

固液複合系の力学物性

武井 康子*

A Review of the Mechanical Properties of Solid-liquid Composites

Yasuko TAKEI *

Abstract

This article reviews the mechanical properties of solid-liquid composites with special emphasis on acoustic properties. A simple method proposed by Takei (2002) to estimate porosity, pore shape, and/or liquid compressibility from data on elastic wave velocities (V_P and V_S) is summarized. Using this method, a variety of pore shapes are treated systematically in terms of the equivalent aspect ratio of an oblate spheroid model. An important application of this method is in the detection of terrestrial fluids from seismic tomographic images. Information on pore shape obtained from tomographic images is shown to provide valuable information on the migration of aqueous fluids and melts in the Earth's interior. A brief summary is also presented on dispersion and attenuation mechanisms in solid-liquid composite media to clarify the assumptions and the limitations of the present method.

Key words : solid-liquid composite, elastic wave velocity, tomography, water, melt, poroelasticity

キーワード : 固液複合系, 弾性波速度, トモグラフィー, 水, メルト, 多孔質媒質理論

I. はじめに

地球内部における水やメルトなどの流体相の生成と移動の様式を解明することは、古くから固体地球科学における大きな関心事の一つであった。火山地域では、マグマの活動と密接に関連して微動や低周波地震などの特異な地震が発生することが良く知られてきた。近年、火山活動と直接関連のない場所でも流体の存在を示唆する微動や低周波地震活動が発見され、地球内部の流体活動への関心が高まっている (e.g., Obara, 2002; Ohmi and Obara, 2002)。最近の地震観測網の発達により、地下の3次元地震波速度構造や減衰構造が高解像度で得られるようになり、水やメルトの

存在する領域を地震波の低速度域や高減衰域としてとらえることができるようになってきた (e.g., Nakajima *et al.*; 2001a, b, 2003; Tsumura *et al.*, 2000)。流体はそれ自体では横波速度が0であるが、低速度域の横波速度は0ではない。このことから、地震波がとらえているものが、固体と流体の混ざり合う固液複合系としての流体の姿であることがわかる。地震波を用いた観測から対象とする固液複合系の状態について有用な情報を引き出すためには、固液複合系の力学物性についての知識が必要となる。

固液複合系の特徴を表す最も一般的なパラメータは流体の体積分率である。流体の体積分率が小さいほど固体の物性に近く、大きいほど液体の

* 東京大学地震研究所

* Earthquake Research Institute, University of Tokyo

物性に近くなるという傾向が一般にある。しかし、流体の体積分率に加えて、流体ポアの形状が系の力学物性に大きな影響を与える。力学物性に対するポア形状の影響の強さは、固体と固体の混合物や液体と液体の混合物に比べて固液複合系を特徴付ける性質の一つである。これまで、固液複合系の力学物性について、様々なポア形状を仮定したモデルが提案されてきた (e.g., Kuster and Toksöz, 1974; O'Connell and Budiansky, 1974; Mavko, 1980; Takei, 1998)。ポア形状が既知の系の力学物性を予測するためには、このようなフォワードアプローチのみで良い。しかし多くの観測や実験では、対象とする固液複合系のポア形状が未知である。このようなデータを解析するためには、特定のポア形状を仮定したフォワードアプローチから得られる断片的な知識のみでは不十分で、ポア形状の影響を系統的に理解することが重要である。ある特定の力学物性への影響が等しいポア形状同士を結びつける「等価アスペクト比」という概念を用いると、ポア形状を系統的に扱うことが可能になる (Takei, 2002)。本総説の目的は、等価アスペクト比の概念を用いて、固液複合系の弾性波速度に与える流体の体積分率、ポア形状、そして流体の物性の影響を系統的に整理すること、そして、これらの性質を弾性波速度データの逆解析によってどの程度知り得るかを明確にすることである。

II章ではまず固液複合系のマクロな力学物性やダイナミクスを扱うための理論的枠組みを紹介する。固液複合系の波動伝播を扱うための理論的枠組みは Biot (1956a, b) により与えられているが、この理論は均質な系の微小変形のみ限定され、不均質のある場合や大変形への拡張性が乏しい。本総説では、波動伝播の問題のみならず、固液複合系の様々なダイナミクスを取り扱う際の基礎となる拡張性の高い枠組みを紹介する。II章で紹介する理論的枠組みをIII章で均質な系の微小変形に適用して簡単化し、固液複合系の波動方程式を導く。IV-V章では固液複合系の弾性波速度に対する流体の体積分率、ポア形状、流体物性の影響を詳しく議論し、VI章ではその地球科学的な重要性を

述べる。VII章では固液複合系における弾性波の分散と減衰について簡単なまとめを行い、本総説で扱った弾性波速度の適用範囲を明らかにする。本総説で用いる「液体」は「流体」とほぼ同じ意味であるので、気体も含めて考えることができる。

II. 固液複合系のマクロなダイナミクスを扱う理論的枠組み

初めに固液複合系のマクロなダイナミクスを扱う理論的枠組みを紹介する。図 1a に固液複合系の例を示す。固体粒子のサイズより小さいスケールをミクロスケールと呼ぶことにする。固体中と液体中では密度場、変位場、応力場、などが異なるため、この系の力学場はミクロスケールでも不均質である。しかし、このような系に対する地球科学的な興味は、もっぱら、粒子サイズより十分波長の長い弾性波動伝播や部分熔融領域からのマントルスケールでのメルトの分離上昇過程のような、スケールの大きな現象にある。このようなマクロスケールのダイナミクスは、以下に示すように、ミクロスケールの不均質を平均化して得られるマクロな変数のみに基づいて一般の連続体力学と同様に取り扱うことができる。その際、固体の平均と液体の平均とを分けて取り扱うことにより、メルトの分離上昇過程のような固体と液体が異なる運動をする現象をも取り扱うことができ、理論の応用範囲が広がる。多孔質媒質理論と呼ばれるものもここで紹介する理論に含まれるが、均質な系の微小変形を前提としているため理論の適用範囲に制限がある。また多孔質媒質理論に関する文献の多くは、歴史的経緯や応用への配慮から説明が複雑になっており、必要最小限の知識が見えにくい。この章では、系に対する必要最小限の要請が、通常の連続体力学と同様に、質量保存則、運動量保存則、および構成則の要請であることを確認する。

固液複合系のマクロな座標 $\mathbf{x}$ の位置に REV (representative elementary volume) と呼ぶ小領域を考える (図 1a, b)。REV は十分な数の固体粒子を含む大きさにとる。変位場や応力場などの力学場について、REV 内での平均をとった量

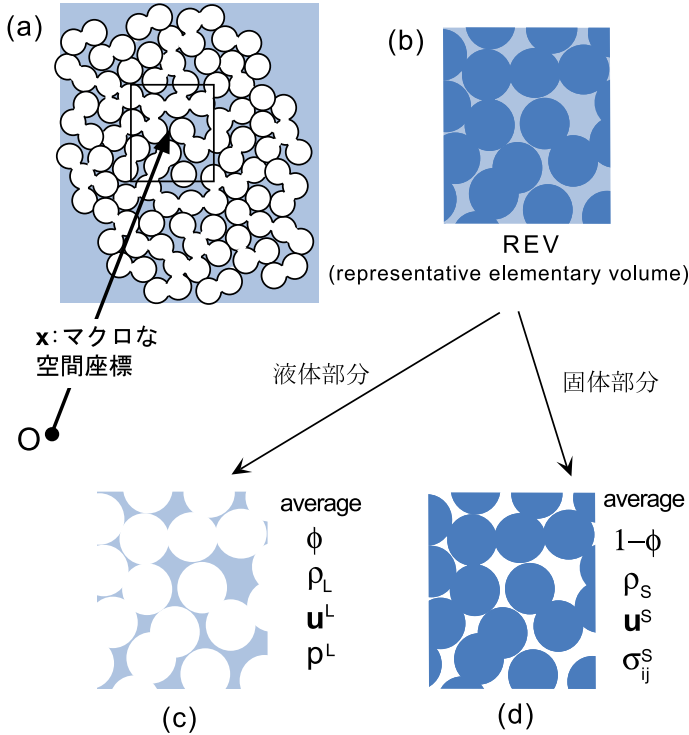


図 1 固液複合系のマクロなダイナミクスを記述する理論的枠組み。
(a) マクロな座標 $\mathbf{x}$ の位置に、四角で示す小領域 REV (representative elementary volume) を考える。(b) REV の拡大図 (薄色が液体、濃色が固体)。(c) REV 内の液体部分とその力学場の平均。(d) REV 内の固体部分とその力学場の平均。

Fig. 1 (a), (b) Representative elementary volume (REV) defined in a solid-liquid composite system. (c), (d) Liquid and solid systems in REV and the average of their mechanical fields.

(マクロな量) を定義する。その際、液相における平均 (図 1c) と固相における平均 (図 1d) とを区別して考える。即ち、REV に含まれる液体の体積分率を ϕ 、平均密度を ρ_L 、平均変位を $\mathbf{u}^L$ 、平均圧力を p^L とする。また、REV に含まれる固体の体積分率を $1 - \phi$ 、平均密度を ρ_s 、平均変位を $\mathbf{u}^s$ 、平均応力を σ_{ij}^s とする。このように、位置 $\mathbf{x}$ における系の力学状態を、

- ϕ 液体の体積分率 (無次元)
- ρ_L 液体の密度 (kg/m^3)
- ρ_s 固体の密度 (kg/m^3)
- $\mathbf{u}^L$ 液体の変位 (m)
- $\mathbf{u}^s$ 固体の変位 (m)
- p^L 液体の圧力. 押しが正 (Pa)
- σ_{ij}^s 固体の応力. 引きが正 (Pa)

という 7 つのマクロな独立変数によって記述することがこの理論の特徴である。

7 つの変数の振る舞いは、以下の 7 つの基礎方

程式により記述される。

(A) 液体の質量保存則

$$\frac{\partial(\phi \rho_L)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \rho_L \dot{\mathbf{u}}^L) = \Gamma$$

(B) 固体の質量保存則

$$\frac{\partial\{(1-\phi)\rho_s\}}{\partial t} + \nabla \cdot \{(1-\phi)\rho_s \dot{\mathbf{u}}^s\} = -\Gamma$$

(C) 液体本来の構成則

$$\frac{\delta \rho_L}{\rho_L} = \frac{1}{k_L} \delta p^L$$

(D) 固体本来の構成則

$$\frac{\delta \rho_s}{\rho_s} = \frac{1}{k_s} \delta p^s$$

(E) 固体フレームワークの構成則

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2N} \left(\sigma_{ij}' - \frac{\sigma_{kk}'}{3} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3K_b} \frac{\sigma_{kk}'}{3} \delta_{ij} - \frac{1}{3k_s} p^L \delta_{ij}$$

(F) 液体の運動量保存則

$$\phi \rho_L \ddot{\mathbf{u}}^L = -\nabla(\phi p^L) + \phi \rho_L \mathbf{g} + \mathbf{I}$$

(G) 固体の運動量保存則

$$(1-\phi) \rho_S \ddot{\mathbf{u}}^S = \nabla \cdot \{(1-\phi) \sigma^S\} + (1-\phi) \rho_S \mathbf{g} - \mathbf{I}$$

(F)-(G) に含まれる $\mathbf{I}$ は、固体と液体の相互作用（固体が液体に及ぼす力を正、 N/m^3 ）を表し、具体的には、

$$(*) \mathbf{I} = -\frac{\eta \phi^2}{k_\phi} (\dot{\mathbf{u}}^L - \dot{\mathbf{u}}^S) + p^L \nabla \phi$$

と与えられる。ただし、以上の方程式において、

Γ 固体から液体への相変化 (kg/s/m^3)

k_L 液体本来の体積弾性率 (Pa)

k_S 固体本来の体積弾性率 (Pa)

K_b 固体スケルトンの体積弾性率 (Pa)

N 固体スケルトンの剛性率 (Pa)

η 液体の粘性率 (Pa s)

k_ϕ 浸透率 (m^2)

$$p^S = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx}^S + \sigma_{yy}^S + \sigma_{zz}^S)$$

..... 固体の圧力。押しが正 (Pa)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^S}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^S}{\partial x_i} \right)$$

..... 固体フレームワークの歪み（無次元）

$$\sigma_{ij} = (1-\phi) \sigma_{ij}^S - \phi p^L \delta_{ij}$$

..... 媒質に働くバルクの応力。引きが正 (Pa)

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} + p^L \delta_{ij} \text{ 有効応力 (Pa)}$$

$\mathbf{g}$ 重力加速度ベクトル (N/kg)

$\dot{\mathbf{u}} = D\mathbf{u}/Dt$ は速度, $\ddot{\mathbf{u}} = D\dot{\mathbf{u}}/Dt$ は加速度

$$\nabla p^L = \text{grad } p^L = \partial p^L / \partial x_i$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = \text{div } \dot{\mathbf{u}} = \partial \dot{u}_i / \partial x_i \text{ (総和規約を適用)}$$

$$\nabla \cdot \sigma = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j = \sigma_{i,j,j} \text{ (総和規約を適用)}$$

である。

ミクロスケールに見ると、固相液相それぞれの相内で質量保存則、運動量保存則、構成則が厳密に成り立つことが要請される。これらの要請を REV 内の各相について積分することにより、上に挙げた 7 つの基礎方程式のうち固体フレームワークの構成則 (E) 以外の 6 つを導くことができる (Drew, 1983)。基礎方程式の (A)-(D) に

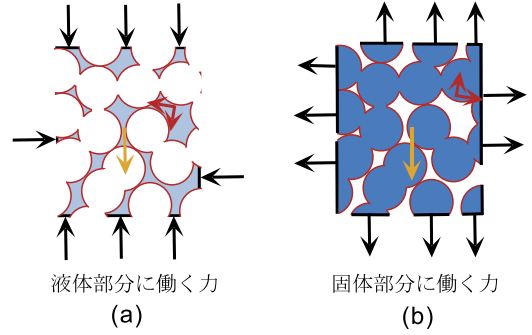


図 2 (a) REV 内の液体部分に働く力. (b) REV 内の固体部分に働く力.

系の全境界を、REV の表面に一致する境界（黒で示す）と固液界面に一致する境界（赤）に分け、それぞれの境界を通して働く力を同色で示した（液圧は押しを正、固体の応力は張力を正とする）。赤の力は、界面に平行な成分と垂直な成分に分けて示した。体積力（重力）はオレンジ色で示した。

Fig. 2 Forces applied to liquid (a) and solid (b) systems in REV.

Black arrows: surface force applied through the boundary of REV (black). Red arrows: surface force applied through the boundary with the other phase (red). Orange arrows: body force applied by gravity. Stress is tension positive and liquid pressure is compression positive.

ついては、流体力学で一般的に用いられている基礎方程式との比較からその意味が容易に理解できるであろう。(A), (B) の右辺の Γ は、固体と液体の間で相変化が起こる場合にのみ 0 でない値を持つ。ここでは (E)-(G) 式について、その意味と導出法をやや詳しく説明する。

運動量保存則 (F), (G) の各項の意味を理解するための説明を図 2 に示す。REV 内の固体または液体に働く力は、体積力である重力と、領域の境界を通して働く面積力との二つに分けられる。一方、領域の境界は、REV の箱の表面に一致する境界（黒で示してある）と固相と液相の相境界に一致する境界（赤で示してある）の二つに分けられる。黒の境界は同じ相内に、赤の境界は二相の境界にある。黒の境界から受ける力の合力は (F)-(G) の右辺第一項により与えられるが、

これらの項は通常の連続体力学の式からの類推で容易に理解できる。一方、赤の境界を通して働く力は二相系に特徴的な力で、その合力 $\mathbf{I}$ は作用反作用の法則から (F), (G) で符号が逆になる。 $\mathbf{I}$ の具体的な内訳を (*) に示したが、第一項は固液の相対速度による粘性引きずりの力を、第二項は液体の圧力からの寄与を表している。赤の境界面に働く力のうち、界面に平行な成分のみの合計を示したものが (*) の第一項で、界面に垂直な成分のみの合計を示したものが (*) の第二項であると考えることができる (図 3)。(F), (G) を導出する際に、固体も液体もそれぞれ空間的につながっていることを前提とした (図 2, 黒の境界面)。従って、例えば固体の粒が液体に分散している系 (サスペンション) や、液体が固体に分散している系 (インクルージョン) へ適用する際には注意が必要である。

(E) 式左辺の ϵ_{ij} は、ただし書きに示すように固体のマクロな変位場 $\mathbf{u}^s$ の空間微分 (即ち、歪み) により定義され、固体フレームワークの歪みと呼ぶ。例えばスポンジをギュッと縮めることを考えると、スポンジのマクロな変形を表すのがこの ϵ_{ij} であり、これをスポンジに加わるマクロな (平均化された) 応力に関係付ける式が (E) 式である。スポンジは柔らかく弱い力で大きく変形するが、このようなマクロに見えるスポンジの性質を記述するのが (E) 式である。(E) 式を導出する方法を図 4 に示す。固体には黒の境界面を通して σ_{ij}^s の応力、赤の境界面を通して p^L の液圧が加わっている (図 4a)。この時の固体フレームワークの歪みを、黒の境界面に $\sigma_{ij}^s + p^L \delta_{ij}$ の応力が加わり赤の境界面は自由表面になっている場合 (図 4b) の歪みと、すべての境界に一定の圧力 p^L (すなわち応力 $-p^L \delta_{ij}$) が加わった場合 (図 4c) の歪みとの和として計算できると仮定する (固体本来の物性が線形であれば、このような足し合わせができる)。相境界面が自由表面になっている時 (図 4b) の固体フレームワークを特に「スケルトン」と呼び、その弾性的性質は「スケルトンの体積弾性率 K_b 」と「スケルトンの剛性率 N 」により表される (E 式の右辺第 1 項, 第 2 項)。

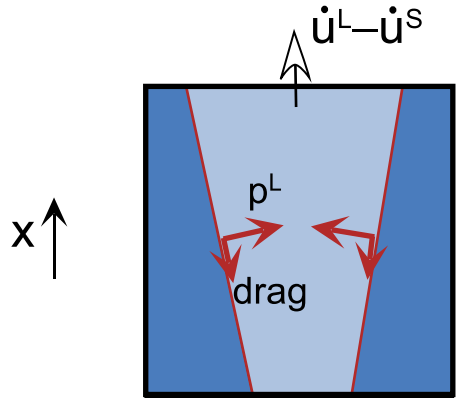


図 3 固液界面 (赤) を通して働く固体と液体の相互作用の内訳 (ポロシティに空間勾配のある場)。

界面に平行な力は固液の粘性引きずりで生じると考え、その合力は固液のマクロな相対速度に比例すると仮定する。界面に垂直な力は液圧に等しいと考えると、その合力はポロシティの空間勾配に比例する。固体から液体に働く力のみ赤矢印で示した。

Fig. 3 Schematic illustration of the interaction between solid and liquid under a gradient of porosity.

スポンジが柔らかいという例からも分かるように、 K_b と N は固体物質本来の弾性定数のみでは決まらずに、ポロシティやポア形状に大きく依存するものであることに注意が必要である。(ポロシティは液体の体積分率 ϕ と同じになるが、スケルトンを議論する際にはポロシティという言葉を用いることにする。) すべての境界に一樣な圧力 p^L が働く時 (図 4c) の固体フレームワークの振る舞いは、REV 内がすべて固体で満たされている時の振る舞いと等価であり、固体本来の体積弾性率 k_s で決まる体積変化をする (E 式の右辺第 3 項)。

(E) を導出する際に、固体が弾性体の場合のみを考えたが、例えば部分熔融層からの固液分離過程のようなゆっくりした現象では、固体は粘性体として扱われる (e.g., McKenzie, 1984)。この場合には (E) 式は固体スケルトンの体積粘性率 ξ (Pa s) および固体スケルトンのせん断粘性率 ζ (Pa s) を用いて、

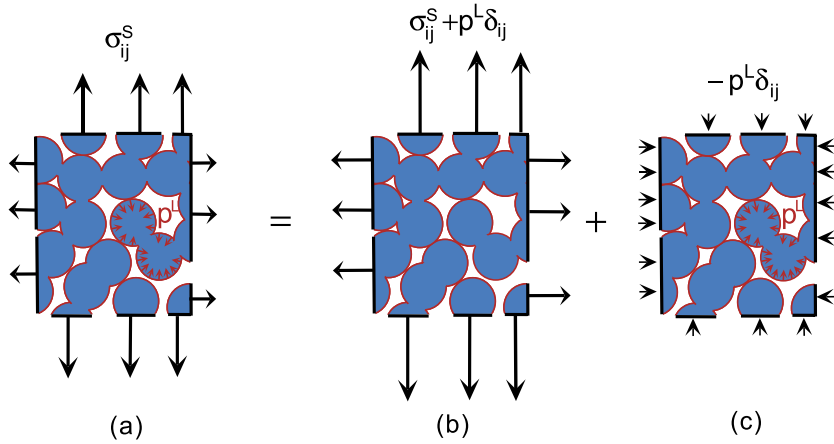


図 4 REV 内の固体部分に働く力 (a) を (b) と (c) の二つに分解。
 (a) 黒の境界面を通して応力 σ_{ij}^s が、赤の境界面を通して液圧 p^L が加わっている。
 (b) 黒の境界を通して応力 $\sigma_{ij}^s + p^L \delta_{ij}$ が加わり、赤の境界面は自由表面になっている。
 (c) 全ての境界面に液圧 p^L (すなわち応力 $-p^L \delta_{ij}$) が加わっている。

Fig. 4 The constitutive relation for a solid framework (eq.E in the text) can be derived by dividing the applied force (a) into the uniform pressure on all boundaries (c) and the other (b).

$$(E) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\zeta} \left(\sigma'_{ij} - \frac{\sigma'_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3\zeta} \frac{\sigma'_{kk}}{3} \delta_{ij}$$

となる。粘性による大変形を扱う際には固体本来の圧縮性が無視できるため、(E) の右辺第 3 項に相当する項がない。固体本来の圧縮性が無視できる場合でも、スケルトンの体積粘性率 ζ が無視できないことには注意が必要である。スポンジの例からも分かるように、固体本来の物性に圧縮性がなくてもポアの体積を小さくすることで固体フレームワークは体積変化し得るからである。

上記では固体フレームワークの歪み ϵ_{ij} の物理的意味をスポンジの例で直感的に述べたが、 ϵ_{ij} の数学的側面について少し補足する。固体内の変位場についてミクロスケールでの空間微分をとると固体内の歪み場になる。これを REV 内の固体で平均したものをここでは「固体の平均歪み」と呼ぶことにする。固体内のミクロな歪み場とミクロな応力場は固体物質本来の物性によって関係付けられるので、固体の平均歪みと固体の平均応力との関係は固体物質本来の物性のみで決まる。これが (D) 式である。従って ϵ_{ij} と平均応力の関係

が固体物質本来の物性のみでは決まらないことを理解するためには、固体の平均歪みと ϵ_{ij} の違いを意識することが重要である。数学的には、固体の平均歪みが「変位場の微分の平均」であるのに対して ϵ_{ij} は「変位場の平均の微分」であり、両者の違いは積分（平均）と微分の操作を行う順序の違いに他ならない。積分と微分の順序は通常は交換できるが、今のように平均化が REV 内の領域全体ではなく固体部分のみで行われる場合には、積分と微分の順序が重要な違いを生むのである。

以上のまとめから、固液複合系のダイナミクスに直接的な影響を与える物性パラメータは、 ρ_L , ρ_S , k_L , k_S , η , K_b , N , k_ϕ であることが分かる。これらのパラメータのうち、固体と液体本来の物性に関しては既存の物性データから制約することができる。しかし、スケルトンの体積弾性率 K_b 、スケルトンの剛性率 N 、および浸透率 k_ϕ は、固体や液体本来の物性では決まらずに、ポロシティやポア形状によって大きく変わる量である。このため、対象とする固液複合系に対してこれら三つのパラメータが未知である場合が多く、系のダイナミクスを予測するうえでの鍵となることが多

い。以下の章で扱う弾性波速度の問題では、スケルトンの弾性定数 K_b と N が鍵となる。

III. 固液複合系の波動方程式

前章の理論を均質な系の微小変形に適用して理論を簡単化し、固液複合系の波動方程式を導出する。その際、簡単化された理論が線形多孔質媒質理論に一致することも確認する。

マクロに均質な媒質では、 ϕ , ρ_L , ρ_S の時空間変化は変位場 $\mathbf{u}^L$ と $\mathbf{u}^S$ により生じる。従って、 $\mathbf{u}^L$ と $\mathbf{u}^S$ が十分に小さい場合には、 $\dot{\mathbf{u}}^L \cdot \nabla (\phi \rho_L)$ や $\dot{\mathbf{u}}^S \cdot \nabla ((1-\phi) \rho_S)$ などの項は二次の微少量として無視できる。このような近似のもとに、質量保存則 (A), (B) から (A)/ ρ_L + (B)/ ρ_S を計算し、さらに構成則 (C), (D) を代入すると

$$\frac{\phi}{k_L} \frac{\partial p^L}{\partial t} + \frac{1-\phi}{k_S} \frac{\partial p^S}{\partial t} + \phi \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}^L + (1-\phi) \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}^S = 0 \quad (1)$$

を得る。係数に含まれる ϕ の時間変化の寄与は二次の微少量として無視できるので、(1) 式は簡単に時間積分を行うことができ、

$$-\phi \operatorname{div} (\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^S) = \frac{\phi}{k_L} p^L + \frac{1-\phi}{k_S} p^S + \operatorname{div} \mathbf{u}^S \quad (2)$$

を得る。この章では以後微少変化を表す $\delta \mathbf{u}$ や δp などの表記を簡単に $\mathbf{u}$, p などと書く。(2) 式で、 $\operatorname{div} \mathbf{u}^S = \epsilon_{kk}$ の項は (E) 式を用いて応力のみで書き表すことができる。こうして得られる式と (E) 式とを並べて書くと

$$\begin{aligned} \phi \operatorname{div} (\mathbf{u}^L - \mathbf{u}^S) &= \phi \left(\frac{1}{k_S} - \frac{1}{k_L} \right) p^L \\ &+ (1-\phi) \left(\frac{1}{K_b} - \frac{1}{k_S} \right) (p^S - p^L) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{(1-\phi)}{2N} \left(\sigma_{ij}^S - \frac{\sigma_{kk}^S}{3} \delta_{ij} \right) \\ &- \frac{(1-\phi)}{3K_b} (p^S - p^L) \delta_{ij} - \frac{1}{3k_S} p^L \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。同様に運動量保存則 (F) と (G) についても (*) を代入して重力の項を無視すると、

$$\phi \rho_L \ddot{\mathbf{u}}^L = -\phi \nabla \cdot \mathbf{p}^L - \frac{\eta \phi^2}{k_\phi} (\dot{\mathbf{u}}^L - \dot{\mathbf{u}}^S) \quad (5)$$

$$(1-\phi) \rho_S \ddot{\mathbf{u}}^S = (1-\phi) \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^S + \frac{\eta \phi^2}{k_\phi} (\dot{\mathbf{u}}^L - \dot{\mathbf{u}}^S) \quad (6)$$

と書ける。

この (3)-(6) の 4 つの基礎方程式に基づく理論体系が線形多孔質媒質理論と呼ばれるものである。前章の枠組みに比べると方程式が 3 つ減ったが、これは変数 ρ_L と ρ_S が消去されたことと ϕ を定数として取り扱うことによるものである。(3) 式と (4) 式はどちらも構成方程式と呼ばれ、後者が固体フレームワークの構成則を表すのに対して前者は固液の相対運動の構成則を表すと考え (e.g., Wang, 2000)。線形多孔質媒質理論で取り扱われる現象では加速度項が無視できる場合が多い (波動の問題はその例外)。その場合、(5) 式はダルシー則と呼ばれることが多く、また (6) 式は、(5) 式を加えた形で

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (7)$$

として用いられることが多い。

固液複合系の波動方程式を導く。(3)-(6) の 4 つの方程式から圧力と応力を消去することにより、

$$\begin{aligned} (1-\phi) \rho_S \ddot{\mathbf{u}}^S &= P \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^S - N \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}^S \\ &+ Q \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^L + \frac{\eta \phi^2}{k_\phi} (\dot{\mathbf{u}}^L - \dot{\mathbf{u}}^S) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \phi \rho_L \ddot{\mathbf{u}}^L &= Q \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^S + R \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^L \\ &- \frac{\eta \phi^2}{k_\phi} (\dot{\mathbf{u}}^L - \dot{\mathbf{u}}^S) \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。 P , Q , R は、

$$\begin{aligned} P &= K_b + \frac{4}{3} N + \frac{(1-\phi - \frac{K_b}{k_S})^2 k_S}{1-\phi - \frac{K_b}{k_S} + \phi \frac{k_S}{k_L}} \\ Q &= \frac{\phi (1-\phi - \frac{K_b}{k_S}) k_S}{1-\phi - \frac{K_b}{k_S} + \phi \frac{k_S}{k_L}} \end{aligned}$$

$$R = \frac{\phi^2 k_s}{1 - \phi - \frac{K_b}{k_s} + \phi \frac{k_s}{k_L}}$$

である。(8), (9) の rot をとり $\Omega_S = \text{rot } \mathbf{u}^S$, $\Omega_L = \text{rot } \mathbf{u}^L$ と置くと

$$\begin{cases} (1 - \phi) \rho_S \ddot{\Omega}_S = N \nabla^2 \Omega_S + \frac{\eta \phi^2}{k_\phi} (\dot{\Omega}_L - \dot{\Omega}_S) \\ \phi \rho_L \ddot{\Omega}_L = -\frac{\eta \phi^2}{k_\phi} (\dot{\Omega}_L - \dot{\Omega}_S), \end{cases} \quad (10)$$

また (8), (9) の div をとり $e_S = \text{div } \mathbf{u}^S$, $e_L = \text{div } \mathbf{u}^L$ と置くと

$$\begin{cases} (1 - \phi) \rho_S \ddot{e}_S = P \nabla^2 e_S + Q \nabla^2 e_L + \frac{\eta \phi^2}{k_\phi} (\dot{e}_L - \dot{e}_S) \\ \phi \rho_L \ddot{e}_L = Q \nabla^2 e_S + R \nabla^2 e_L - \frac{\eta \phi^2}{k_\phi} (\dot{e}_L - \dot{e}_S) \end{cases} \quad (11)$$

を得る。

固液複合系における波動伝播の理論は Biot (1956a, b) により与えられた。Biot (1956a, b) の理論は均質な系の微小変形のみに限定されたものであったため、ここではより拡張性のある一般の枠組みを紹介し、その一つの応用例として波動を扱った。ここで得た式は Biot (1956a, b) のそれにほぼ等しいが加速度項に若干の違いがある。違いが生じた理由は II 章で与えた固体と液体の相互作用 **I** にある。II 章では相互作用 **I** として液圧からの寄与と固液の相対速度からの寄与 (粘性抵抗力) を考慮した。これらに加えて、固液の相対加速度からの寄与を考慮すると Biot (1956a, b) と全く同じ式を導くことができる。相対速度の寄与の大きさを決めるパラメータが浸透率 k_ϕ であるのに対して、相対加速度の寄与の大きさを決めるパラメータは屈曲度 (tortuosity) と呼ばれ、流路の折れ曲がりの程度を反映する。

(10)–(11) を解くことにより弾性波速度を求めることができる。固液複合系の弾性波動は一般に固体と液体の相対運動を伴い、その結果速度分散や減衰が生じる。VII 章に示すように、(10)–(11) 式を用いるとこのような分散と減衰を議論することができる。しかし、このような分散が生

じる周波数は地震波の周波数帯域 (≤ 10 Hz) に比べて十分高いため、地震波速度という観点からは (10)–(11) の低周波極限における解が特に重要となる。低周波では速度項の効果が加速度項に比して大きくなるために、結果として固液の相対運動 $\Omega_L - \Omega_S$ や $e_L - e_S$ が十分抑えられ、波の減衰も無視できる。この場合の縦波と横波の弾性波速度は、系の平均密度を $\bar{\rho} = (1 - \phi) \rho_S + \phi \rho_L$ として

$$V_P = \sqrt{\frac{K_b + \frac{4}{3}N + \frac{k_s(1 - K_b/k_s)^2}{1 - \phi - K_b/k_s + \phi k_s/k_L}}{\bar{\rho}}} \quad (12)$$

$$V_S = \sqrt{\frac{N}{\bar{\rho}}} \quad (13)$$

と求められる。低周波帯域の波動は固液の相対運動を伴わないため、浸透率や屈曲度の大きさが弾性波速度に影響しない。従って、(12)–(13) は Biot (1956a) と一致する。

IV. ポロシティとポア形状

前章で求めた弾性波速度は、スケルトンの弾性定数 K_b と N に依存する (12–13 式)。 K_b と N はポロシティのみでなくポアの形状にも大きく依存する量であり、これらを定量的に予測するために様々なポア形状を仮定したモデルが開発されてきた (例えば, Mavko *et al.*, 1998)。解析的に解いたものの中で代表的なものは, oblate spheroid (扁平回転楕円体) のポア形状を仮定したもの (図 5a), チューブ状のポア形状を仮定したもの (図 5b), 粒子状の構造を仮定したもの (図 6), 薄いクラック状のポアを仮定したもの, の 4 つが挙げられる (表 1)。粒子状モデル以外の 3 つは連続的な固体の中に流体をインクルージョンとして埋め込んだモデルである。インクルージョンモデルでは流体相の連結度が明確にモデル化されていないが、前章で求めた弾性波速度のように、固液の相対運動を伴わない現象へ適用する際には流体の連結度は問題にならない。

ここではポアの向きがランダムに分布したマ

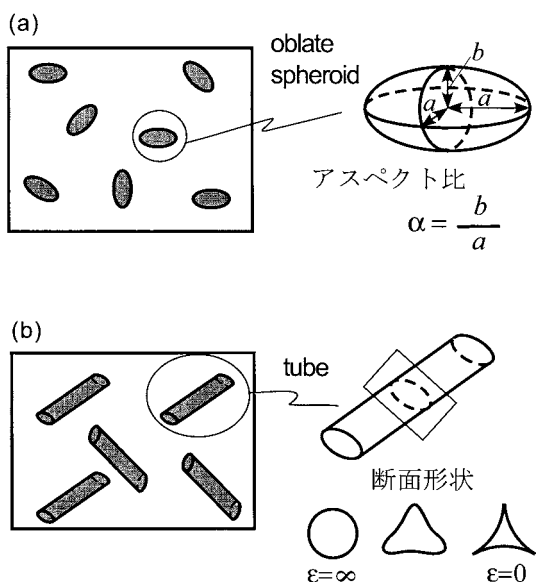


図 5 液体をインクルージョンとして含む固体のモデル。(a) Oblate spheroid モデル。(b) チューブモデル。

Fig. 5 (a) Oblate spheroid model. (b) Tube model.

クロに異方性のない系のみを考える。 K_b と N は, oblate spheroid モデルではポロシティ ϕ と oblate spheroid のアスペクト比 α ($=$ 短径/長径, 無次元) の関数として, チューブモデルでは ϕ と チューブの断面形状を表すパラメータ ε (無次元) の関数として, 粒子状モデルではコンティグイティ φ (無次元) の関数として, クラックモデルではクラック密度パラメータ κ (無次元) の関数としてそれぞれ与えられる。コンティグイティの φ 定義は, 各固体粒子がその全表面積のうちのどれくらいの割合で周囲の粒子と接触しているかにより与えられる。 $\varphi = 0$ は粒子の結合が全くない状態 (固体粒子が液体中に分散したサスペンションの状態) に, $\varphi = 1$ はボアが全くない状態に対応する。クラック密度パラメータ κ の定義は, 円形クラックの半径を a (m), 数密度を n (個/ m^3) とすると, $\kappa = na^3$ で与えられる。一つのクラックが応力開放する領域の体積が $\sim a^3$ であるので, κ の物理的な意味はクラックにより応力開放される体積の割合と考えることが

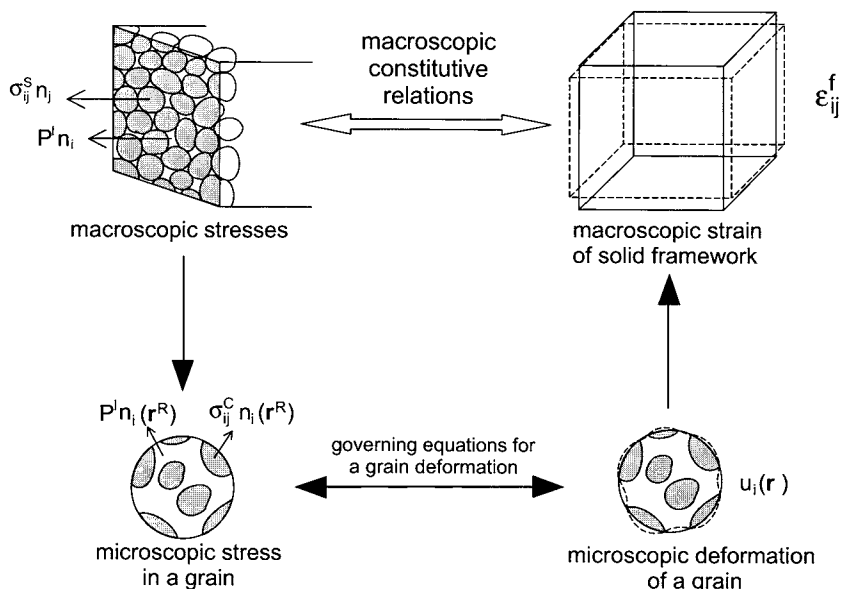


図 6 粒子状物質のマクロな構成則の導出。マクロな応力下で集合体の各粒子の表面に加わる力を考えて粒子の変形を解き, これに基づいて固体フレームワークのマクロな変形を求める。

Fig. 6 Derivation of constitutive relation for a granular material.

表 1 固液複合系のモデル。

Table 1 Mechanical models for solid-liquid composites.

モデル	構造のパラメータ（無次元）	文献
Oblate spheroid	ポロシティ ϕ , アスペクト比 α	e.g., <i>Berryman</i> [1980]*
チューブ	ポロシティ ϕ , チューブ形状 ε	<i>Mavko</i> [1980]
粒子状 (平衡構造)	コンティグイティ φ (ポロシティ ϕ , ぬれ角 θ)	<i>Takei</i> [1998] "
クラック	クラック密度パラメータ κ	<i>O'Connell and Budiansky</i> [1974]

*: それ以前の文献のタイプエラーが訂正されている

できる。Oblate spheroid モデルとクラックモデルは独立に開発されたが、oblate spheroid モデルにおいてアスペクト比 α の小さい極限をとると K_b と N がクラック密度パラメータ $\kappa = 3\phi / (4\pi\alpha)$ のみの関数となり、二つのモデルが等価になることが示されている (Walsh, 1969)。従ってクラックモデルは oblate spheroid モデルの一部と考えて良い。

粒子状物質の K_b と N をポロシティに結び付けるには、コンティグイティ φ をポロシティ ϕ に関係付けるモデルが必要になる。土質の分野などでは、媒質を弾性球の集合体としてモデル化し、 ϕ と φ を有効封圧によるコンタクト部の弾性変形から求めることがしばしば行われる (例えば, *Duffy and Mindlin*, 1957)。しかし数 100°C 以上の高温の系では、このような弾性的なモデルは現実的でない。地殻深部や上部マントルの系では、鉱物単結晶が各固体粒子に対応するので (dry な) 粒界の面積がコンティグイティを決める。この時、粒界のエネルギーが固液界面のエネルギーに比べて小さい系では、粒界面積を大きくすることで系の全界面エネルギーを小さくしようとする作用が働く。系の全界面エネルギーが最小になる時の構造を平衡構造と呼ぶが、高温の系では系を平衡構造へと近づけるための溶解・拡散・析出過程が十分早く起こるため、このような平衡構造が比較的容易に実現する。固液界面エネルギー γ_{sl} と粒界エネルギー γ_{ss} の相対的な大きさは、平衡構造において二つの固液界面がなす二面角 θ を測定することにより、 $\gamma_{ss}/\gamma_{sl} = 2 \cos(\theta/2)$ と求められる (図 7a)。 θ の大きさは液相による粒界のぬ

れの程度に対応するため、 θ はぬれ角ともよばれる。液体の体積分率 ϕ とぬれ角 θ を与えると平衡構造を理論的に計算することができ (例えば, *von Bargen and Waff*, 1986), コンティグイティを ϕ と θ の関数として求めることができる (図 7b)。この関係を用いると、平衡構造にあるときの K_b と N は ϕ と θ の関数として求められる (これを、平衡構造モデルとよぶ)。一般に岩石+メルトの系はぬれ角が 20–40 位の値をもち、岩石+水の系は 40–100 位の値を持つ (*Holness*, 1997)。ぬれ角が 60 以下の系では、流体は ϕ によらず 3 次元的につながったネットワークを形成する。チューブモデルも平衡構造をイメージして開発されたモデルであるが、実験的に測定されるぬれ角 θ とモデルパラメータ ε を定量的に対応付けることはできない。

以上のようなモデル化により固液複合系はポロシティ ϕ とポア形状 $x (= \alpha, \varepsilon, \text{または } \theta)$ の二つの変数により記述される。ここで重要なのは、ポロシティとポア形状は異なる物理により支配されているということである。例えば平衡構造にある系では、ぬれ角は系の温度、圧力、化学組成などの熱力学的条件で決定されるが、ポロシティは流体の流れ出しや流れ込みなどの力学的要因によっても変化する。あるいは、一定体積の水を含む岩石の変形実験を行った場合には、ポロシティは一定であるがポア形状は破壊などにより変化する。従って、ポロシティもポア形状も未知であるような地球内部の固液複合系では、弾性波速度の観測からポロシティとポア形状を独立に求めることにより、対象とする系の置かれている力学

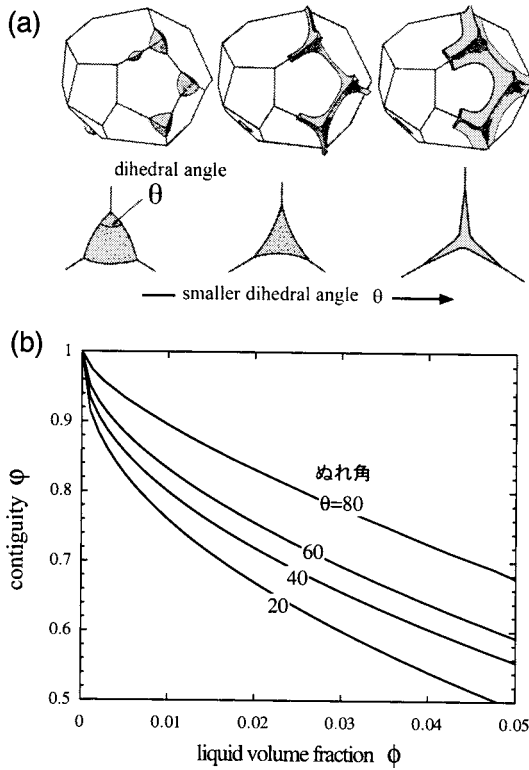


図 7 (a) 系の界面エネルギーを最小にする流体ポア形状 (平衡構造). (b) 平衡構造にある系のコンティグイティ. ぬれ角 θ が小さいほど液体が粒界をよくぬらし (図 7a), コンティグイティが小さくなる (図 7b),

Fig. 7 (a) Equilibrium geometry of liquid phase characterized by dihedral angle θ . (b) Contiguity versus liquid volume fraction for various dihedral angles.

的状态について貴重な情報を引き出すことができるのである。

ポア形状を表すパラメータはモデル毎に定義が異なるため系統的に扱うのが難しいが、以下に述べる等価アスペクト比の概念を用いるとポア形状を系統的に扱うことができる。ポロシティ ϕ が比較的小さい範囲では、 K_b と N は

$$\begin{aligned} \left| \frac{K_b}{k_s}(\phi, x) \right| &= 1 - \phi \Lambda_{K_b}(x) \\ \left| \frac{N}{\mu}(\phi, x) \right| &= 1 - \phi \Lambda_N(x) \end{aligned} \quad (x = \alpha, \varepsilon, \theta) \quad (14)$$

という ϕ の一次関数によってよく近似でき (μ は固体本来の剛性率), その比例係数 Λ_{K_b} と Λ_N はポア形状 x によって大きく変わる (図 8)。すなわち、 K_b と N に対するポロシティとポア形状の影響は (14) 式のように単純に分離することができ、あるポア形状は力学的には Λ_{K_b} と Λ_N という二つの量のみで特徴付けられている。このことは、チューブモデルまたは平衡構造モデルのある $x (= \varepsilon, \theta)$ の値における Λ_{K_b} と Λ_N を、oblate spheroid モデルのアスペクト比 α における Λ_{K_b} と Λ_N と比較した時に、

$$\begin{aligned} \Lambda_{K_b}(x) &\simeq \Lambda_{K_b}(\alpha) \\ \Lambda_N(x) &\simeq \Lambda_N(\alpha) \end{aligned} \quad (x = \varepsilon, \theta) \quad (15)$$

を満足するならば、もとのモデルとこのアスペクト比の oblate spheroid モデルとは常に等しい K_b と N を与えるということを意味している。二つのモデルが K_b と N に関して等価であれば、(12)–(13) を用いて計算される V_P と V_S についても常に等価である。(15) 式を満たす α を x の等価アスペクト比と呼ぶ。等価アスペクト比を用いた 4 つのモデルの関係を図 9a に示す。黒と白のシンボルはそれぞれ Λ_{K_b} と Λ_N から求めた等価アスペクト比を示すが、両者の差は小さいので等価アスペクト比がほぼ一つの値に決定できることが分かる。図 9a から、例えばチューブモデルの $\varepsilon = 0$ と平衡形状の $\theta = 30^\circ$ と oblate spheroid モデルの $\alpha = 0.1$ は等価なモデルであることが分かる。等価アスペクト比を用いることでポア形状の効果を系統的に取り扱うことができる。

(14) 式で定義される Λ_{K_b} と Λ_N は、厳密には固体物質本来のポアソン比 ν にも依存する。図 8 と図 9a に示した結果は、 $\nu = 0.25$ として計算した結果である。 ν が増大すると Λ_{K_b} は増大し Λ_N は逆にわずかに減少する傾向がある (例えば、Takei, 1998 の図 4 参照)。この傾向はここに挙げた全てのモデルについて同様に見られるため、等価アスペクト比は ν によらないとしてよい。

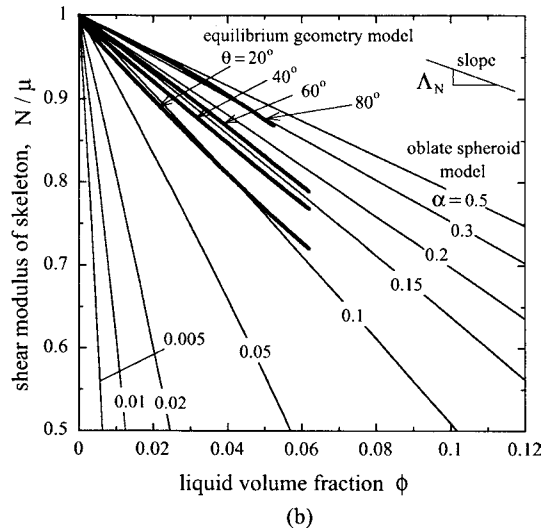
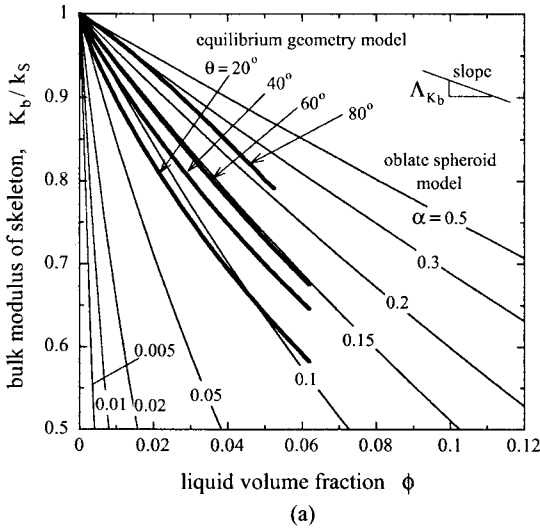


図 8 スケルトンの (a) 体積弾性率 K_b 及び (b) 剛性率 N とポロシティの関係。実線は oblate spheroid モデル (α はアスペクト比), 太線は平衡構造モデル (θ はぬれ角). K_b と N はポロシティにはほぼ比例して減少し, その傾き Λ_{K_b} と Λ_N はポア形状に大きく依存する。

Fig. 8 (a) Bulk and (b) shear moduli of solid skeleton versus porosity. α is aspect ratio and θ is dihedral angle.

V. 固液複合系の弾性波速度

液体ポアを含む媒質の弾性波速度については、従来から様々な研究がある。特に、液体の圧縮率が V_P/V_S 比に大きく影響することは良く知られている。すなわち、液体ポアはせん断応力を支えないために V_S が低下するが、圧縮率の小さい液体で満たされていれば圧力は支えるので V_P はあまり低下せず、 V_P/V_S 比が増加するのである。しかし、液体の圧縮率だけでなく、ポア形状も V_P/V_S 比に大きく影響することはあまり知られていない。O'Connell and Budiansky (1974) は、ポアが液体で満たされていない時は V_P/V_S 比は低下するが、水で満たされると V_P/V_S 比が増大することを示した。一方、Watanabe (1993) はポアが水で満たされた時は V_P/V_S 比が低下するがメルト（水より圧縮率が小さい）で満たされた時は V_P/V_S 比が増大することを示した。ポアが水で満たされた時の V_P/V_S 比が前者の研究では増大するのに後者の研究では低下する理由は、二

つの研究が異なるポア形状を仮定しているからである。従って、ポア形状の効果を理解しないと断片的な知識しか得られない。この章では前章で導入した等価アスペクト比を用いてポア形状の効果を系統的に整理し、固液複合系の弾性波速度の全体像をまとめる。

弾性波速度に対するポア形状の影響はスケルトンの弾性率 K_b と N の中に含まれる (12-13 式) が、それは (14) 式によって具体的に表される。(14) 式を (12)-(13) に代入して ϕ の 2 次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta V_P}{V_P^0} \right| &= \left[\frac{(\beta-1)\Lambda_{K_b} + \frac{4}{3}\gamma\Lambda_N}{1 + \frac{4}{3}\gamma} - \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_S}\right) \right] \frac{\phi}{2} \\ \left| \frac{\Delta V_S}{V_S^0} \right| &= \left[\Lambda_N - \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_S}\right) \right] \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

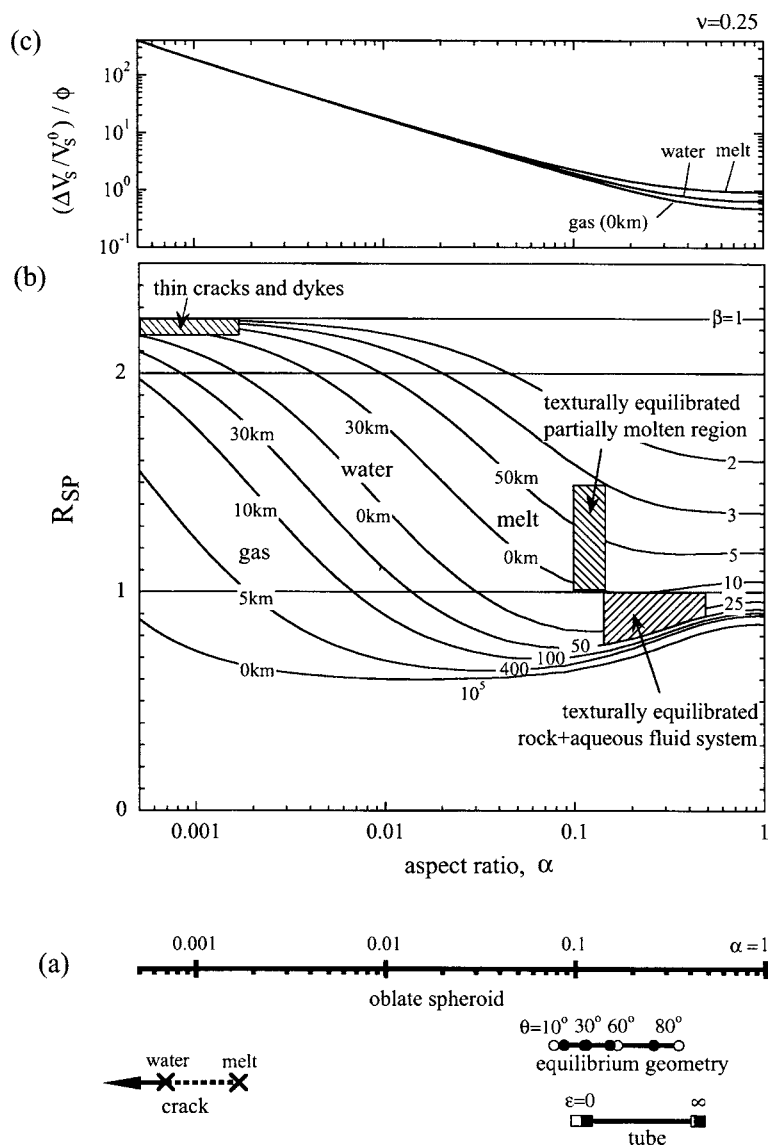


図 9 (a) 平衡構造モデル、チューブモデル、クラックモデルと oblate spheroid モデルの関係を等価アスペクト比により示したもの。黒と白のシンボルはそれぞれ Λ_{K_b} と Λ_N から求めた等価アスペクト比を示す。(b) R_{SP} (=横波速度の低下率/縦波速度の低下率) とポアのアスペクト比の関係。 $\beta = k_S/k_L$ は岩石+メルトの系で 5-10 程度、岩石+水の系で 10-40 程度、岩石+理想気体の系で深さ 50-0 km の範囲で $50-10^5$ 程度の値をとる。(c) 横波速度の低下率とポロシティ ϕ の比例係数。

Fig. 9 (a) Equivalence of equilibrium geometry model, tube model, and crack model to the oblate spheroid model is shown by the equivalent aspect ratio. Solid and open symbols show the correspondence determined from Λ_{K_b} and Λ_N , respectively. (b) R_{SP} , representing the ratio of fractional changes in V_S and V_P , versus pore aspect ratio α , for various $\beta = k_S/k_L$. (c) Proportional constant between fractional change in V_S and porosity versus pore aspect ratio.

表 2 液体の体積弾性率 k_L と β .

Table 2 Liquid bulk modulus k_L and β .

depth, km	圧力, GPa	温度, °C	k_L , GPa		
			gas	water ¹	melt ²
0	10^{-4}	20	1.3×10^{-4} ($\beta = 10^5$ - 10^6)	2.2 (18-50)	7-25 (4-10)
5	0.15	75	0.2 (200-600)	3.1 (13-40)	
10	0.3	150	0.4 (100-300)	1.8 (22-66)	
35	1	500	1.3 (30-100)	4.5 (9-25)	
70	2				20-40 (3-6)

1: Schäfer [1980] のデータを用いた。

2: Stolper et al. [1981] のデータを用いた。 $\partial k_L / \partial P = 6$ -7 を仮定。

を得る。ただし、 $V_P^0 = \sqrt{(k_s + 4\mu/3)/\rho_s}$ と $V_P^0 = \sqrt{\mu/\rho_s}$ は固体本来の弾性波速度を、 $\Delta V_P = V_P^0 - V_P$ と $\Delta V_S = V_S^0 - V_S$ は速度低下量を表す。 $\beta = k_s/k_L$ は液体の圧縮率を固体の圧縮率で規格化した無次元量である。 $\gamma = \mu/k_s$ であり、 γ は固体物質本来のポアソン比 ν に依存する。 Λ_{K_s} と Λ_N は等価アスペクト比 α の関数であるとしても一般性を失わない。(16) より、縦波の速度低下率 $\Delta V_P/V_P^0$ と横波の速度低下率 $\Delta V_S/V_S^0$ は流体の体積分率に比例し、その比例係数はポア形状や流体物性に依存することが分かる。ポア形状や流体物性の違いがこの比例係数を大きく変えるため、 $\Delta V_P/V_P^0$ と $\Delta V_S/V_S^0$ のどちらか一方の情報しかない場合は、ポア形状 ($\Delta V_P/V_P^0$ では流体物性も) が既知でない限り媒質中の流体の体積分率を決定することはできない。ここでは、 $\Delta V_P/V_P^0$ と $\Delta V_S/V_S^0$ の両方が分かっている場合を考え、これらの情報から流体の体積分率、ポア形状、流体物性についてどのような制約条件が得られるかを明らかにする。

まず、縦波の速度低下率と横波の速度低下率の比を表すパラメータ R_{SP} を導入する。(16) より

$$R_{SP} = \frac{\Delta V_S/V_S^0}{\Delta V_P/V_P^0} = \frac{\Lambda_N - \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_S}\right)}{\frac{(\beta-1)\Lambda_{K_s} + \frac{4}{3}\gamma\Lambda_N}{1 + \frac{4}{3}\gamma} - \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_S}\right)} \quad (17)$$

となり、 R_{SP} は ϕ に依存せず α と β に依存することが分かる。 $R_{SP} < 1$ のときは縦波の低下率が横波の低下率よりも大きいので、 V_P/V_S 比は低下する。 $R_{SP} > 1$ のときは横波の低下率が縦波より大きいので、 V_P/V_S 比は増大する。このように R_{SP} は V_P/V_S 比と密接に関連する量であるが、 R_{SP} は ϕ に依存しないため α と β の効果を調べるには V_P/V_S 比より見通しが良い。文献によっては $\Delta V_{P,S}/V_{P,S}^0$ を $-d\ln V_{P,S}$ と書き、 R_{SP} を $d\ln V_S/d\ln V_P$ と書くことがある。

図 9b に R_{SP} とポア形状 α の関係をいろいろな β について示す。 β は岩石+メルトの系で 5-10 程度、岩石+水の系で 10-40 程度、岩石+理想気体の系で深さ 50-0 km の範囲で 50 - 10^5 程度の値をとる (表 2)。 ρ_L/ρ_S の値はメルトが 0.92、水が 0.33、気体が 0 としたが、 ρ_L/ρ_S の R_{SP} へ

の影響は小さく、 $\rho_L/\rho_S = 1$ と近似しても実用上問題ない (Takei, 2002, 図4 参照)。図9bでポア形状 (等価アスペクト比) α を固定して見ると、 β が小さいほど (つまり液体の圧縮率が小さいほど) R_{SP} が大きいことが確認できる。また、 β が一定であってもポア形状の違いによって R_{SP} が大きく変わることも確認できる。例えば $\beta = 25$ の線に注目すると、アスペクト比が比較的大きい (> 0.03) 範囲では R_{SP} は1より小さいが、 $\alpha < 0.03$ では $R_{SP} > 1$ であり、非常に薄いポア ($\alpha < 0.0016$) では R_{SP} が2以上の大きな値を持つ。 $\beta = 25$ は岩石+水系に相当する。この章の始めに挙げた例で、岩石+水系の V_P/V_S 比が Watanabe (1993) では減少し O'Connell and Budiansky (1974) では増大したが、これは前者が $\alpha \sim 0.1$ 、後者が $\alpha \sim 0.001$ のポア形状を仮定したためである。以上のように流体の圧縮率とポア形状は R_{SP} に対して相対的な役割を果たすのである。

$\Delta V_P/V_P^0$ と $\Delta V_S/V_S^0$ が観測や実験などから得られた場合、まずこれらの比をとった R_{SP} を計算する。存在する流体が何であるかが他の情報から推測できる場合は、 R_{SP} の値から図9bを用いて等価アスペクト比を求めることができる。流体が分からない場合は流体を仮定した上での等価アスペクト比が求まることになる。図9cに横波の速度低下率と ϕ の比例係数 ((16) の第2式) を示す。求まった等価アスペクト比に対応する比例係数をこの図から読み取れば、 $\Delta V_S/V_S^0$ の値を用いて ϕ が決定できる。図9b, cの二つの図は、固液複合系の弾性波速度に対する流体物性、ポア形状、流体の体積分率の効果の全体像をまとめた図であるとともに、弾性波速度データの逆解析によりこれらの情報をどの程度知り得るかを具体的に示す図である。

O'Connell and Budiansky (1974) は $\alpha \sim 0.001$ 程度のクラック状のポアを仮定し、観測される様々な R_{SP} の値を水によるクラックの飽和度の違いで解釈することを提案した。水で満たされたクラックは2以上の大きな R_{SP} を与える。一方、ごく浅い領域ならば、空気で満たされたクラック

は1より小さい R_{SP} を与える。従って二種類のポアの比率を様々に変えることで、中間的な値の R_{SP} を容易に説明できる。しかし、このような解釈はごく浅い所以以外には使えない。理想気体の圧縮率は圧力に反比例するので、深い所では理想気体の圧縮性も水のそれに近づく。地殻深部や上部マントルの低速度域の R_{SP} を説明するには、上述のようにポア形状も変数として考えることが重要になる。

図9b, cは ϕ について線形化した近似式 (14), (16), (17) に基づいている。速度低下率と R_{SP} を (12), (13) 式から直接計算して近似式の結果と比べることにより、これらの図を精度良く適用できる範囲を求めると、平衡構造モデルでは $\Delta V_S/V_S^0 \leq 0.35$ の範囲で、これは $\phi \leq 0.15$ に相当する。また、oblate spheroid, チューブ, 及びクラックモデルでは $\Delta V_S/V_S^0 \leq 0.2$ の範囲である。平衡構造モデルの適用範囲が広いのは、(14) 式と (16) 式で無視されている ϕ^2 以上の効果が互いに打ち消し合うことによる。一方、oblate spheroid, チューブ, 及びクラックモデルでは (14) 式の成立する範囲が広い (図8) ので、簡単な補正を行えばこれより大きな速度低下についても図9b-cを使用できる (具体的な補正の方法については Takei (2002) の付録Bを参照)。

VI. 地震波トモグラフィへの応用

前章では弾性波速度データの解析法を原理的な側面から議論した。この章ではその地球科学的意義や重要性を議論する。

V_P と V_S のデータから求められるポア形状の情報は等価アスペクト比のみであり、実際の形が oblate spheroid であるかチューブであるかは原理的に区別できない。このように解釈が一意でないものから適切な解釈を引き出して系の真の姿に迫るためには、地球内部で実現し得るポア形状を実験や理論により調べてその等価アスペクト比を求めるというフォーワードアプローチを積み上げることが重要になる。地球内部で実現し得るポア形状について、現状ではぬれ角により決まる平衡構造 (図7a) と薄いクラックやダイク状という

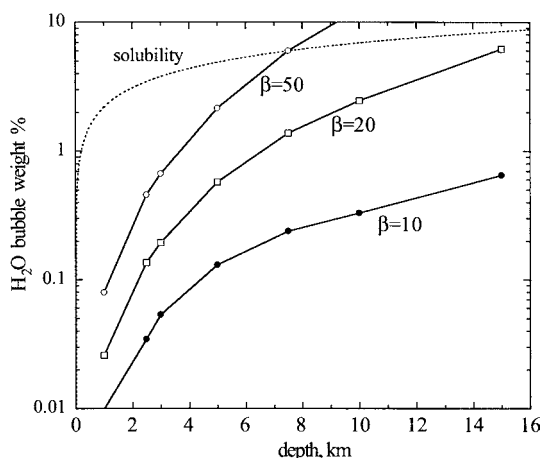


図 10 各深さにおいて、岩石＋メルトの系の $\beta = k_S/k_L$ が 10, 20, 50 となる時のメルト中の気泡の重量%。気泡は H_2O からなるとする。参考としてメルト中の水の溶解度 ($w\%$) を点線で示す。

Fig. 10 At various depths, the amount of H_2O bubbles in melt required to obtain $\beta = 10, 20$, and 50 is shown by weight %.

2つの可能性が実験やフィールド観察から提案されている。平衡構造における流体の通路は鉱物粒子サイズの微小なものであるためその浸透率は小さい。特に地殻の岩石＋水系は一般にぬれ角が 60° より大きく、ポアが孤立して浸透率が 0 である可能性もある。一方、ダイクやクラックは大きなスケールで発達し得るのでその浸透率は平衡構造に比べて何桁も大きい可能性がある。従って、実際の地球内部でどちらの構造が実現しているかということは、流体の移動速度に大きな影響を与える。また構造平衡が成立しているかどうかということは、差応力や変形の程度、流体の起源などにも重要な示唆を与える。平衡構造とクラックやダイクでは等価アスペクト比が 2 桁程度異なり得る (図 9a) ので、対応する R_{SP} の値は、岩石＋水系では前者が 1 以下で後者が 2 以上、岩石＋メルト系では前者が 1-1.5 で後者が 2 以上と大きく異なり得る (図 9b)。従って R_{SP} によるポア形状の推定は、流体の移動様式やテクトニクスを考える上での重要な制約条件になるのである。

Nakajima *et al.* (2005) はマントルウエッジの低速度域の R_{SP} から深さによるポア形状の変化をとらえ、生成域では平衡構造にあるメルトが上昇に伴い薄いダイクやクラック状に変化することを報告した。

東北日本の火山直下数 km 位には、低 V_P/V_S 比の低速度域がしばしば観測される (Nakajima *et al.*, 2003)。岩石＋メルト系は一般に $\beta \leq 10$ であり、 α によらず $R_{SP} \geq 1$ が成り立つ (図 9b)。従って V_P/V_S 比の低下はメルトでは説明できないということになる。しかし表 2 や図 9b では考慮されていないが、数 km 以浅では、放出した揮発性成分 (主に水) を気泡として含むメルトが存在する可能性がある。メルトが高温 ($900-1000^\circ C$) のためこのような水は表 2 の水より圧縮率が多い。図 10 に、各深さにおいてメルトと気泡の混合物の圧縮率が $\beta = 10, 20, 50$ となるのに必要な気泡 (H_2O からなる) の量を重量% ($w\%$) で示した。計算ではメルトは水で飽和していると仮定してメルト中の H_2O 成分の効果も考慮してあるが、その寄与は大きくない。図 10 より深さ 3-4 km 程度で 0.2-0.5 $w\%$ 程度の水が放出されていると $\beta = 20$ となるが、メルトにはもともと数 $w\%$ の水が溶けていると考えられるのでこれは現実であり得る状況である (図 10 の溶解度曲線参照)。従って図 9b より、メルトポアの形によっては十分 $R_{SP} < 1$ となることが分かる。もし V_P/V_S 比の低下がメルト中の気泡の存在を示しているのであれば、より深部での水の存在度やマグマ溜まりの進化を考える上での重要な制約条件となる。ただし、地下数 km に溜まっているメルトの粘性は非常に高い可能性があり、VII 章で述べる分散の問題に注意する必要がある。

VII. 固液複合系の分散と減衰

これまでの章で弾性波の速度分散と減衰については詳しく扱わなかったが、III 章で求めた弾性波速度が適用できる周波数範囲などを明らかにする上で重要であるので、この章で簡単なまとめを行う。初めに III 章の波動方程式から得られる分散・減衰を横波を例にして紹介する。この分散は

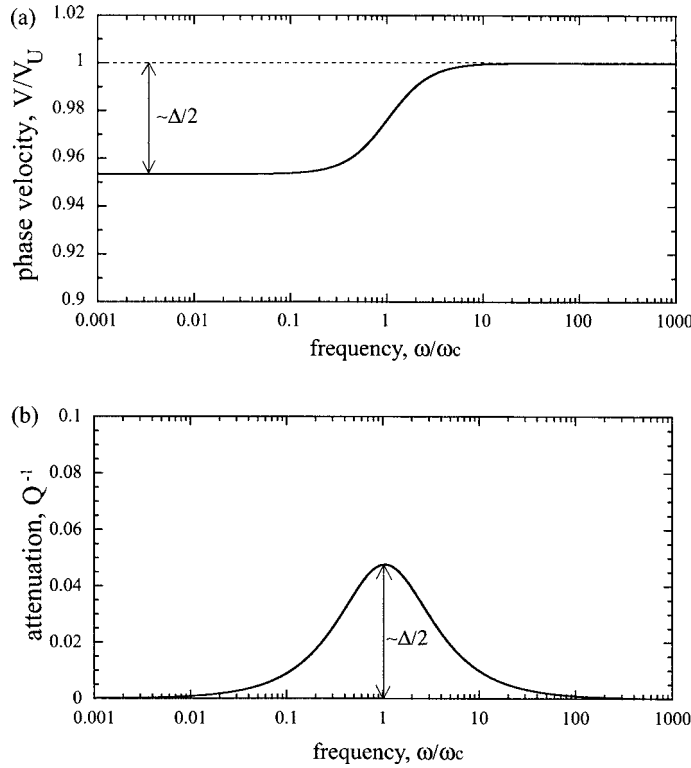


図 11 デバイ方程式が与える (a) 位相速度の周波数依存性と、
(b) 減衰の周波数依存性。

Fig. 11 Frequency dependent phase velocity (a) and Q^{-1} (b) obtained from Debye equations (19).

Biot (1956a, b) により詳しく報告されたのでここでは Biot メカニズムと呼ぶ。Biot メカニズムの特性周波数は地震波の帯域より十分高く、この現象が地震波に影響を及ぼす可能性は少ない。しかしここで得られる特徴は、他の全ての分散・減衰のメカニズムにおいて共通である。

弾性波の角周波数を ω 、波数を k とする。(10) の二つの式に $\Omega_S = \Omega_S^0 e^{-i(\omega t - kx)}$ と $\Omega_L = \Omega_L^0 e^{-i(\omega t - kx)}$ を代入して $\Omega_S^0 = \Omega_L^0 = 0$ 以外の解が存在する条件を求めると、分散関係

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 = \frac{\rho_U}{N} \cdot f(\omega) \quad (18)$$

を得る。 $f(\omega)$ は周波数に依存する複素数で、

$$f(\omega) = f_1(\omega) + if_2(\omega) \text{ とおく}$$

$$\begin{cases} f_1(\omega) = 1 + \frac{\Delta}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \\ f_2(\omega) = \frac{\Delta \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \end{cases} \quad (19)$$

と書ける。ただし $\rho_U = (1 - \phi) \rho_S$, $\rho_R = (1 - \phi) \rho_S + \phi \rho_L$, $\Delta = (\rho_R - \rho_U) / \rho_U$, $\omega_c = \eta \phi / (k_\phi \rho_L)$ である。位相速度 V と減衰 Q^{-1} は $k/\omega = V^{-1}(1 + i/(2Q))$ と与えられ、 $f_2 \ll f_1$ において

$$\left| \begin{array}{l} V = \sqrt{\frac{N}{\rho_U \cdot f_1(\omega)}} \\ Q^{-1} = \frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} \end{array} \right. \quad (20)$$

と計算できる。

図 11 に位相速度 V と減衰 Q^{-1} を規格化周波数 ω / ω_c の関数として示した。 $\omega / \omega_c = 1$ の近傍で V の周波数依存性（すなわち、分散）が生じる。この原因は、 $\omega / \omega_c \gg 1$ では液体が固体フレームワークの運動に追従できずに自らの慣性で静止しており、 $\omega / \omega_c \ll 1$ では固液界面を通した粘性カップリングが十分作用して液体が固体の運動に良く追従することによる。従って (18) 式で $\rho_U f(\omega)$ を密度と考えると理解しやすい。即ち、高周波側の密度は固体の質量のみで決まる密度 ρ_U なので $V_U = \sqrt{N/\rho_U}$ となり、低周波側の密度は液体の質量も含めた $\rho_R = \bar{\rho}$ なので $V_R = \sqrt{N/\rho_R}$ となるのである。減衰 Q^{-1} は $\omega = \omega_c$ で最大値をとり、その大きさは

$$Q_{MAX}^{-1} = \frac{\Delta}{2+\Delta} \approx \frac{\Delta}{2} \quad (21)$$

と与えられる。特性周波数 ω_c は砂岩＋水で 200 kHz ($k_\phi = 10^{-12} \text{ m}^2$, $\eta = 10^{-3} \text{ Pas}$, $\rho_L = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\phi = 0.2$) と見積もられる。一般の k_ϕ はこれより小さいと考えられるので、 ω_c は地震波の帯域より十分高周波にあるといえる。同様の分散は縦波 (11 式) にもあるが、ここでは扱わない。

(19) はデバイ方程式と呼ばれ個々のメカニズムによらず全ての分散・減衰に普遍的に現れる (Nowick and Berry, 1972)。時刻 $t \geq 0$ に一定の単位力を加えたとき、その応答 $J(t)$ が指数関数的な時間遅れを伴って

$$J(t) = J_U [1 + \Delta \cdot (1 - e^{-\omega_c t})] \cdot H(t) \quad (22)$$

と与えられる時、これを緩和現象 (relaxation) と呼ぶ。 $H(t)$ はヘビサイド関数である。 J_U を非緩和時の応答 (unrelaxed), $J_U (1 + \Delta) =$

J_R を緩和時の応答 (relaxed), Δ を緩和強度, ω_c^{-1} を緩和の時定数と呼ぶ。インパルスレスポンスは (22) を一階微分した $\dot{J} = J_U [\delta(t) + \omega_c \Delta e^{-\omega_c t} H(t)]$ であるが、 $\dot{J}/J_U$ のフーリエ変換がデバイ方程式 (19) に他ならない。即ち、デバイ方程式は (22) のような緩和現象を周波数領域で見た時に普遍的に現れる式なのである。媒質の密度や弾性定数を変化させる緩和過程が存在していると、その時定数に対応する周波数 ω_c で弾性波の分散が生じる。これより十分高周波では緩和が生じないので J_U が観測され、減衰もない。十分低周波では緩和は準静的に（平衡状態からの大きなずれを伴わずに）生じるため減衰はなく、 J_R が観測される。 $\omega = \omega_c$ 付近では非平衡下での緩和が起こり減衰が生じる。 Q_{MAX}^{-1} は緩和強度 Δ で決まる。

固液複合系には流体が原因で生じる緩和現象がある。上述した Biot メカニズムはその一つであり、密度が ρ_U から ρ_R に緩和する現象として捉えることができる。一方、固体フレームワークの弾性定数を緩和する現象に「squirt flow」がある (Mavko and Nur, 1975)。この現象の実体は、ポア間の液圧不均質が液体の粘性流動で緩和されることである。アスペクト比が 1 より小さいポアを含む媒質にせん断応力が加わると、ポアの向きにより大きさや符号の異なる液圧変化が生じる。異なるアスペクト比のポアを含む媒質であれば、等方的な応力が加わった場合でも液圧不均質を生じる。液圧不均質はポア間で液体の流れが生じると緩和されるが、これに伴って固体フレームワークの弾性歪みが増加し、弾性定数が M_U から M_R に変化する ($M_U > M_R$)。 (M は K_b または N を表す。) メカニズムから分かるように、squirt flow は体積弾性率よりも剛性率に大きく影響し、従って V_P よりも V_S に大きく影響する。II 章で紹介した理論では、液圧は平均化されたもののみを考慮し、ポア間の液圧の不均質は考慮されていない。従って、squirt flow の緩和された状態 (relaxed) を仮定したことになる。アスペクト比 α が比較的大きい範囲では、生じる液圧不均質がわずかなので緩和強度が小さく、relaxed と

unrelaxed の違いはあまり問題にはならない。しかし α が小さいところでは剛性率の緩和強度が大きいためこの仮定が成立しているかどうかが重要である。この仮定が成り立つためには、ポアが連結していて、かつ、波の周波数が squirt flow の特性周波数 $\omega_c = k_s \alpha^3 / \eta$ (O'Connell and Budiansky, 1977) に比べて低いことが必要である。 $k_s \sim 10^{10} - 10^{11}$ Pa であるので、水 ($\eta = 10^{-3}$ Pa s) やバサルトメルト ($1 - 10^3$ Pa s) ではアスペクト比 α が小さい ($< 10^{-2} - 10^{-3}$) 時に ω_c が地震波帯域に近づく。またポアの向きがランダムでない場合には、緩和時であってもせん断応力が液圧変化を伴うことがあり、 V_s に影響を与える。従って、III章で導いた V_p と V_s を α が小さい所に应用する際には、ポアの連結度、squirt flow の時定数、及びポアの向きのランダムさに注意する必要がある。

流体の圧縮率 k_L を緩和する現象もある。メルト中の気泡を圧縮するためには、メルトの粘性流動による緩和が必要である (特に、気泡が球形の場合)。図 10 に示したのはこのような緩和が十分起こった時 (relaxed) の結果である。高粘性のデイサイトメルトの場合は地震波帯域がこの時定数に近づいたり unrelaxed になったりする可能性がある (市原, 1997, 図 5.6 参照) ので注意が必要である。

VIII. おわりに

本総説では、固液複合系の弾性波速度に対する流体の体積分率、ポア形状、流体物性の影響について、主に原理的側面からまとめを行った。地震波トモグラフィーなどに应用する際の現実的な問題は詳しく扱わなかった。現実的な問題で考慮すべきこととしては、(1) ポアの向きに異方性がある場合、(2) 流体の粘性による速度分散・減衰、(3) V_p^0 と V_s^0 の推定、(4) 流体ポア以外の要因による地震波速度低下、などが挙げられる。VII章に述べたように、薄いクラックやダイク状のポアを考える場合には、(1) と (2) の可能性を念頭においたさらにきめ細かい議論が重要になる。(3) は (4) と密接に関連する。本総説で紹介し

た理論を応用する際には、固体本来の弾性波速度 V_p^0 と V_s^0 は低速度域の温度・圧力条件下で、しかも地震波の周波数帯域で推定する必要がある。高温高压下での弾性定数のデータはまだ十分ではなく、しかもほとんどが超音波帯域に限られる。上部マントルは比較的均質なため、流体が存在しないと思われる領域の地震波速度データを V_p^0 と V_s^0 の推定に用いることもできる。しかしその場合でも低速度域が周囲より高温であれば温度による低下分を考慮する必要がある、地震波帯域での温度効果の見積もりにはまだ不確定性が大きいのである。流体相について正しい情報を得るためには流体以外の要因の不確定性を減らすことが重要であり、温度効果の見積もりにも不確定性を生じている粒界すべりなどの (メルトの関与しない) 緩和過程の解明や、緩和現象への直接的な制約条件となる Q^{-1} 構造の解明などが重要になる。

謝 辞

II章で扱った内容は、東大地震研で 01-02 年度に開催された「青い地球の地震学セミナー」にて参加者全員で議論した内容が基になっている。また本総説をまとめる際に、小屋口剛博さん、中島淳一さんに有益な議論を頂いた。西澤 修さんには本総説を書くことを勧めて頂いた。この場を借りて感謝したい。

文 献

- Berryman, J.G. (1980): Long-wavelength propagation in composite elastic media 2: Ellipsoidal inclusions. *J. Acoust. Soc. Amer.*, **68**, 1820-1831.
- Biot, M.A. (1956a): Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, 1, Low-frequency range. *J. Acoust. Soc. Amer.*, **28**, 168-178.
- Biot, M.A. (1956b): Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, 2, Higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Amer.*, **28**, 179-191.
- Drew, D.A. (1983): Mathematical modeling of two-phase flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15**, 261-291.
- Duffy, J. and Mindlin, R.D. (1957): Stress-strain relations and vibrations of a granular medium. *J. Appl. Mech.*, **24**, 585-593.
- Holness, M.B. (1997): Surface chemical controls on pore-fluid connectivity in texturally equilibrated materials. Jamtveit, B. and Yardley, B. eds.: *Fluid Flow and Transport in Rocks*. Chapman and Hall, 149-169.
- Ichihara, M. (1997): 気泡を含む粘弾性流体の力学：マグマのダイナミクスへの応用。東京大学博士論文。

- Kuster, G.T. and Toksöz, M.N. (1974): Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media, 1, Theoretical formulations. *Geophysics*, **39**, 587–606.
- McKenzie, D. (1984): The generation and compaction of partially molten rock. *J. Petrol.*, **25**, 713–765.
- Mavko, G.M. (1980): Velocity and attenuation in partially molten rocks. *J. Geophys. Res.*, **85**, 5173–5189.
- Mavko, G. M. and Nur, A. (1975): Melt squirt in the asthenosphere. *J. Geophys. Res.*, **80**, 1444–1448.
- Mavko, G., Mukerji, T. and Dvorkin, J. (1998): *The Rock Physics Handbook*. Cambridge Univ. Press, New York.
- Nakajima, J. and Hasegawa, A. (2003): Tomographic imaging of seismic velocity structure in and around the Onikobe volcanic area, northeastern Japan: Implications for fluid distribution. *J. Vol. Geotherm. Res.*, **127**, 1–18.
- Nakajima, J., Matsuzawa, T., Hasegawa, A. and Zhao, D. (2001a): Three-dimensional structure of Vp, Vs, and Vp/Vs beneath northeastern Japan: Implications for arc magmatism and fluids. *J. Geophys. Res.*, **106**, 21843–21857.
- Nakajima, J., Matsuzawa, T., Hasegawa, A. and Zhao, D. (2001b): Seismic imaging of arc magma and fluids under the central part of northeastern Japan. *Tectonophysics*, **341**, 1–17.
- Nakajima, J., Takei, Y. and Hasegawa, A. (2005): Quantitative analysis of the inclined low-velocity zone in the mantle wedge of northeastern Japan: A systematic change of melt-filled pore shape with depth and its implications for melt migration. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **234**, 59–70.
- Nowick A.S. and Berry, B.S. (1972): *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*. Academic Press, New York.
- Obara, K. (2002): Nonvolcanic deep tremor associated with subduction in Southwest Japan. *Science*, **296**, 1679–1681.
- O'Connell, R. J. and Budiansky, B. (1974): Seismic velocities in dry and saturated cracked solids. *J. Geophys. Res.*, **79**, 5412–5426.
- O'Connell, R. J. and Budiansky, B. (1977): Viscoelastic properties of fluid-saturated cracked solids. *J. Geophys. Res.*, **82**, 5719–5735.
- Ohmi, S. and Obara, K. (2002): Deep low-frequency earthquakes beneath the focal region of the Mw 6.7 2000 Western Tottori Earthquake. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, doi:10.1029/2001GL014469.
- Schäfer, K. ed. (1980): *Landolt-Börnstein Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology*. New Series IV, Volume 4, High-Pressure Properties of Matter, Springer-Verlag.
- Stolper, E., Walker, D., Hager, B.H. and Hays, J.H. (1981): Melt segregation from partially molten source regions: The importance of melt density and source region size. *J. Geophys. Res.*, **86**, 6261–6271.
- Takei, Y. (1998): Constitutive mechanical relations of solid-liquid composites in terms of grain-boundary contiguity. *J. Geophys. Res.*, **103**, 18183–18203.
- Takei, Y. (2002): Effect of pore geometry on Vp/Vs: From equilibrium geometry to crack. *J. Geophys. Res.*, **107**, doi:10.1029/2001JB000522.
- Tsumura, N., Matsumoto, S., Horiuchi, S. and Hasegawa, A. (2000): Three-dimensional attenuation structure beneath the northeastern Japan arc estimated from spectra of small earthquakes. *Tectonophysics*, **319**, 241–260.
- von Barga, N. and Waff, H.S. (1986): Permeabilities, interfacial areas and curvatures of partially molten systems: Results of numerical computations of equilibrium microstructures. *J. Geophys. Res.*, **91**, 9261–9276.
- Walsh, J. B. (1969): New analysis of attenuation in partially melted rock. *J. Geophys. Res.*, **74**, 4333–4337.
- Wang, H.F. (2000): *Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology*. Princeton University Press.
- Watanabe, T. (1993): Effects of water and melt on seismic velocities and their application to characterization of seismic reflectors. *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 2933–2936.

(2005 年 8 月 3 日受付, 2005 年 11 月 18 日受理)