $D^{-1} \kappa(s)$ はそれぞれ流路の中心線に沿う長さおよび

び中心線の曲率, $T_0 T_w(s)$ は流路壁の温度, $\rho_0 \rho(s, t)$ は気体の密度, T_0 は基準温度, ρ_0 は基準密度, $\text{Kn} = l/D$ はクヌーセン数で, l は基準状態での平均自由行程である. また, $M_P(x, y)$, $M_T(x, y)$ はそれぞれ与えられた2変数の関数である. (無次元) 時刻 t に位置 s における断面を横切る単位時間当たりの気体の質量流量は, $O(\epsilon^2)$ の誤差を除いて $\rho_0(2RT_0)^{1/2} DM(s, t)\epsilon$ で与えられる.

詳しくは省略するが, 関数 $M_P(x, y)$, $M_T(x, y)$ はそれぞれ, 幅 D の円環状の2次元領域において, 周方向の圧力勾配および周方向の壁面温度勾配によって誘起される循環流の流量に対応している (これは物理的には実現できない仮想的流れである). 第1変数 (x) はクヌーセン数に, 第2変数 (y) は円環流路の中心の曲率に対応する. これらの関数は解析的に求めることはできないため, (1) は現実的には方程式とは言えない. しかし, 2変数の多数の組み合わせに対して循環流の問題を数値解析することにより, それらを数値的に構築することができる. 実際, 文献25)では, BGKモデルと流路壁上での拡散反射条件のもとで, これらの関数のデータベースが構築されている. したがって, (1) は少なくとも数値的には方程式である.

この数値的方程式の応用の一例を示す. 流路の中心線がアルキメデス螺旋:

$$r = a\theta \quad (0 \leq \theta \leq \theta_{\max}), \quad (4)$$

であるような細い流路を考える. ここに (r, θ) は平面極座標を表す (r, a は有次元量). ここでは, $\theta_{\max} = 2\pi, 4\pi, 8\pi, 10\pi$ の4つの流路を考え, すべて長さは L とする. $\theta_{\max} = 8\pi$ のときの流路を図4に示す. (4)の定数 a は, $\epsilon = D/L = 0.0015721$ となるように選ぶ. すなわち, $a/D = 14.96$ ($\theta_{\max} = 2\pi$), $a/D = 3.935$ ($\theta_{\max} = 4\pi$), $a/D = 1$ ($\theta_{\max} = 8\pi$), $a/D = 0.6415$ ($\theta_{\max} = 10\pi$).

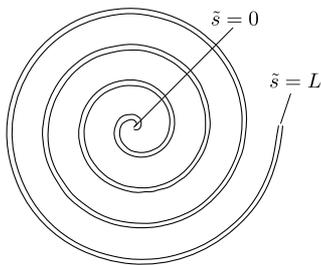


図4 アルキメデス螺旋状の流路 ($\theta_{\max} = 8\pi$)²⁶⁾

流路の両端が開放されており, 流路壁の温度は, 始端 ($\tilde{s} = Ls = 0$) で T_0 , 終端 ($\tilde{s} = Ls = L$) で T_1 で, 流路に沿って \tilde{s} の1次関数として変化するとする. このとき, 流路には低温部から高温部に流れが誘起される. これは熱遷移流と呼ばれ, 希薄気体に特有の現象である.

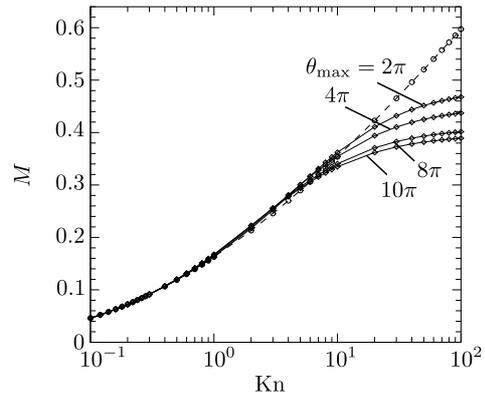


図5 無次元質量流量 (アルキメデス螺旋状の流路)²⁶⁾

$T_1/T_0 = 3$ のときの定常な気体の質量流量をクヌーセン数 Kn の関数として図5に示す. 図の M は無次元質量流量で [有次元質量流量は $\rho_0(2RT_0)^{1/2} DM\epsilon$], 破線は直線流路の場合である. 流路が曲がっている効果は, Kn が7程度以上の高希薄域においてのみ現れることが分かる. 圧力差による流れ (ポアズイユ流) やより複雑な流路に対する結果, 流路の曲率が不連続的に変化する場合の(1)に対する接合条件などについては, 文献25,26)を参照されたい.

図4のような長い曲がり流路を通る希薄気流を DSMC法などの直接的数値解法で解析するのはまず不可能である. これに対して, 数値解析によって得られた M_P と M_T のデータベースを含む巨視的方程式(1)は, 数値解析が非常に簡単で, 時間的な変化がある場合も含めて, 手早く流量や圧力分布を得ることができる.

3.3 数学に貢献する数値解析: 平衡状態への緩和²⁷⁾

最後に, 温度場による流れからは外れるが, 数学・統計物理学における基礎的問題に対する数値解析の貢献の一例について簡単に述べる. 一様一定温度に保たれた容器の中に希薄気体が入っており, ある時刻 (初期時刻) にそれが乱されたとする. しかしそのまま放置すれば, 気体は容器と同じ温度の静止平衡状態に近づくであろう. 容器内の気体の質量は保存されるから, この平衡状態の密度は初期時刻での平均密度に等しい. それでは, 気体はその最終平衡状態にどのような速さで近づくのか. これが, ボルツマン方程式をもとに数学的に明らかにされたのは比較的最近である. L. Desvillettes と C. Villani²⁸⁾ は, 気体分子の速度分布関数を f , その最終平衡分布を f_∞ とするとき,

$$\|f - f_\infty\| = O(t^{-\delta}) \quad (t \rightarrow \infty, \delta: \text{任意の正数}), \quad (5)$$

が成り立つことを証明した. ここに, $\|\cdot\|$ はしかるべきノルム, t は時間変数である. ただし, ここでは, 容

器壁上で気体分子が鏡面的に反射するか、容器が周期的な箱であると仮定されている。したがって、最終平衡分布の温度は、初期時刻において気体分子がもつエネルギーによって決まる。後年、Villaniは拡散反射壁(3.1参照)についても同じ結果が成り立つことを示した。この場合の最終温度は容器の温度と同じである。ボルツマン方程式の解の平衡状態への緩和過程を数学的に明らかにした一連の業績(およびプラズマの非線形ランダウ減衰の数学的理論)により、Villaniは2010年にフィールズ賞を受賞している。

(5)は、平衡状態への緩和は速く、ほとんど指数関数的、すなわち $\|f - f_\infty\| = O(\exp(-ct))$ (c は定数)であることを示している(実際、文献28)の条件のもとでは、緩和が厳密に指数関数的であることが最近証明された)。この速い緩和は、気体分子同士の衝突によって起こる。それでは、気体が非常に希薄で分子同士の衝突が無視できる場合(自由分子気体という)どうなるか。鏡面反射や周期境界条件では、平衡状態への緩和は起こらない。しかし、拡散反射に代表される物理的境界条件では、気体分子が容器壁と相互作用することによってやはり容器温度と等しい温度をもつ平衡分布に緩和するはずである。実際、このような緩和が起こることは、拡散反射条件のもとで、数学的に証明されているが、その速さについてはこれまで知られていなかった。直感的には、緩和は(5)よりも遅いことが予想される。

そこで筆者らは、拡散反射境界条件のもとで、容器内の自由分子気体の緩和の速さを数値的に調べることを試みた。扱う方程式は、衝突積分項のないボルツマン方程式であるため、数値解析は原理的には容易であるが、長時間経過後の微小な量を正確に捉える必要があるため、注意深い計算が必要である。その結果、

$$\|f - f_\infty\| \approx Ct^{-d} \quad (t \rightarrow \infty, d = 1, 2, 3), \quad (6)$$

を示すいくつかの数値的証拠を得た。上式中の d は容器の次元である。その一例を図6に示す。ここでは、容器は球形($d = 3$, 直径 L)、無限に長い円筒($d = 2$, 直径 L)、または無限に広い平行2平板間の領域($d = 1$, 間隔 L)で、初期時刻($t = 0$)において、気体は容器温度 T_w の2倍の温度をもつ静止平衡分布であるとしている。図中の t は、 $L(2RT_w)^{-1/2}$ で無次元化した時間変数、 $\log t$ は10を底とする t の常用対数、 $\|\Delta f\|^{(d)}$ は、 $d = 3$ のときには $\|f - f_\infty\|$ を全範囲の分子速度と容器内の領域にわたって積分した L^1 ノルム、 $d = 2, 3$ のときには、周辺分布関数に対する同様の L^1 ノルムである。

図の3本の曲線は、時間の経過とともに、それぞれ傾きが -1 ($d = 1$)、 -2 ($d = 2$)、 -3 ($d = 3$)の直線に近づく。傾きの具体的な値は、 $d = 1$ のとき $t = 10^4$

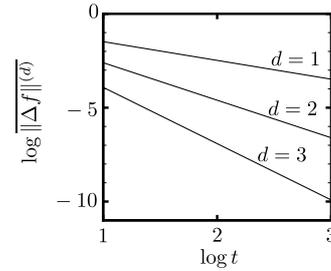


図6 自由分子気体における平衡状態への緩和²⁷⁾

($\log t = 4$)で -0.999999 , $d = 2, 3$ のときには $t = 10^3$ でそれぞれ -1.999997 , -2.999998 である。

これが動機となって、(6)を数学的に証明しようという試みが始まっている。とくに文献29)では、容器の形は上と同じ球形、円柱形などであるが、任意の初期分布に対して、証明が与えられた。このように数値解析は、数学的研究に動機を与えたり、数学では証明しきれない場合に数値的証拠で証明を補完したりと言った重要な役割を担うことができる。

4 おわりに

ボルツマン方程式およびそのモデル方程式による希薄気流の数値解析については膨大な数の文献がある。本稿では、そのうち筆者が関心をもっている三つの側面に焦点を絞り、主に温度場による流れを取り上げて、その一端を紹介することを試みた。したがって内容は非常に偏っているが、最近の取り組みについて何らかの情報を提供することができれば幸甚である。

謝辞

第25回数値流体力学シンポジウムにおける特別講演の機会を与えて頂いた実行委員の皆様、とくに実行委員長の高島岳夫先生に深く感謝致します。

引用文献

- 1) 曾根良夫, 青木一生: 分子気体力学(朝倉書店, 1994); <http://hdl.handle.net/2433/84799> (正誤表等)。
- 2) Sone, Y.: *Kinetic Theory and Fluid Dynamics* (Birkhäuser, 2002); <http://hdl.handle.net/2433/66099>.
- 3) Sone, Y.: *Molecular Gas Dynamics: Theory, Techniques, and Applications* (Birkhäuser, 2007); <http://hdl.handle.net/2433/66098>.
- 4) Sone, Y.: Flows induced by temperature fields in a rarefied gas and their ghost effect on the behavior of a gas in the continuum limit, *Annual Rev. Fluid Mech.* **32** (2000) 779–811.
- 5) Bird, G. A.: *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows* (Oxford Univ. Press, 1994).

- 6) Wagner, W.: A convergence proof for Bird's direct simulation Monte Carlo method for the Boltzmann equation, *J. Stat. Phys.* **66** (1992) 1011–1044.
- 7) Homolle, T. M. M. & Hadjiconstantinou, N. G.: Low-variance deviational simulation Monte Carlo for Boltzmann equation, *J. Compt. Phys.* **226** (2007) 2341–2358.
- 8) Sone, Y., Ohwada, T., & Aoki, K.: Temperature jump and Knudsen layer in a rarefied gas over a plane wall: Numerical analysis of the linearized Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids A* **1** (1989) 363–370.
- 9) Ohwada, T., Sone, Y., & Aoki, K.: Numerical analysis of the shear and thermal creep flows of a rarefied gas over a plane wall on the basis of the linearized Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids A* **1** (1989) 1588–1599.
- 10) Ohwada, T., Sone, Y., & Aoki, K.: Numerical analysis of the Poiseuille and thermal transpiration flows between two parallel plates on the basis of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids A* **1** (1989) 2042–2049.
- 11) Takata, S., Sone, Y., & Aoki, K.: Numerical analysis of a uniform flow of a rarefied gas past a sphere on the basis of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids A* **5** (1993) 716–737.
- 12) Takata, S. & Sone, Y.: Flow induced around a sphere with a nonuniform surface temperature in a rarefied gas, with application to the drag and thermal force problems of a spherical particle with an arbitrary thermal conductivity, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **14** (1995) 487–518.
- 13) Ohwada, T.: Structure of normal shock waves: Direct numerical analysis of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids A* **5** (1993) 217–234.
- 14) Ohwada, T.: Heat flow and temperature and density distributions in a rarefied gas between parallel plates with different temperatures: Finite difference analysis of the nonlinear Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids* **8** (1996) 2153–2160.
- 15) Aristov, V. V.: *Methods of Direct Solving the Boltzmann Equation and Study of Nonequilibrium Flows* (Kluwer Academic, 2001).
- 16) Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., & Krook, M.: A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems, *Phys. Rev.* **94** (1954) 511–525.
- 17) Welander, P.: On the temperature jump in a rarefied gas, *Ark. Fys.* **7**, 507–553.
- 18) Sone, Y. & Sugimoto, H.: Strong evaporation from a plane condensed phase, *Adiabatic Waves in Liquid-Vapor Systems*, Meier, G. E. A. & Thompson, P. A. (eds.) (Springer, 1990) 293–304.
- 19) Aoki, K., Sone, Y., & Yamada, T.: Numerical analysis of gas flows condensing on its plane condensed phase on the basis of kinetic theory, *Phys. Fluids A* **2** (1990) 1867–1878.
- 20) Sugimoto, H. & Sone, Y.: Numerical analysis of steady flows of a gas evaporating from its cylindrical condensed phase on the basis of kinetic theory, *Phys. Fluids A* **4** (1992) 419–440.
- 21) Sone, Y. & Sugimoto, H.: Kinetic theory analysis of steady evaporating flows from a spherical condensed phase into a vacuum, *Phys. Fluids A* **5** (1993) 1491–1511.
- 22) Aoki, K., Kanba, K., & Takata, S.: Numerical analysis of a supersonic rarefied gas flow past a flat plate, *Phys. Fluids* **9** (1997) 1144–1161.
- 23) Aoki, K., Takata, S., Aikawa, H. & Golse, F.: A rarefied gas flow caused by a discontinuous wall temperature, *Phys. Fluids* **13** (2001) 2645–2661.
- 24) Taguchi, S. & Aoki, K.: Rarefied gas flow around a sharp edge induced by a temperature field, *J. Fluid Mech.* (2012) doi:10.1017/jfm.2011.536 (published online).
- 25) Aoki, K., Degond, P., Mieussens, L., Takata, S., & Yoshida, H.: A diffusion model for rarefied flows in curved channels, *Multiscale Model. Simul.* **6** (2008) 1281–1316.
- 26) Aoki, K., Takata, S., Tatsumi, E., & Yoshida, H.: Rarefied gas flows through a curved channel: Application of a diffusion-type equation, *Phys. Fluids* **22** (2010) 112001.
- 27) Tsuji, T., Aoki, K., & Golse, F.: Relaxation of a free-molecular gas to equilibrium caused by interaction with vessel wall, *J. Stat. Phys.* **140** (2010) 518–543.
- 28) Desvillettes, L. & Villani, C.: On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems: the Boltzmann equation, *Invent. Math.* **159** (2005) 245–316.
- 29) Kuo, H.-W., Liu, T.-P., & Tsai, L.-C.: Free molecular flow with boundary effect, *Commun. Math. Phys.* (to be published).