

Maxwell's Approach on Coulomb's Inverse-Square Law クーロンの逆2乗則に関するマクスウェルの実験

Yasushi Kondo

Department of Physics

and

Masayoshi Kiguchi

RIST

Kinki University

3-4-1 Kowakae, Higashi-Osaka, Osaka, Japan

(Received January 23, 2012)

Abstract

Maxwell theoretically established *electromagnetism* by *Treatise on Electricity & Magnetism*. Since this book is not read nowadays, not a few people do not know that experimental discussions are important in this book. Especially, Maxwell verified various *laws* with precise experiments. We believe that Maxwell should be considered *Physics is based on experiments*. We discuss on Maxwell's experiments that proved Coulomb's inverse-square law.

今日の電磁気学を理論的に確立したと考えられるのはマクスウェルの *Treatise on Electricity & Magnetism* である。この本は今日ほとんど読まれることがないために、実験に関する記述も多いことは忘れられている。特に精密実験による様々な法則の検証に注意を払っているのは、マクスウェルが物理学を実験科学と考えていた証拠である。ここでは、クーロンの逆2乗則に関するマクスウェルの精密実験について考えよう。

key words: physics education, general education, coulomb's inverse-square law.

1 序論

クーロンの法則として知られる電荷間に働く力に関する「距離の逆2乗則」はアインシュタインの $E = mc^2$ やニュートンの万有引力の法則とともに誰もが知っている物理法則の筆頭であろう。高校教科書、たとえば啓林館の物理学II(平成20年度用)のページ77に

クーロンは、図7のような装置を使って、2つの小さな帯電体の間に働く力の大きさを測定し、次の結果を得た。

という記述がある。次ページにクーロンのねじればかりの図を再録する。高校教科書の図はこの図を模式化したものである。

この法則はあまりにも有名であるので、実は「この実験を精度よく実施することは難しい」ことはあまり知られていない。霜田によれば、1785年のクーロンによる実験では、せいぜい距離が遠くなれば力は弱くなり、その減少の割合は距離の逆数よりも大きい程度であることがわかっただけだった[1]。最近の研究では、そこまで悪くないが測定によって決定できた冪は1.6から1.8程度であったと推定されている[2]。ジョン・ロビンソンも著書の中で逆2乗則の検証実験に触れているが、その冪は-2.06である[3]。いずれにせよクーロンは「世界はかくあるべし」の立場をとり、実験的検証は矛盾しなければ良いと考えていたようである。

クーロンのこのような態度はあながち間違っていたとは考えられないし、貧しい実験技術にも関

わらず本質を見抜いたとも考えることができる。今日でも実験結果の説明ばかり行い、予想を行うことができない理論家もいる。そのような理論家はある意味で信頼できないし、「世界はかくあるべし」というビジョンを持って理論を構築する理論家の方が信頼できる。

マクスウェルはクーロンとは異なった態度でこの「逆2乗則」に取り組んでいる。逆2乗則を直接検証するのではなく、その法則から導かれるべき現象を調べることによって非常に精密に逆2乗則を検証した。マクスウェルのこのアプローチは彼が「物理学は自然を理解する学問である」、言い換えると「物理学は実験科学である」と考えていたことを意味している。

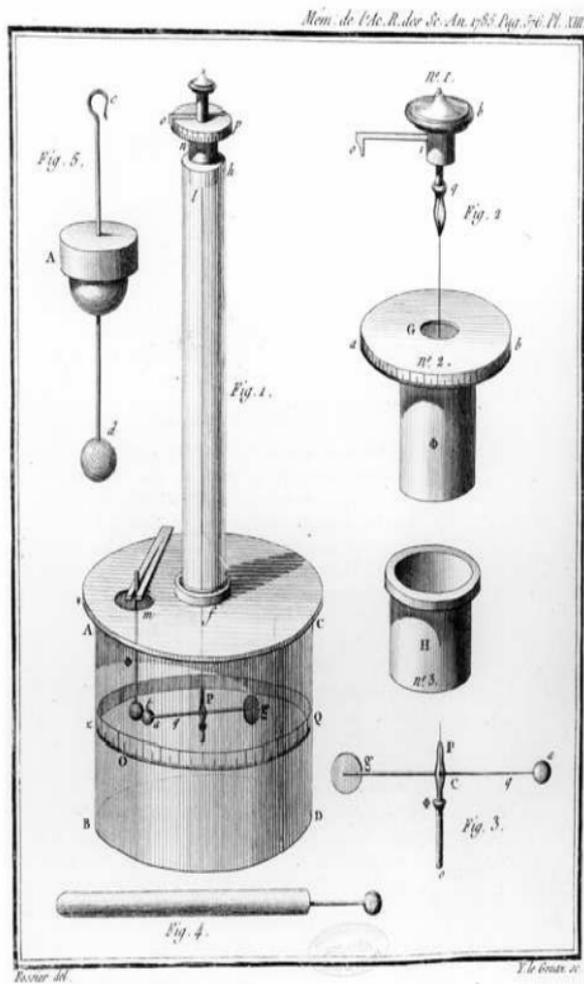


図1：クーロンのねじればかり。参照文献 [2] より再録した。

第2章ではマクスウェルの実験と理論の詳細を紹介する。第3章ではマクスウェルの理論の確認

を行う。第4章では逆2乗則の検証の現状について触れる。まとめでは物理教育での実験のありかたについて議論する。

2 マクスウェルによる「クーロンの逆2乗則」の検証

以下にクーロンの逆2乗則に関するマクスウェルの記述を再録する。

逆二乗則の証明について

74a.]¹ 帯電した物体間の力が距離の平方に逆比例するという事実は捻り秤によるクーロンの直接実験により確立されたと考えてもよい。しかしながら、捻りばかりの実験から導くことができる結果は少なからず誤差の影響を受けており、また実験者の技能が低ければ、捻り秤の実験の誤差は大きいと考えなくてはならない。

はるかに正確な力の法則の検証を 32 節 (実験 VII) で記述されたものとよく似た実験により行うことができる。

電気に関する未発表の仕事の中で、キャベンディッシュがクーロンの逆2乗則の検証を行っていることが知られている。

彼は絶縁された支持台の上に球を固定し、軸に蝶番止めされた2つの木の枠にガラス棒によって2つの半球を固定して、枠が合わされたとき、半球が中の球と中心を同じくする絶縁された球殻を形成するようにした。

そのとき球は短い導線を使って球殻と結ばれていた²。導線には絹の糸が結びつけられていて、装置の帯電状態を乱すことなく取り除くことができるようになっている。

最初、球が半球と結ばれた状態でライデン瓶を使って半球を帯電させた。そのポテンシャルを電位計で測定した後、ただちに絹糸を使って結合導線を取り除き、半球を取り除いて放電させた後、髓球電位計³を使って球の帯電状態を測定した。

当時(1773)、もっとも敏感な検電器と考えられていたこの電位計によっても、球には電荷が検出されなかった。

つぎにキャベンディッシュは最初半球に伝えられていた電荷のある知られた割合の電荷を球に与え、その電位を測定した。

¹ マクスウェルの Treatise on Electricity & Magnetism における章番号である。

² 訳者注：球と球殻は最初同じ電位であった。

³ 訳者注：コルクのような軽くて電気を伝えないものから作られた小球。もとは pith (植物の髓) から作られた。

こうして彼はもとの実験での球の電荷は全装置の電荷の $\frac{1}{60}$ より少なければならなかったことを見出した。もしそれよりも大きければ、電位計で検出されたはずだからである。

さらに彼は球殻の電荷の球の電荷に対する比を、斥力が2とは僅かに異なる距離の冪に反比例すると仮定して計算し、もしこの差が $\frac{1}{50}$ であったら、最初装置全体に存在した電荷の $\frac{1}{57}$ に等しい電荷が最後に球上に存在するはずであり、したがって、その電荷は検出できるはずであることを示した。

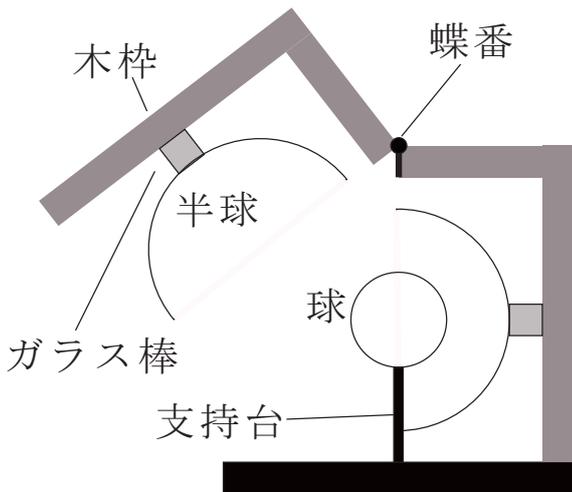
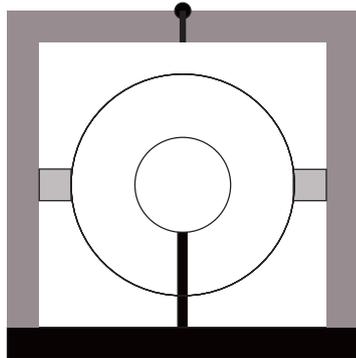


図2：マクスウェルの原著には図は存在しないが、上記の説明と理論を検討して実験に使用した装置の概念図を再現した。上は球を半球2個で覆った状態の図である。下は球を半球によってどのように覆うかを示している。

74b.] この実験は、最近、いくぶん異なった方法でキャベンディッシュ研究所で繰り返されている。

半球は絶縁された支持台に固定され、さらに球はエボナイトの環を使ってその中の適切な位置に固定された。このような配置によって、球の支持

台は感知されるような電気力の作用を受けることなく、それゆえ決して帯電せず、したがって絶縁体の表面にそって忍び入る電気の擾乱効果は完全に除かれている。

球のポテンシャルを測定する前に球殻を取り除くのではなく、球殻を固定したまま接地される。半球を取り除いたとしても、球上の与えられた電荷の電位計への効果はそれほど大きくはないが、この不利益は外的な擾乱にたいして導体の器が与える完全な安全性によって十二分に補償されている。

球殻と球を電氣的に接続する短い導線は球殻の穴を覆う小さな金属円盤に固定されている。この導線と金属円盤を絹糸で取り除くと、電位計の電極を穴を通して挿入し、球の中に静止させることができた。

電位計は219節で記述されるトムソンの四分電位計である。電位計の箱と電極の一つはつねに接地されており、検査電極は球殻の電気が放電されるまで接地されていた。

最初に球殻にあった電荷を評価するために、小さな真鍮の玉が球殻から十分に離れた所にある絶縁された支持の上に置かれている。

操作は次のように行われる：—

球殻はライデン瓶と結合することによって帯電される。

小さな玉は接地されているので、球殻が帯電した時、静電誘導によって小さな玉にも電荷が誘導される。ここで、小さな玉を絶縁すると小さな玉には電荷が残される。

球と殻とのあいだの結合導線が絹糸によって除かれた後、球殻が接地される。

その後、検査電極は地面から切り離され、球殻の穴を通して球に触れさせる。

電位計には、わずかな効果も観測されないであろう。

装置の感度を確認するために球殻の接地を切り、小さな玉を接地して放電させた。電位計は {検査電極は接地されたままであり}⁴ 正の振れ D を示した。

真鍮の玉の負電荷は最初の球殻の電荷の $\frac{1}{54}$ であり、球殻が接地された時に小さな玉によって誘導される正の電荷は小さな玉の電荷の約 $\frac{1}{9}$ であった。したがって、小さな玉が接地された時に球殻

⁴{...} は J. J. Thomson による注釈である。

が示すポテンシャルは、電位計が示すように、最初のポテンシャルの約 $\frac{1}{486}$ である。

しかし、もし斥力が r^{q-2} のような距離依存性を持つならば、球のポテンシャルは式 (22) によって与えられるように、球殻のポテンシャルの $-0.14778q$ になるはずである。

したがって、もし $\pm d$ が電位計の最小感度で、 D が実験の第 2 の部分で観測される電位計の読みならば $\{0.1478qV/\frac{1}{486}V$ は d/D より小さくなければならないから $\} q$ は

$$\pm \frac{1}{72} \frac{d}{D}$$

を越えることができない。

さて、粗い実験でさえ、 D は $300d$ よりも大きく、したがって q は

$$\pm \frac{1}{21600}$$

を越えられない。

この実験の理論

74c.] 一様な球殻による任意の点のポテンシャルを見出すために 2 つの単位電荷間の斥力を距離の任意の関数とする。

$\phi(r)$ を距離 r での 2 つの単位電荷間の斥力とし、 $f(r)$ を

$$\frac{df(r)}{dr} (= f'(r)) = r \int_r^\infty \phi(r) dr \quad (1)$$

のようなものとする。

球殻の半径を a とし、その表面密度を σ とすると、 α が殻の全電荷を表すなら

$$\alpha = 4\pi a^2 \sigma \quad (2)$$

である。

b を球殻の中心から与えられた点の距離を表し、 r を球殻の任意の点から与えられた点への距離を表すとする。

球殻上の点を球座標で参照し、座標の極が球殻の中心で、軸が中心から与えられた点へ引かれた線とすれば、

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \quad (3)$$

である。球殻の電荷要素は

$$\sigma a^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (4)$$

である。与えられた点でのこの要素によるポテンシャルは

$$\sigma a^2 \sin \theta \frac{f'(r)}{r} d\theta d\phi \quad (5)$$

である。 ϕ に関して $\phi = 0$ から $\phi = 2\pi$ まで積分すると、

$$2\pi \sigma a^2 \sin \theta \frac{f'(r)}{dr} d\theta \quad (6)$$

になり、さらに $\theta = 0$ から $\theta = \pi$ まで積分しなければならない。

(3) を微分すると

$$r dr = ab \sin \theta d\theta \quad (7)$$

であることが分かる。(6) 式に $d\theta$ の値を代入すると

$$2\pi \sigma \frac{a}{b} f'(r) dr \quad (8)$$

がえられる。その積分は

$$V = 2\pi \sigma \frac{a}{b} \{f(r_1) - f(r_2)\} \quad (9)$$

である。ここで r_1 は r の最大値で、それは常に $a + b$ であり、 r_2 は r の最小値で、それは与えられた点が球殻の外にあるときは $b - a$ 、球殻の中にあるときは $a - b$ である。

もし殻の全電荷を α と書き、与えられた点でのそのポテンシャルを V と書くと、球殻の外の点に対して

$$V = \frac{\alpha}{2ab} \{f(b+a) - f(b-a)\} \quad (10)$$

球殻上の点にたいして

$$V = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a),^5 \quad (11)$$

球殻の内部の点に対して

$$V = \frac{\alpha}{2ab} \{f(a+b) - f(a-b)\} \quad (12)$$

である。

次に、私たちは二つの球殻の半径が a 、 b であり、その電荷が α と β である 2 つの共心球殻のポテンシャルを決定しなければならない。

⁵{ 厳密には $f(2a) - f(0)$ だが、74d 節で達する結論はもし $f(2x)$ に対して $f(2a)$ の代わりに $f(2a) - f(0)$ 、 $f(2b)$ の代わりに $f(2b) - f(0)$ と書くと、変わらない。}

外殻のポテンシャルを A 、内殻のポテンシャルを B とすると、前に述べたことから

$$A = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a) + \frac{\beta}{2ab} \{f(a+b) - f(a-b)\} \quad (13)$$

$$B = \frac{\beta}{2b^2} f(2b) + \frac{\alpha}{2ab} \{f(a+b) - f(a-b)\} \quad (14)$$

が得られる。

実験の最初の部分で、二つの球殻は短い導線によって結ばれ、両者は同じポテンシャルになっている。それを V とする。

$A = B = V$ と置き、 β に対して方程式 (13) と (14) を解くことによって内殻の電荷

$$\beta = 2Vb \frac{bf(2a) - a[f(a+b) - f(a-b)]}{f(2a)f(2b) - [f(a+b) - f(a-b)]^2} \quad (15)$$

が得られる。

キャベンディッシュの実験では、外殻を形成する半球は無限と考えられる距離まで取り除かれ、放電されると考えれば良い。この時、内殻(または球)のポテンシャルは、

$$B_1 = \frac{\beta}{2b^2} f(2b) \quad (16)$$

となるだろう。

キャベンディッシュ研究所で行われた実験では外殻はその場所に残され、接地されたので、 $A = 0$ である。この場合、中の球のポテンシャルは V を使って

$$B_2 = V \left\{ 1 - \frac{a}{b} \frac{f(a+b) - f(a-b)}{f(2a)} \right\} \quad (17)$$

であることが分かる。

74d.] さて、キャベンディッシュにしたがって、力の法則は逆二乗からそれほど変わらない、距離のある逆冪であると仮定し、

$$\phi(r) = r^{q-2} \quad (18)$$

と置くと、

$$f(r) = \frac{1}{1-q^2} r^{q+1} \quad (19)$$

である⁶。もし q は小さいと仮定すると、指数定理によって

$$f(r) = \frac{1}{1-q^2} r \{1 + q \log r + \frac{1}{1.2} (q \log r)^2 + \&c.\} \quad (20)$$

の形に展開でき、 q^2 を含む項を無視すると方程式 (16)⁷ と (17) は

$$B_1 = \frac{1}{2} \frac{a}{a-b} Vq \left[\log \frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{b} \log \frac{a+b}{a-b} \right] \quad (21)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} Vq \left[\log \frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{b} \log \frac{a+b}{a-b} \right] \quad (22)$$

となり、これから、実験の結果を使って q を決定することができる。

3 理論の確認

マクスウェルの逆 2 乗則に関する理論の式 (17) の導出に多少の論理の飛躍があるように思われる。そこで、理論全体を

正の単位点電荷が作るポテンシャルが、距離 x の関数として Ax^{q-1} と表される

として、再構成する。

準備として、一様に電荷が分布した半径 a の球殻による任意の点におけるポテンシャルを求める。

球殻の全電荷を α とするならば、表面電荷密度 $\sigma = \frac{\alpha}{4\pi a^2}$ である。球殻上の任意の点 $(a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta)$ から点 $\vec{r} = (0, 0, r)$ までの距離 x は

$$x^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta \quad (23)$$

である。従って、球殻上の電荷による点 \vec{r} におけるポテンシャルは

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \frac{\alpha}{4\pi} Ax^{q-1} \sin \theta d\theta \right) d\phi \quad (24)$$

となる。式 23 を微分することにより、 $x dx = ar \sin \theta d\theta$ が得られる。式 24 に代入すると

$$\frac{\alpha A}{2ar} \int_{r_2}^{r_1} x^q dx = \frac{\alpha A}{2ar(1+q)} (r_1^{q+1} - r_2^{q+1}) \quad (25)$$

⁶ { もし q^2 が 1 より小さければ、厳密に $f(r) - f(0) = \frac{1}{1-q^2} r^{q+1}$ }

⁷ $a \rightarrow \infty$ の極限を取ると $(\log 2 - 1)V_0q$ となる。

となる。ここで、 r_1 は x の最大値で $a+b$ である。一方、 r_2 は最小値であるが、 r_0 が球殻内であれば $a-r$ となり、球殻外であれば $r-a$ になる。ここまでは、マクスウェルの理論の $f(r)$ に具体的な形を入れただけである。このポテンシャルを $V(\alpha, a, r, r_1, r_2)$ と書くことにする。

以上の考察を用いて、中心を同一とする2重球殻の間のポテンシャルを求めよう。外側の球殻の持つ電荷を α 、半径を a とし、内側の球殻の持つ電荷を β 、半径を b とする。共通の中心から距離 r 、ただし $a \geq r \geq b$ 、の点でのポテンシャル $V_2(r)$ は

$$V_2(\alpha, \beta, r) = V(\alpha, a, r, a+r, a-r) + V(\beta, b, r, a+r, r-b) \quad (26)$$

とあらわすことができる。

2重球殻のポテンシャルが等しい条件は、簡潔に

$$V_0 = V_2(\alpha, \beta, a) = V_2(\alpha, \beta, b) \quad (27)$$

と表すことができる。ただし、 V_0 は等しいポテンシャルの値である。 α と β について解くことができ、それらが最初に外殻と内殻に蓄えられる電荷になる。解いた結果をそれぞれ、 α_0 と β_0 としよう⁸。

次に内殻と外殻間の電氣的な接続を外し、外殻を接地した場合を式で表すと、

$$V_2(\alpha, \beta_0, a) = 0 \quad (28)$$

となる。内殻の電荷 β_0 は変化しないことに注意。この式より、外殻を接地したときに外殻に蓄えられている電荷 α_1 が分かる⁹。

最後に、 α_1 と β_0 を用いると、内殻のポテンシャルを $V_2(\alpha_1, \beta_0, b)$ によって求めることができる。整

⁸Mathematica を用いて、解くと以下ようになる。

$$\alpha_0 = \frac{-2ab(2^{1+q}a^{1+q} - (a-b)^{1+q} - \frac{a}{b}(a+b)^{1+q})}{A(a-b)^{1+q}(2^{1+q}a^{1+q} - (a-b)^{1+q} + (a+b)^{1+q})}(1+q)V_0$$

$$\beta_0 = \frac{2ab(2^{1+q}a^qb + (a-b)^{1+q} - (a+b)^{1+q})}{A(a-b)^{1+q}(2^{1+q}a^{1+q} - (a-b)^{1+q} + (a+b)^{1+q})}(1+q)V_0$$

⁹Mathematica を用いて、解くと以下ようになる。

$$\alpha_1 = \frac{2a^2(2^{1+q}a^{1+q} - (a-b)^{1+q})(a-b)^{-1-q}(-(a-b)^{1+q} - 2^{1+q}a^qb + (a+b)^{1+q})}{(2^{1+q}a^{1+q})A(2^{1+q}a^{1+q} - (a-b)^{1+q} + (a+b)^{1+q})}(1+q)V_0$$

¹⁰展開すると、

$$V_2(\alpha_1, \beta_0, b) = \left(\log 4 + 2 \log a + \frac{a-b}{b} \log(a-b) - \frac{a+b}{b} \log(a+b) \right) \frac{V_0}{2} q$$

となる

理すると、

$$V_2(\alpha_1, \beta_0, b) = V_0 \left(1 - \frac{(a+b)^{1+q} - (a-b)^{1+q}}{(2a)^{1+q}} \right) \quad (29)$$

となる。 $|q|$ を微小として展開すると¹⁰、式(22)が得られる。

キャベンディッシュの元々の実験では式(28)で $a \rightarrow \infty$ の極限で α を求めればよい。内殻の影響が無視できるので、 $\alpha = 0$ となる。従って、内殻のポテンシャルは $V_2(0, \beta_0, b)$ の式で $a \rightarrow \infty$ とすれば得られる。 q の2次以上の項を無視すると

$$\lim_{a \rightarrow \infty} V_2(0, \beta_0, b) = \frac{2 + 2q - 2^{1+q}}{2^{1+q}} V_0 = (1 - \log 2)qV_0 \quad (30)$$

となる。

4 その後の検証実験

マクスウェルによる実験では $q < 4.6 \times 10^{-5}$ が得られた。マクスウェルの実験でそれ以上精度を向上することができないのは、接触ポテンシャルのためである。内側の球のポテンシャルを測定するために、電位計と内側の球を接触させるという行為そのものが接触ポテンシャルによって誤差の原因になっている。この問題は Plimpton と Lawton によって1936年に回避する方法が発明された。彼らは外側の球をゆっくりと変化する交流電流によって帯電させ、内側と外側の球の電位差を装置の内部に固定した電位差計で測定した。彼らは、 $|q| < 2 \times 10^{-9}$ であることを見いだした[8]。

1970年代になるとロックイン・アンプなどの測定器の進歩を生かした測定 ($|q| < 1.3 \times 10^{-13}$)[9] やより高い周波数による測定 ($|q| < (1.0 \pm 1.2) \times$

10^{-16})[10, 11] などによる精度の向上が行われている。

クーロンの逆2乗則が現在の実験の精度内で確認されていることにより、我々はクーロンの法則ひいてはマクスウェルの電磁気学の理論を自然界に適用する保証が得られている。一方で、その精度の向上のためには理論に裏付けられた新しい実験技術が必要であった。

5 まとめ

ここで取り上げたクーロンの逆2乗則のように物理学で学ぶ様々な法則を直接実験的に検証することは必ずしも容易ではない場合が多い。ニュートンの運動の第一法則

外力が加わらなければ、質点はその運動（静止）状態を維持する。

もその典型的なものである。そのために、教育において実験は非効率的で不要であるという極端な意見も存在する [12]。

しかしながら、我々は物理法則そのものの暗記よりも

物理法則がどの程度確からしいのか？

という批判的な精神こそが「物理学の根本」であり「学生が身につけるべきこと」であると考えている。そして、そのような批判的な精神を身につける手段として

実験における誤差評価を行い、誤差を減らす方法を工夫する

ことが有意義だと考えている。ただ、現在行われている学生実験では「誤差評価」は多少行われているが、「工夫」を行うという要素を取り込んだ実験はほとんどない。

クーロンの元々の実験は誤差が大きい実験にしかないが、マクスウェルの工夫により非常に誤差を小さくすることが可能であった。従って、「クーロンの逆2乗則」をテーマにクーロンによる実験とマクスウェルの実験を連続して行えば、学生が「批判的な精神」を身につける助けになると期待される。

References

- [1] 霜田光一、「歴史を変えた物理実験」、丸善 1996、パリティブックス。
- [2] Shech, E., *Coulomb's Electric Torsion Balance Experiments of 1785*, この論文は以下からダウンロードができる。 <http://www.exphps.org/pdfs/projects/coulomb%20experiments.pdf>.
- [3] Robinson, J., は *A System of Mechanical Philosophy* (London, England: John Murray, 1822), vol. 4. の 68 ページに、1769 年に「同種電荷を持った球の間の逆2乗則の発見」を報告したと記している。また、73 ページに力は距離 x に対して、 $x^{-2.06}$ で変化することを見いだしたと主張している。この本の電子ファイルは <http://books.google.co.jp/books?id=8pRDAAAACAAJ&pg> に存在する。
- [4] Maxwell J. C., 1891, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, unabridged third edition, reprinted by Dover in 1954. <http://books.google.co.jp/books?id=OKBVYAAACAAJ&dq> に電子ファイルが存在する。
- [5] Duhem, P., 1902, *Les théories électriques de J. Clerk Maxwell: Etude historique et critique*, Paris, A. Hermann.
- [6] O'Rahilly A., 1965, *Electromagnetic theory*, New York, Dover.
- [7] Buchwald D. Z., 1985, *From Maxwell to Microphysics*, The University of Chicago Press. ISBN 0-226-07882-5.
- [8] Plimpton, S., J., and Lawton, W., E., *Phys. Rev.* **50**, 1066 (1936).
- [9] Bartlett, D., F., Goldhagen, P., E., and Phillips, E., A., *Phys. Rev. D* **2**, 483 (1970).

- [10] Williams, E., R., Faller, J., E., and Hill, H., A., Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).
- [11] Fulcher, L., P., Phys. Rev. A **33**, 759 (1986).
- [12] 石川孝夫、物理教育 **26**, No. 1, 5 (1978).