分布定数回路における方べきの定理の役割

信号処理研究分野　永井　信夫

１チップにおよそ１億個のトランジスタを持つ IC も実現されようとしていて，このような微小な回路素子の実現には量子力学の応用が必要と考えられる．われわれは新しい機能素子の実現を目指していて，量子力学の見方が従来の物理学の視点ではなく，分布定数回路理論の観点からの見直しを試みている．本文では，分布定数回路におけるエネルギーの特徴となる有効電力と幾何学の「方べきの定理」との関係を示す．

1　まえがき

情報エレクトロニクス関係の科学技術は留まることなく発展しているが，それは産業の米と言われる集積回路（IC）技術の高度の進歩に負うところが多いと考えられる．極く近い将来には，およそ $1\mathrm{cm}^2$ の１チップの中におよそ１億個のトランジスタを持つ IC も実現されようとしていて，このような微小な回路素子の実現には量子力学の応用が必要になると考えられている．

われわれの研究の目的は，新しい機能素子を見出すことを目指していて，量子力学の見方が従来の物理学の視点ではなく，量子力学を分布定数回路理論の観点から見直しを試みている．(1)

2　分布定数回路と方べきの定理

電気回路といえば，コイルやコンデンサのように大きさがなく一点に集中していると考える回路素子を用いる集中定数回路を思い浮かべるのが普通であるが，われわれは大きさがある「線路」を回路素子とする「分布定数回路」を用いている．

分布定数回路理論は，信号を遠方に伝える「伝送回路」から生まれたもので，電信方程式や波動方程式を工学に応用することに成功し，また，通信工学では欠かすことのできないフィルタを生み出す基になった．すなわち，波動が伝送されるという流れに基づいて理論化されたと言う特長があり，物理学や数学における主として定常状態の取扱いとは異なり，過渡応答や非定常応答の取扱いを容易にできる波動行列や散乱行列を生み出している．

それでは，分布定数回路を表す特長は何であろう．それは，幾何学の「方べきの定理」に示されるものであると考えられる．本文では，この関係が分布定数回路ではキルヒホッフの法則に代わる重要な原理となることを示す．

3　単位素子上の電圧と電流

無損失分布定数線路を回路素子として用いるとき，「単位素子」と呼ぶことにしておく．ここでは最も簡単な分布定数回路を考えることにして，１個の単位素子のみを用いた図１に示す回路について考えることにしよう．ここに，単位素子の特性抵抗は R_0 とし，電圧源の電圧はフェーザ表示で，

$$e(t) = E_G e^{j\omega t} \tag{1}$$

と表され，電源の内部抵抗は R_G，負荷の抵抗は R_R で与えられるものとする．

図１に示す回路の単位素子上の電圧 $V(x)$ および電流 $I(x)$ は次のように表される．

$$V(x) = K_a \exp(-j\beta x) + K_b \exp(j\beta x) \tag{2a}$$

$$I(x) = \frac{K_a}{R_0}\exp(-j\beta x) - \frac{K_b}{R_0}\exp(j\beta x) \tag{2b}$$

$$\left|\frac{K_b}{K_a}\right| \leqq 1 \tag{2c}$$

式（2）の電圧 $V(x)$ および電流 $I(x)$ を $\sqrt{R_0}$ で正規化するために，次のように表そう．

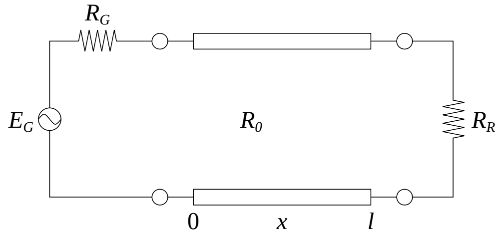

図１　無損失均一分布定数線路を回路素子として用いた回路

$$\frac{K_a}{\sqrt{R_0}} = K_1,\ \frac{K_b}{\sqrt{R_0}} = K_2 \tag{3}$$

そうすれば，正規化された電圧 $V_N(x)$，電流 $I_N(x)$ は次のように表される．

$$V_N(x) = \frac{V(x)}{\sqrt{R_0}}\exp(j\beta x) = K_1 + K_2\exp(j2\beta x) \tag{4a}$$

$$I_N(x) = \sqrt{R_0}\, I(x)\exp(j\beta x) = K_1 - K_2\exp(j2\beta x) \tag{4b}$$

単位素子上の電力は $V_N(x)$ と $I_N(x)$ を用いて，次のように表される．

複素電力： $V_N{}^*(x)I_N(x)$ (5a)

皮相電力： $|V_N(x)|\,|I_N(x)|$ (5b)

有効電力： $Re[V_N{}^*(x)I_N(x)]$ (5c)

無効電力： $Im[V_N{}^*(x)I_N(x)]$ (5d)

ここに，$V_N{}^*(x)$ は $V_N(x)$ の共役複素数を表し，Re は複素数の実部，Im は虚部を示す．

ここで，式（4）の電圧と電流を用いて，方べきの定理との関係を図 2 で考えてみよう．

式（5）における K_1 は複素数であるからベクトルと考え，図 2 におけるベクトル PO としよう．すなわち，

$K_1 = PO$ (6a)

$\exp(j2\beta x)$ は単位ベクトルが反時計方向に回ることを示しているから，

$K_2\exp(j2\beta x) = OA$ (6b)

とするなら，ベクトル OB を

$OB = -K_2\exp(j2\beta x)$ (6c)

と表すことができる．したがって，

$V_N(x) = PA$ (7a)

$I_N(x) = PB$ (7b)

と表すことができる．

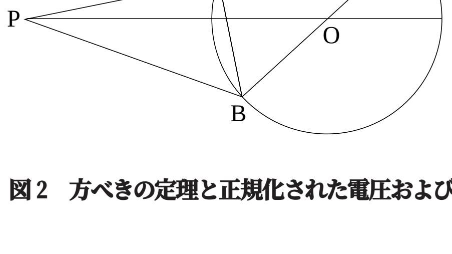

図 2　方べきの定理と正規化された電圧および電流

このように正規化された電圧 $V_N(x)$ が点 P と円周上の点 A あるいは C までのベクトルを表すのであるから，そのベクトルは $V_N(x)$ が定在波となっていることを表し，点 x の位置により電圧の大きさが異なることを示している．ところで，正規化された電圧 $V_N(x)$ はベクトル PA であり，正規化された電流 $I_N(x)$ はベクトル PB であるから，単位素子上には電力が蓄えられていると考えられる．そのとき，ベクトル PA とベクトル PB が PA_0 と PB_0 に等しくないときは二つのベクトルの位相が異なるため，その積は皮相電力となる．皮相電力は有効電力と無効電力とに分けられるが，それは電流を電圧の同相成分と直交成分とに分けることによって得られる．すなわち，正規化された電流 $I_N(x)$ を表すベクトル PB をベクトル PC とベクトル CB とに分けることにより，その複素電力を有効電力と無効電力に分け，次のようにベクトル長の積で求められる．

有効電力： $|PA|\cdot|PC|$ (8a)

無効電力： $|PA|\cdot|CB|$ (8b)

方べきの定理によって，点 P からの直線と円との交点 C および A への長さの積が一定なことは，式（8a）によって単位素子に蓄えられる有効電力が一定となることを示していて，これを分布定数回路の原理とできることを示している．そこで，念のため式（2）を用いて有効電力を求めてみると，

$$Re[V^*(x)I(x)] = \frac{|K_a|^2}{R_0} - \frac{|K_b|^2}{R_0} = |K_1|^2 - |K_2|^2 \tag{9}$$

となり，単位素子の上では一定の値になっている．

この原理は分布定数回路の極めて有効なことを示すものである．将来，物理学の究極の理論として，粒子の理論から超ひも理論に移るとき，回路理論がその一翼を担うときがあれば，この原理が有効になるときであろう．

[参考文献]

(1) 永井信夫 “講義シリーズ　量子力学と信号処理”, Journal of Signal Processing（信号処理）, Jan. 1998 から連載.