講演記録【鳥取大学数学教育研究，第４号，2002】

数学教育における構成的方法

講演者：伊藤説朗　東京学芸大学教授

○はじめに

みなさん，おはようございます。ただいまご紹介いただきました伊藤でございます。この中には多少，私が以前面識がある人がいらっしゃいますが，ほとんどが初めての人ばかりですから，初めてということでお話いたします。数学教育のことに興味，関心をお持ちになっていたり，また，その分野で研究していらっしゃるということでお話をすすめさせていただきます。

お手元に私の研究概要を示すものを用意致しましたが，これを詳しく全部お話をするだけの時間がありませんので，その一部分と，それから基本的な考え方をお話していきたいと思います。話の中身について詳しく知りたい方はテキストが入手できますので，それをお読み下さい。それを読むにあたっての導入のようなものだと思っていただけるとよろしいのです。

数学教育の研究を始めて大分年数が経ちます。およそ 30 年くらい経ちます。日本の算数・数学教育は大方みてうまくいってます。それはカリキュラムがうまく作られているからです。それからまたそれを指導するための教材，教具があるからです。教科書などを中心にそれは非常によくできています。これはもう国際的にもそういうふうに評価されています。また，それを実際教壇に立って指導する先生方も大変優秀な能力を持っています。非常に評価されています。

例えば，１時間の授業をするとき，教材をいろいろ調べて，そして子どものことをよく知っていなければいけません。また先生の指導のための様々な技術を含めて方法をいろいろ考える。そういうようなことは当たり前に行われています。そこで私が思ったのは，今日当たり前でこれで良いとされているその根拠は何だろうか。なぜ今のようなカリキュラムが一番望ましいと思われているのか，ということです。もっと良いものがあればそれをやればいいわけで，今としては最高のカリキュラムなんです。どうして今のカリキュラムがうまくできているといえるのか。指導法についてもそうなのですけれど，今やられているものを，これをよしとする根拠は，何か。「これでいいのだよ」と言えるベースはどこにおくべきかということです。

○数学教育に固有な教授=学習理論

私は教育学の勉強は，遅くに始めた方なのですけど，やってみたら，なかなか面白い。教育学ということに相当はまって，と言いましょうか，夢中になってやった訳なのですが，その中でも特に私が最も尊敬し，影響を受けた教育学者はペスタロッチという方であります。この方に私が非常にあこがれました。その頃，西洋教育史の分野では長尾十三二先生が権威でいらして，先生はペスタロッチの研究では，多分国際的に見ても高い水準にお在りでした。その先生がいらしたものですから，勉強して分からないところをお尋ねする，そんな機会に恵まれたのです。当時，なぜその先生にいろいろお尋ねしなくてはいけなかったかと言うと，みなさんはご存知の人は少ないかも知れないのですが，ペスタロッチ時代の文献は古い文献なんです。古い文献というのは，文字がアルファベットの文字がなんですか，いわゆる飾り文字というのですか，よく飾り文字でしゃれたデザインした文字が，あるでしょ。“Ｂ”と書いてあるのか，なんだかよくわからないような，模様になった文字があるでしょ。みんなその文字で書かれているのです。当時の文字というのは，ものすごく難しく，それをまずマスターしなければいけない。また，言葉が古いんですよ。ドイツ語の言葉自体が古文なのです。ずいぶん苦労しました。だんだん慣れてくると普通にだいたい言葉が分かる。分からない所があるとご相談にのって教えていただく。そんなことをして，かなりそれに打ち込みました。そして，多くのことを吸収できたと自分では思っています。

その頃だんだん芽生えてきた思いは何かと言うと，要するに教育学者というのは，数学教育のために何かを書いているんじゃないのだ，ということです。数学教育であるか，国語教育で

あるか，理科教育であるかは，考えてない。全体を対象にしているわけです。だから，それは一応ごもっともなことばかり言っています。そういう中で数学教育を考えるとき，数学教育だからこそ言えること，数学教育だからこうだ，と言う固有のものは何だろうか。一般論をベースに考えるときに，教科の特殊性があって，それに応じた教授・学習に関する理論があっていいはずである。それは何か。私の興味・関心はこの点にありました。

それは，やはり歴史的にいろいろ調べる必要があるのです。例えば，分数のカリキュラムについて歴史を少し思い起こしてもらいたい。いつ頃どういうふうにしてこのカリキュラムが作られてきたのかは，知らないですね。誰かがある日突然作ったのではないのです。だいたいは長年の経験の中でだんだん作られてくるのですけれど，時代によってはあちこち行き来したりするので，あるときあったり，あるときなくなったりとか，いろいろしながら作られていくわけなんですけれど，半分以上は経験的なんです。結局，「このカリキュラムで教えてみたらうまくいった，だからいいんだ」というように。しかし，もうちよっと強固な基礎になるものはないのか。根拠となる理論がないのかり。もし，そういうものがあると言えるならば，その立場から見たら「これは不適切なんだ」「これはこうすべきだ」という主張ができるはずです。固有の教授・学習理論があると新たに主張できるならば，「現在，基本的にはこうなっているけれど，この部分は細かい目で見ていけば，こうあるべきだ」，「数学教育の立場からしたら，ここはこうすべきだ」という提案がいくつか出来るはずだ，こういう思いがが根底にあったんです。

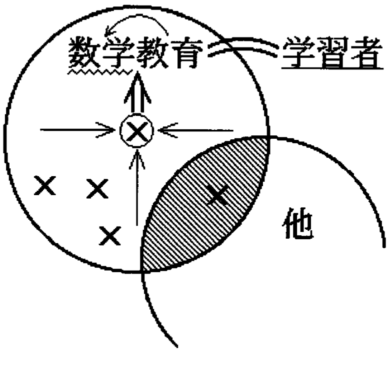
○構成的な方法

「構成的方法」という言葉についてお話します。私はこの教授・学習理論をまとめあげるまでに 10 年近くかかってしまいました。その研究の終わりの頃になって，「構成主義」と呼ばれる言葉がヨーロッパやアメリカで言われ始めて，私は多少困ったんです。私の「構成的方法」という言葉は，そういうことを言われるよりもっと前からその言葉を使って小さな論文を出していたんです。「混乱されると困るな」と思い，それで私は「言葉をどうしよう，変えようかな，どうしようか」と迷ったのです。でもよく読めば，彼らは“構成主義”と言っているのだから，“構成的方法”と言うのならば混乱しないだろう，という結論に至り，この言葉を用いることにしました。

たまたま“構成”という共通点がありますね。「構成主義」の言っているところと，ある程度通じるところがあるのです。それは，子どもたち自身が，一つの知識体系を順番に構成し作り上げていくという考えです。それをよりよくできるように補助し，指導していくのが教師の活動になるわけです。そういう点で私が考えてきたことと共通しているから，差し支えなかろうと思って，この用語を用いることにしているんです。私がこれをまとめあげた少し後なんですけれど，広島大学の中原忠男先生は「構成的アプローチ」という言葉を使った論文を発表されました。ここにも「構成」という言葉が使われています。

子どもの思考や子どもの発達に関わることについては，ピアジェの研究が大きい力を持っています。ピアジェはどういうふうに言葉を使っているかというと，“構成”にあたる用語を使っていますが，和訳した人が“構成”ではなく“構築”と訳しているのです。原語の“construct”には“構築する”という意味があるからです。子どもたちが物事を見たり考えたりしながら，順番に概念や知識を作っていく。子どもがどういうふうに実際にものを考え，どういうふうにして作っていくのかを科学していくわけですから，これは教育の研究では鍵になります。子どもが発達しながらだんだん知識体系を作り上げていくのに，一番よく合うカリキュラムを作るし，指導のあり方もそれに応じたものへと変えていくのです。

私が一番苦労したことは，これらの議論は数学教育に固有ではなくて他のものと共通しているのです。(下図参照)。共通しているところ(図中，斜線部内の×印)でない，こういうような所(図中，斜線部内にない×印)は数学教育に固有なものとして主張したいわけです。全体集合が広い意味でのいろいろな教科教育にあたります。そういうことを考え



ていくとき，数学教育の基は数学にあるわけです。数学を元にしていけば，他の学問領域とは明らかに違ってくる。その中には数学と共通するものは，ほとんどないのです。数学をいろいろに使う諸科学がありますが，それは数学の研究，数学そのものとは区別がつきます。重要なことはここに数学教育固有のものがあるということです。

〇直観主義

ところが，数学者でない私は，数学そのもののことをどこまで追及できるかということについて，全然自信がありません。そこで，現に今研究されている数学のことを議論するというのではなく，数学を支えてきたもの，つまり，何故あのような内容があのようなやり方で研究されてきたのかということを考えようと思ったのです。それを支えているものは，数学論や数理哲学です。数学のベースになっているこれらの中に，他の諸科学とは違う「数学だからこうなんだ」と言えることについての研究がなされているはずです。

もう一つ時間をかけてやりましたのは，数学史です。というのは，数学がどのように発達して今日まできているか。数学の歴史を見れば，何が数学らしさなのかある程度分かるだろうと思ったからです。数学のいわばべースになっているようなことを議論していく中で，資料にありますように，「直観主義」という考えが出てきますが，数学という学問としての特徴については，いろいろな見方があります。その中で私が「直観主義」を採用した理由は，教育との関係からです。当たり前のことなのですが，教育との関係で数学を見るということです。このことについては，いろいろなことを議論すべきです。例えば，なぜ学校教育で数学を教えるのか。今日は高等学校までほとんどの人が行くわけですから，そこまでの中で広い意味で人間形成するとなると，数学は何を狙って，どんな役割を果たすべきか。教育のことを考えるとすれば，その主人公は学習者でなければならないのです。学習者という観点から見て数学の特徴について考える。そのとき，学習者が実際に小学校から，中学，高校と算数や数学を勉強していく，そういう立場から見て，数学の特徴をうまく把握し，子どもが学んでいる数学の特徴について一番うまく説明できるのが「直観主義」だと思ったのです。

そういうヒントをくれた人はポアンカレです。ポアンカレの著書はそういうことを考えるかなり前から，興味・関心もあって読んでいました。この人の著書をいろいろ読んでみると，数学教育を考える上で重要なヒントを与えてくれるという思いがありました。数学教育についても，ときどきポアンカレは発言しています。ポアンカレの言っていたことで「ああ，もっともだなあ」と思ったことが，2つありました。1つは，数学の勉強をみなさんもしている中でお気づきだと思うのですけれど，勉強の進め方は「特殊なものから一般へ」といつも進んでいくということです。どの数学のテキストでも開いてみれば分かることで，いつも一般化を目指して努力しているのです。よく数学の特徴は演繹的な推論だ，「一般的な命題が分かっていて三段論法的に特殊なことをいろいろ導き出していく」というのは，見かけだけの話である。数学の研究は，全然それとは逆向きなのだと言っています。私が書きましたテキストの中で詳しく引用してございますので，正確なことはそれをお読みください。この考え方に対して私はショックを受けました。「なるほど，そう思えばそうだな」と思うのですけれど，私は数学とは最も演繹的にやるのだと信じ込んでいましたから。

〇数学的な認識

ポアンカレの著書の中にこういう話が出てきます。数学教育について言っているのですが，円の概念の理解を例にあげています。円の定義は，「平面上のある点から等距離にある点が集まってできた集合である」となっています。これを聞いたとき，何のことかよく分からなかった。そして，その定義を述べた後，先生が黒板に図を描いたんです。「何だ，円というのは丸のことか」と思ったというのです。「円はある点から等距離にある点の集合である」と言葉だけで言われても，全然イメージが浮かばないのです。それに比べて黒板に図が描かれたとき，初めて円の定義の意味が理解できたのです。私は，「本当だな」と思ったのです。それから結構，力を入れて読みました。ポアンカレは，直観主義をかなり推進する立場に立った人なのです。しかし，私は“直観主義”という言葉が嫌だったんです。というのは，「直観」という用語を使っていることが誤解を生むので危ないと思ったのです。この言葉が古くから数理哲学で使われてきましたので，やむを得ないと思いました。

このことに関わるのですが，数理哲学を読むと分かるように，当時，数学の本質について，いろいろな立場に分かれて激しい論戦が行われていたのです。昔から，特にフランスとドイツは互いに競争し合い発展してきており，ポアンカレは直観主義の立場を主張しているのに対して，一方，同じ頃ドイツでは，ヒルベルトが公理主義，形式主義を推進する立場を主張していました。ヒルベルトに関する伝記の中に登場している有名な話ですが，数学というのは内容ではない，というのです。

それは，宴会の帰り道の話で，点や直線は無定義術語として使われるが，ヒルベルトは「点とは何か」などは必要なく，2 直線が 1 点で交わるという関係が大事であって，対象は何でもよい。「点，直線，それに平面というかわりにいつでもテーブル，椅子，それにビールジョッキというように言い換えることができなくてはならないのだね。」これは比喩的表現であって数学的な定義や概念はほとんど抽象的な言葉で述べられており，それにはイメージなど不要である，と。ポアンカレは，そのようなものでは理解は絶対に出来ず，何が決め手かといえば，その定義が表しているものをいかにきちんと自分でイメージ化できるかであるという。ところが，ヒルベルトは形式主義の方向にどんどん推すわけですけれど，彼自身も悩んでいるのです。確かに形式主義というとらえ方は重要であるし，数学の数学らしさはそこにある。しかし，数学的な用語や概念には，その内容も本当は重要なのです。

○数学的な推論

例えば，排中律があります。排中律は，字義通り，真ん中を排除するということです。つまり，「P ならば Q である」という命題は，真か偽かのいずれかで，その真ん中はないのです。これは，形式的な推論をする考え方ですが，直観主義の人たちは，「いや必ずしもそうではないのではないか。どうしてそんなことがいつでも言えるのだ。それは確かめる必要がある。」というように考えました。場合によって，「P ならば Q である」という命題は，真であるか偽であるかは，はっきりしないかもしれない。だから，どちらも正しいことが起こるかもしれない。一応そのことを吟味したか。形式主義の考え方はこれを吟味していないではないか，と言って論駁するわけです。やがて，ちょっと怪しげなことが数学の中に起きてくるのです。これまで形式主義は万全と思っていたのに対して，例えば，公理的な集合論のようないろいろなパラドックスが発生します。集合論に関するパラドックスが次々と出されてきて，あやふやになってくる。そういう時代の中で，例えば，実数の定義はデデキントの切断と言われるやり方で示されます。平方根の無理数についてそういうような定義をして説明したとしても，決してその無理数がどんなものなのか具体的に示されない。つまり，存在の問題なのです。「こういうものが存在するとはどんなことなのか。存在するなら，そのものを作って見せろ。」と言うのが直観主義の主張です。切断のようなやり方では実数の具体的なものは絶対に作れないのです。もう 1 つ例をあげましょう。例えば，代数学の基本定理として「n次の代数方程式は，解の個数が n 個ある。」という定理が知られています。そして，二次方程式や三次方程式については解を具体的に示すことができます。また，n次方程式の解が n 個あるはずだということも証明されています。しかし，具体的にはどんな n 個の解があるかは示されていない。そういうものは存在するかどうか怪しい，と攻撃されるわけです。

数学という学問の持っている特徴をいろいろな側面からとらえようとしました。教育という目から見たときの数学の特徴，学習者たちが学習する対象としての数学の特徴は，形式主義，論理主義，あるいは直観主義のうち，どちらの側面が適しているだろうか。そういうことを考えている中で，もともと私は多少ポアンカレに偏っていましたので，「直観主義」がよいのではないかという立場から議論を進めて参りました。

○臨床的な研究方法

少し話が飛びますが，学習者の問題について，一般的な教育学からの議論があります。また，心理学の研究もたくさんありますが，中でもピアジェの研究が重要です。あの時代のあの範囲での実験結果ですから，今日それがそのまま通用することはないと思いますが，基本的な発達の捉え方については，ある一定の知識を与えてくれると思います。ピアジェの研究にもかなり時間をかけました。何しろ私は語学が苦手なものですから，先生方とは違ってものすごい時間がかかったのです。私はたまたま第二外国語がドイツ語だったので，ペスタロッチの著書などいろいろ読んでいましたから，ドイツ語の文献

はまだいくらか楽だったのですけれど，残念ながらピアジェは，全部フランス語で書いていたので，悪戦苦闘しました。若かった頃，30 代の半ばから後半ぐらいでしたが，それから，ラジオ講座のフランス語講座で，文法から何から読み方も毎日のように聞いて，テキストをくれるんですけれど，それだけでは不十分な人のためにテープがついてくる。テープを繰り返し聞きながら勉強しました。辞典を引きながらやれば，読めるぐらいになってピアジェの著書に挑戦したのです。子どもの発達に関する理論の基礎的なこともピアジェは研究しているが，研究していないこともある。ピアジェの研究のほとんどは，小さな子どもしか相手にしておらず，ある程度先の中学生や高校生の数学的な見方やいろいろなものまでは，相手にしてないのです。中学生どころかもっと下の方の小学生についても危ないんです。

だから，我々に役立つようなことは乏しいので，独自に自分でやるしかないと思いだしました。たまたまその頃一緒に算数の研究会をやってくれる小学校の先生方，それから中学校の人も若干いましたけれど，サークルみたいなものがあって，そういう人たちの協力を得て，実際にいろいろなことを調査してみたのです。「子どもは実際どう考えるか？」そのことをよくつかんでないと全然空回りして「こうあるべきだ」とか「こうなるはずだ」となってしまうからです。これではだめなんで，子どもに何回かいろいろな実験をやりました。「こうすれば，必ずこうなる。」ということについて，実験的な授業を繰り返しました。その際，小学校でやってくださる方と組んで，私が細かいデータをとったり，どんな授業展開するかを全部組み立てて，その人に授業をやってもらったんです。その中で特によかったと思う授業について，私がさっき申し上げましたテキストの下巻に全部のせてあります。どういう目的でどういう授業をしてどういう結果がえられたのかというようなことが分かります。そういう中で，子どものすばらしさを感じたのは，子どもは自分で考えてきた推論のことをうまく表現できないけど，頭の中では大変なことをやっているのだということです。一種の子どもなりの本能的に見抜く力をもっていて，不思議なくらいに問題を巧みに解決していくのです。そのことをどういうふうにすればうまく我々が捉えられるか。その上に立って「こういうような教授学習を進めていくべきだ」というように議論を進めていきたい。それは広い意味でカリキュラムがありますけど，どういう順序にどんな対象を与えれば，子どもがどのように思考を展開して先へと進んで知識体系を作っていけるのか。そこが難しいところです。現在，既にある様々な考え方を基に作られているカリキュラムに拠りながらも，それがふさわしくできていないかもしれない。ふさわしいカリキュラムであるならば，それに従ってやっているときに子どもがこう思考してこういくのだと言えるのだけれど，そこは危ないところなのです。だから，今カリキュラムがこうなってるからこの通りにだけやるのではなく，カリキュラムを変更して，こういうことをやらしたら子どもがどうなるかを調べる必要が私にはあったのです。

○構成的な推論

子どもの思考の仕方，その素晴らしさを発見しました。子どもたちは学年の発達段階に応じてそれぞれ進んでくるわけですが，大変乏しい知識と経験しかないのです。そういう中から新しい知識や技能を獲得するべく挑戦していく。そのときに子どもたちがどんなふうに考えているかと言うと，(2 ページの真ん中あたりの)「帰納的な推論」と「発想的な推論」という言葉が鍵になるのです。子どもは演繹的な推論で物事を考えることはほとんどない。ほとんどないというか，それはできないのです。なぜならば，カリキュラムを見ても分かりますけれど，いつも特殊な事柄を勉強したことをさらに一般化するべく次の段階へと学習を進める。このようにして知識を作っていくときは，演繹的な推論がきかないのです。新しい事柄というのは，より一般化したものを自分で生みだし，作らなければいけないわけですから，なかなかうまくいかないのです。一般的な事柄を分かっていて，下へ下ろす (演繹的) のではなく，反対向きです。そのことの例として，小学校の 5 年の小数の乗法があがっています。例えば，小数のかけ算のことを勉強する前に，普通は整数についてのかけ算について勉強する。それとは反対向きに，小数のかけ算が分かっている人は，整数のかけ算はといえば，その小数の場合の「何点何」という小数点をとった例を，特殊な場合としてやる。しかし，そんな学習はありえません。整数のかけ算，例えば，「63×4」という学習の前に「63×4.3」というような小数のかけ算を勉強する。「×4」を勉強する前に「×4.3」のかけ算の

勉強をしましょうということは普通ありえない。

これは，ある意味で数の範囲の拡張ということで特殊な事例です。整数のかけ算で成り立った考えを有理数の範囲へと一般化しようというわけですから，「整数のとき成り立った。したがって，小数の場合にもこうなる。」というふうには簡単にいかない。というのは，整数の範囲でのかけ算の話と有理数の範囲での話とは別なのです。だから，「×4」から「×4.3」へと拡張するにはどうすればいいか。例えば，「×40」のとき勉強したことからすれば，「×4.3」となったときは，同じように考えて，(結合法則を当てはめて)「ひょっとしたらかける数を10倍すると，積が10倍になる，というきまりをここでも当てはめてもいいんじゃないかな。」と考えるしかないのです。物事を一般化し拡張していくときは，いつもそうです。このベースになっている推論が帰納的な推論と発想的な推論なのです。つまり，子どもがそれをうまく使えるか，使えるならこういうふうにしてうまくいくはずだ。子どもはいかに帰納的な推論や発想的な推論を使いこなせるか。確かに使いこなせるということを実践してみせる必要があるのです。だから，どういうふうな題材を与え，どういうふうな指導助言を加えていけばうまくいくかというのがその次の議論になるのです。

○笠原小学校での実践研究

そこが一番のポイントになってきますので，子どもたちにしてきた簡単な例をお話したいと思います。今からお話しする例は，一番最初にやりましたのは17年くらい前，埼玉県宮代町立笠原小学校6年生の子どもたちです。私自身も授業をやったのです。その学校は，文部省の研究指定を受けて研究を始めるのですけれど，そのとき私が文部省にいて一緒に始めたのです。そのときの校長は白藤先生という方でした。新設間もない学校なので，研究の経験もないし，職員の中に算数を中心にやった人もいない。そういう学校でも，2年間がんばれば最低でもこのくらいできるという何かを作りましょう，ということになりました。先生方はとても若く，平均が30代半ばくらいだったと思います。不思議なくらいにみんながよしやろうという気になっているんです。1回目に私がいろいろお話したら，「そのような勉強会を今までやったことない」と言うから，校長に頼んだんです。なんと私はそれからほとんど毎月その学校に行くことになってしまったのです。

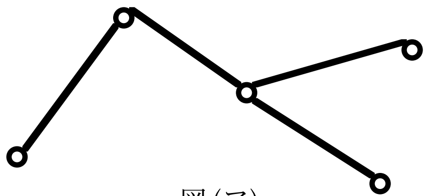
いろいろ思っていることを，実験といえば言葉は悪いんですけれど，いい意味で，新しい試みとしてやってみたいという話をしてみました。ちょうど問題解決についてかなり活発に研究が始まっていた頃でした。それで，笠原小学校でいろいろ実験して得られたことをその本になかに載せています。そして，2年目の研究発表会が近付いてくるのですけれど，そのやりっぷりがあまりにもものすごいんです。毎月の研究会で授業を毎回行う，しかも3時間やるのです。大変ですよ。低，中，高学年から1本ずつ出すのですから。各学年2クラスずつありましたので，数カ月の間には授業をやらない人はいないんです。だれもが1回は授業をやっているのです。研究が始まった最初の頃は，ごく普通の簡単な指導案なのです。昨日，研究会がありましたけど，あのとき出されたくらいの簡単な略案のような指導案なのです。それで私がいろいろ注文をつけると，そのうちだんだん指導案が厚くなってきました。やがてB4の大きさで，1回の研究授業につき，3学年，3クラス分で20枚くらいの厚さになってくるんです。私も徹底して1個1個についてやりましたので，教材研究は半端ではなかったですね。あまりにもみんなが凄まじい勢いでやるもんですから，成果を出さなくてはと思ったんです。5年も経つとB4版の資料をファイルにとじ込んでいくと，ファイルも10冊を越え，30cmくらいの厚さになってしまったんです。これ整理したいと言いましたら校長が宮代町の教育長と相談して，教員の方々の研究のための予算の大半をうちの学校にもらってきたのです。それで予算は十分あると言われたのです。まとめを作り始めたときに，ある出版者の人がそれを聞き付けて，「本にしたらどうですか」というので本にしたら，3巻(理論編，実践編2冊)にもなってしまったのです。その本が大変な好評を受けまして，4版か5版くらいまでいきました。ほとんど宣伝もしていないのですが。

日本中の，北は北海道から南は九州から参観者がものすごく多いのです。普通は2年間で研究を終えるのですけれど，校長が「申し訳ないのですけど，職員がもう少し続けたいといっているので，もう1年お願いしたい」と言うのです。それで私もいろいろまだやり残していることもあるし，こんなことについてもいろいろ実験してみたいなという思いもあって，「3年目や

りましょう」ということになりました。それが次々に継続され，全学年の算数の全内容を対象にするほど徹底し，4年目になりました。4年が経って，5年が経ちまして，結局6年にもなったわけです。1年生の時に入った子は6年生で卒業する歳ですよ。私は毎回のように行っているので，この学校の児童とだんだん親しくなってくるわけです。6年間も一緒にいるので，その6年生に「最後になると思うから記念に私が授業をやってみましょう」ということで始めたのです。

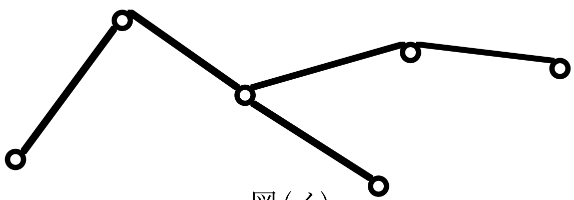
○図形のふしぎなきまり－授業を実践して

その内容ですけれど，「図形のふしぎなきまり」というものです。まず最初に，平面上の点のことを頂点，頂点2つを結んだ線を辺という。このような一番簡単な単純な図形から始めます。一番最初は辺1個だけの図形でもいい。そういうとき，頂点や辺の個数だけ(形や大きさは無視する)に対して，どんなきまりがあるのか。図形(ア)では，頂点が5個あって，辺4つある。



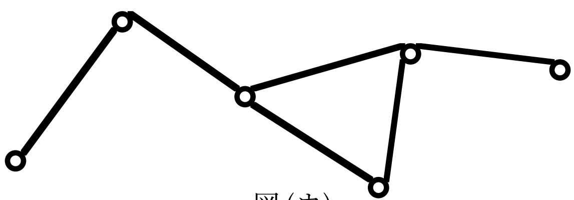
図(ア)

このような具合にして，頂点と辺の個数にどんな決まりがあるか。辺をもう1本増やしてみたとき，図(イ)になったとします。すると，頂



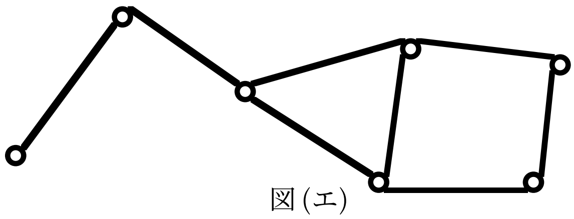
図(イ)

点も辺も1個ずつ増えていきますから，それぞれ6個，5個となります。きまりは，いつも「頂点の数が辺より1多い」と言うふうになっています。そのうち，今度は，図(ウ)のように



図(ウ)

2つの頂点を結んでしまう。こうしますと，頂点の個数は変わらずに辺が1個だけ増える。この図では先のきまり「頂点から辺をひいたら1」というようなきまりが成り立たなくなるのです。さらにもし，図(エ)のようにやったらどうなるか。このとき，頂点が7，辺が8個です(表1)。



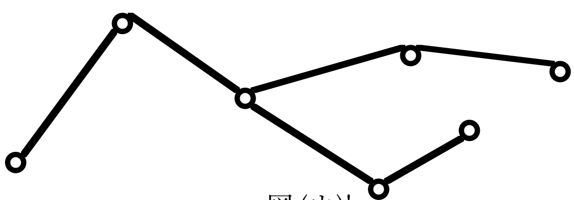
図(エ)

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)
頂点	5	6	6	7
辺	4	5	6	8

表1

このときも先のきまりがうまく成り立たない。図(ア)と(イ)で成り立つきまりと図(ウ)と(エ)でのきまり，こういうふうに分けていくのも1つのアイデアなのですけれど，そうではなくて，先のきまりが成り立たない図(ウ)や(エ)が出てきたときに，それらを含めて成り立つような全体に成り立つ決まりを考えていく。すると，先のきまりではまずい。このきまりではうまくいかないということは，分かる。図(ウ)や(エ)まで入れたときにも成り立つようなきまりというのは，どのように考えれば，作れるのか。これらを包含した，もう少し広いきまりを作る必要があるんです。

こういうときに子どもはどういう発見をするか。子どもの発想がどのように進むのかを問題としたかったのです。これまでのきまりが成り立たなくなった原因は何かというと，例えば，図(イ)のときでいえば，もし，こうなっていれば(図(ウ)')，成り立つわけですね。問題になる



図(ウ)'

のは，ここの辺がこの頂点とこの頂点を結んで閉じてしまった。この図(ウ)'のように開いてなくて，図(ウ)のように閉じてしまったことによっ

て，増えるべき頂点と辺が対になって増えることにはならない。図(ウ)'では対で増えていく。

(頂点)－(辺)＝1

の式で，頂点と辺が１個ずつ増えていくので，この式がいつも成り立つ。ところが図(ウ)では，対で増えるはずだったのに，辺が増えて頂点が増えなかった。このことがきまりを成り立たなくした原因なのです。それで，子どもたちが原因はここにあると。図(エ)もそうだ。図(エ)の右の方を閉じてしまうことによって，おかしなことが起きている。そこで，子どもたちが考えつくのは，閉じてしまったことによって起こったんだから，閉じたところに着目すべきだというのです。これが閉じたことによって新たにできた部分に目をつける。ひよっとしたら，そのことをこの表の下欄にもう１個追加して，新たに「面」(という名前を仮につけます)の個数を追加して考えれば，全体に共通したきまりがあるのではないかというのです。面の個数は図(ア)と(イ)では０で，図(ウ)と(エ)では，それぞれ１と２です(表２)。そうなってくると，

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)
頂点	5	6	6	7
辺	4	5	6	8
面	0	0	1	2

表２

この３つの間の関係として，共通に言えることは何かというふうに考える。このとき，どこが大事かと言いますと，先のきまりが成り立たなくなった原因に着目して，「面」の個数をここに加味すれば，共通したものが作れるのではないか。こういうやり方を発想的推論というのです。もしかして，こういうことを考えれば成り立つのではないか，という一種の仮説を立てる。このような推論は，子どもは非常に得意なはずなのです。うまくできるということを知りたかったのです。ところが，実際に授業を行うとき，自分としては実験的なことをやりたかったんですけれど，教室に行ったら，大勢参観者が来ている。子どもは緊張しており，いつものように伸び伸びとやってくれない。しばらく待っても，「面」について思いつかない。これは参ったなあと思ったんです。2時間続きの授業の第１時の終末段階に近づいてきた。これが次時では立体の話へと進んでいくのですけれど，とても予定通りには進められそうにないと思い始めました。多分30人くらいの方が見学していらっしゃって，子どもにしたら必死になって，こういろいろやってくれている訳です。誰か何か思いつく人はいるかもしれないと，期待しつつも，半ばあきらめもありました。その中で，図(ウ)で頂点を結んで閉じちゃったからいけないんだ。離れていればいい，ここが問題だってことに目をつけた子どもがいました。ところが，残念ながら，その個数に目がいかないわけで，そこを乗り越えられない。私はもうこれは観念して，私の方で説明するしかないと思ったのです。ところが，ある参観者の方が後ろの席の子どもを指をさして私に合図を送っている。「この子がいろいろやってる」と指さして教えてくれました。「あの子が何かやっているのだな」と思いました。そこで，私は「何でもいいから思いついたことをやってみませんか」と，もう一度だけ最後に言ったんです。そうしたら，その指さされた子が，きっと何か参観者の人が「あなたの言ってみなさいよ」と言ったかもしれないです。M.S.さんという女児です。どうせだめだろうなってあきらめ気味だったんですけれど。もしかしたらと思って指名したら，こんなことを言ったのです。「ばらばらではだめなので，全部を通したきまりっていうのを見つけると，前に言った(頂点)－(辺)＝１の関係ではとにかくだめなんです。それで，新たにできた形の三角形や四角形の個数もいれてみるとうまくいくと思う。」と言うのです。「うまくいくっていうのは，どういうふうにしてうまくいくの？」と聞くと，こう言ったのです。「表(表２)の一番上の数と一番下の数を足して真ん中を引くといつも１になる。」と言ったのです。図(エ)では７と２を足して９，真ん中の８を引いて１です。図(ウ)では，６と１を足して真ん中の６を引けば１です。図(ア)でも(イ)でも成り立ちます。「どうですか」と聞くと，何人かの子どもたちは，びっくりしたと同時にうなずいて，「なるほど」と言うのです。「本当かな？」と聞くと，その学級の子たちはよく訓練ができていまして，すぐ試してみるのです。自分で違う図形を作って数えてみるのです。何人かが「試してみたけれど，Sさんの言う通りだ。こういう図形を作ってみても，これ(頂点)とこれ(面)を足して真ん中(辺)を引けば１になる。」と言うのです。頂点から辺を引くとマイナスになるものですから，子どもはそれを避けて，面を足してから辺を引

くと言ったのです。要するに，

(頂点)−(辺)＋(面)＝1

という関係を導いてくるのです。このとき，「もしかすると，こうしたらこうなるかもしれない」という仮説を思い切って立てながらやってみるのです。考えてみますと，子どもたちは学習活動ではいつも本当に乏しい知識や経験しかないのに，それらを基にして次々に新しいものへと広げていきます。そういうときは思い切ってやってみるしかないのです。思い切ってそうかもしれないと思って，ひょっとしたらうまくいくかもしれないと思って，いつもそう思いながら，自分の持っているものをどんどん広げていく努力をして，新しいものが分かってくるのです。最初は (頂点) −(辺) ＝1 でしたでしょ。今度は１個次元が上がって，

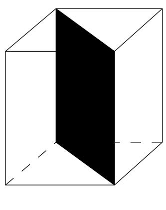
(頂点)−(辺)＋(面)＝1

までできたのです。当然，立体の方まで進めていきますと，この式を含んで，さらに一般化していくわけです。

今度は，立体，三次元空間へいく。直方体のようなものを考え，その箱の形のフタ (一つの面) をとった形を考えると，これまでと同じ関係が成り立つ。ところが，フタを閉じてしまうと，囲まれた空間ができます。すると，これまでの関係は成り立たないのです。これはオイラーの定理です。頂点−辺＋面＝2 になります。ところが，そのできた囲まれた空間の個数を含めて考えると，

(頂点)−(辺)＋(面)−(空間 $)^3$＝1

になるのです。(囲まれた空間の個数が１個の場合は，オイラーの多面体定理です)。この関係は囲まれた空間の個数が１個でなくて，2 個以上の場合に当てはめると分かります。直方体の真ん中に１個境を入れてみると，囲まれた空間が２つできます。そういう立体を作っても，この関係は成り立つのです (右図参照)。



子どもがすごいのは，これからです。2 時間目の授業も終わりに近づきました。「次元」という言葉は知っていますかと聞いたら，「4次元」と言うのです。そこで，次元について説明しました。頂点が０次元，辺が１次元，面が２次元で，空間３が３次元とです。もし今言った４次元という世界があったとしたら，これまでの関係はどうなるでしょうか。今度は３次元空間によって仕切られた部分の個数が追加されます。つまり，

(頂点)−(辺)＋(面)−(空間$)^3$□(空間$)^4$＝1

という関係が成り立ちます。右辺はいつも１だった。これが成り立つように考えるとしたら，□の中に入る演算についてどんなことがいえると思うか。そうしたら，最初の (頂点) は＋だといって，順に−，＋，−だから，□の中は＋だと思うというのです。つまり，「多分，(空間４) を足せば言えるのではないか」と言うのです。まだこの先も，5 次元になってもいえるかというと，子どもたちは当然と言わんばかりに「いえる」というのです。子どもはイメージの中で，ここから先は帰納的に推論していくのです。多分，この後こうなっていくだろうと。これは，後から知ったんですけれど，授業後に２つの質問が出された。その１つは「この定理を作った人は誰か？」という質問です。それはポアンカレなのです。S さんは，私に重大な課題を１つ与えてくれました。2 つ目の質問で，それは何かというと「この右辺の１っていうのは何ですか。」というものです。私もこのことについて考えたことがありませんでしたので「1 は，ただの１ではないか」と思ったのですけれど，それではまずいなと思い直しまして，1 は何だろうと考えました。それから私は必死になって「1 は何だ，なぜ1 なんだ」と思っていろいろ研究，検討したんです。今日の宿題に残しておきますので，みなさんもぜひこの質問について考えてみて下さい。「右辺の1っていうのは何ですか？」ということを考えてみて下さい。きっとおもしろいと思います。

予定の時刻を大分過ぎてしまったのですが，まあこんなことをやりながら楽しんでいます。子どものすばらしさに感動したのです。これで私の研究の紹介にかえさせていただきます。どうも御静聴ありがとうございました。

講演日：2001 年５月９日
会場：鳥取大学教育地域科学部附属教育実践総合センター
記録者：種本将明，松田由香里，山脇雅也，和田達次

(いとう・せつろう，東京学芸大学数学・情報科学科数学教育研究室)