東京工芸大学工学部紀要 Vol. 30 No.1（2007）

$\sqrt{2}$ の数学

植野義明*

概要

高大連携が 1998 年前後からはじまり, 最近ではかなり定着してきた。高校側は進路指導の一環としてこの制度を利用しているらしいが, 大学教員にとっても, 高校の雰囲気を知ることができ, 意味のある活動だと思う。

$\sqrt{2}$ は, 数学を習ったことのある者なら誰でも知っている数である。素朴な題材からどこまで数学を深められるか, 受講する生徒やその親, 講師役の教員にとっても興味が湧く。ただ黙って話を聞くだけでなく, 作業しながら楽しめる演題として, 今後の定番にしたい数学である。

1　はじめに, $\sqrt{2}$ の思い出

小川洋子の小説 [1] には, ルートという名の少年が登場する。

> 彼のことを, 私と息子は博士と呼んだ。そして博士は息子を, ルートと呼んだ。ルート記号の中に数字をはめ込むとどんな魔法が掛かるか, 三人で試した日のことはよく覚えている—。

これは冒頭部分からの引用だが, 小説全体の語り部である「私」は, ここに引用したシーンのような時間を後の方で, 「とっても大切な時間」と言っている。ここに書かれているのは, 初めてルート記号を習ったときの, ときめくような体験であり, 誰もがもっている貴重な記憶である。

中でも $\sqrt{2}$ は親しみのある数である。ルートの中に, 数を 1, 2, . . . と順番に入れていくとき, 初めて表れるトリビアルでない数—無理数と呼ばれる数が $\sqrt{2}$ である。

また, $\sqrt{2}$ は正方形の対角線の長さのイメージとも結びついている。それは, ピタゴラスが教会の敷石を見て「三平方の定理」を思いついたというエピソードを呼び覚ます。

2　身近な数 $\sqrt{2}$

一方, $\sqrt{2}$ は現代を生きる私たちにとって案外身近な数でもある。日本人である私たちは語呂合わせという得意技によって, $\sqrt{2}$ の値が約 1.41421356 であることを暗記している。そんなに多くの桁数を暗記しなくても, 1.4 ぐらいでも, 経済活動には十分に役に立つ。つまり, 4 割り増しを 2 度続けると, 近似的に 2 倍になるということである。

街のコンビニ・ストアにあるコピー機で拡大コピーをするとき, 「141% に拡大」というボタンのお世話になる。これは, 長方形の紙の縦・横を同時に 1.41 倍すれば, 面積は 2 倍になるということである。面積比は相似比の 2 乗になるからである。

3　$\sqrt{2}$ の近似値

開平という方法は, 和算では算木を並べて行ったそうである。最近はあまり教えることがなくなったのかもしれないが, 実際に開平計算をしてみると, 縦書きの割り算のアルゴリズムとよく似ていることに驚く。また, $\sqrt{\ }$ という記号も縦書きの割り算の記号に似ている。

$\sqrt{2}$ の近似値を得るもうひとつの考え方は, 分数 (有理数) でこれに近いものを探すことである。い

* Associate professor, General Education and Research Center, Tokyo Polytechnic University
Received Sept.28, 2007

ま, $1.4 = 14/10 = 7/5$ が良い近似値であることは, $1.4^2 = 1.96$ としても分かるが,

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = 2 - \frac{1}{25}$$

としても分かる。

より一般に, a/b が $\sqrt{2}$ に等しいか近いとすると, $a/b = \sqrt{2}$ の両辺を 2 乗して

$$a^2 = 2\,b^2$$

となる。そこで, 2 つの平方数であって, 比が 2 に等しいか近いペアを見つければ, $\sqrt{2}$ に等しいか近い分数 (有理数) が得られることになる。

これは, 想像したよりも面白い作業である。なぜなら, 平方数を求めることは暗算でどんどんできるからである。平方数 (の数列) の階差数列をとると, 奇数の数列となるので, 奇数を順に足していくと平方数がすべて求まる。他にもいろいろな方法がある。最近は「インドの数学」が流行っているらしく, 書店に行くと 1 つのコーナーが「インド式計算術」の本で埋まっていることがある。

こうして求めた平方数 n^2 の表と, その 2 倍の表を比べる。

n	n^2	$2\,n^2$	n	n^2	$2\,n^2$
1	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	11	121	242
2	4	$\boxed{8}$	12	144	$\boxed{288}$
3	$\boxed{9}$	18	13	169	338
4	16	32	14	196	392
5	25	$\boxed{50}$	15	225	450
6	36	72	16	256	512
7	$\boxed{49}$	98	17	$\boxed{289}$	578
8	64	128	18	324	648
9	81	162	19	361	722
10	100	200	20	400	800

四角で囲んだところで「ニアミス」が起こっている。それらを抜き出すと,

$$1^2 = 1 = 2 - 1 = 1^2 \times 2 - 1$$
$$3^2 = 9 = 8 + 1 = 2^2 \times 2 + 1$$
$$7^2 = 49 = 50 - 1 = 5^2 \times 2 - 1$$
$$17^2 = 289 = 288 + 1 = 12^2 \times 2 + 1$$

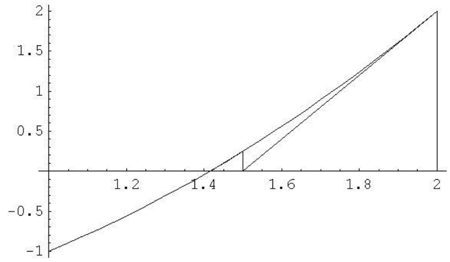

図 1　ニュートン法で $\sqrt{2}$ を求める。

となるので, $\sqrt{2}$ の近似分数として

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12}$$

が得られる。

この分数の列に何か規則性はあるだろうか。分子だけ, あるいは分母だけの並びを見ていたのではなかなか規則性に気付かない。分子と分母を同時に見ていると, きれいな規則に従っていることに気付く。

4　ニュートン法

$\sqrt{2}$ の値を計算するのに, ニュートン法を用いるという方法がある。方程式 $x^2 - 2 = 0$ を考える。この方程式の二つの根のうち, $x > 0$ の範囲にあるのが $\sqrt{2}$ である。もっと詳しく, $1 < \sqrt{2} < 2$ であることが分かる。

そこで, $y = x^2 - 2$ のグラフに $x = 2$ のところで接線を引き, x 軸との交点を x_1 とする。

一般に, $y = f(x)$ の $x = a$ で引いた接線の方程式は $y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$ なので, これと x 軸との交点の座標は $a - f(a)/f'(a)$ となる。

そこで, 数列 x_n を漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

で定義する。出発点 x_0 を適当に定めれば, 目標とする方程式 $f(x) = 0$ の根に収束することが期待される。

$f(x) = x^2 - 2$ の場合は, $f'(x) = 2\,x$ となるので, 漸化式は

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2\,x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

となる。

$x_1 = 1$ から始めると, $x_2 = 3/2 = 1.5$ となるが, それ以降この数列は単調減少となる。

$$\begin{aligned} x_2 &= \tfrac{3}{2} &&= 1.5 \\ x_3 &= \tfrac{17}{12} &&= 1.41 \\ x_4 &= \tfrac{577}{408} &&= 1.41421 \\ x_5 &= \tfrac{665857}{470832} &&= 1.41421356237 \end{aligned}$$

$x > \sqrt{2}$ の範囲で $f(x) > 0$ かつ $f'(x) > 0$ だからである。また, 下に有界であることもすぐにわかるので, 収束することが分かる。漸化式で n を無限に大きくした極限を考えれば, 収束する先の数は $\sqrt{2}$ でなければならないことも直ちにわかる。

以上は, 数列が収束することの証明であるが, これは定性的な証明, 極限の存在証明である。しかし, $x > 0$ の範囲で $f''(x) > 0$ であることにも注意すると, この収束は意外に速いことも分かる。実際, 上の計算例が示すように, 十進小数展開で一致する桁数は 2 倍, 2 倍に増えてゆく。

図 1 を見ると, 収束の様子がわかる。極限に近づけば近づくほど, 小さな区間の中では関数のグラフと接線 (という直線) は区別ができなくなっていく。視覚的には, 初期値から数えて 3 番目の点を見るのがやっとである。

5 メソポタミアの粘土板に見られる $\sqrt{2}$ の近似値

メソポタミアで紀元前 1900 年に書かれたと同定されている粘土板に正方形とその対角線の図とともに $\sqrt{2}$ の値を刻んだものが見つかっているそうである [4]。

60 進法で表されたその楔形文字の数字を読むと, それがニュートン法で計算し, ある桁で丸めたものと一致することが確かめられている。その粘土板を見ると, 古代メソポタミアの人たちは, 小数点以下も 60 進法を使用したことが分かる。

ただし, メソポタミアの人たちがニュートン法を知っていたはずはないので, 近似値どうしを平均するとよりよい近似値が得られるというような直観に従って, 上述の漸化式で示されている計算を行ったのだろうと推測される。

それにしても, その時代に「実用の範囲を超えた精度で」求めようとした人がいたことをその粘土板は語っている。

6 連分数との関係

$\sqrt{2}$ については連分数展開

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

も有名で, そこから導かれる近似分数 p_k/q_k は真の値 $\sqrt{2}$ を上と下から交互に「絞り込む」ようにして近づいてゆく。ニュートン法で得られる有理数列は, これらの近似分数を「とびとびに」取る。その「とびとび」さがどんどん加速していく。これは, 収束する数列の収束速度を加速する「加速法」の好例となっている。

ところで, 連分数展開の近似分数

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \cdots$$

もことのほか重要で, これらの分母 q と分子 p は

$$p^2 - 2\,q^2 = \pm 1$$

の整数解の全体を網羅している。整数論の問題 (不定方程式) のルーツが解析学にあるという典型的な例である。

これらの分数は実は第 3 節で示したものと一致している。詳しくは, [2] を参照されたい。

参考文献

[1] 小川洋子『博士の愛した数式』新潮社, 2003/08/29

[2] David Flannery, The square root of 2, Praxis Publ. Ltd., New York, 2006

[3] 足立恒雄『$\sqrt{2}$ の不思議』筑摩書房 (2007/02)

[4] 数学セミナー 2000 年 9 月号「数学をすることの楽しさ」(中村滋)

[5] 植野義明, $\sqrt{2}$ の数学, 2007.7.1 数学教育学会夏季研究会 (早稲田大学教育学部)