卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究，第８号，２００６】

# 数学的問題解決における振り返る活動についての考察

東　香里
指導教員：溝口達也

## Ⅰ．研究の目的と方法

本研究は生徒が問題解決の過程で、自分の活動を見直す「振り返る活動」を取り入れることで、活動を取り入れない場合とどのような違いがあり、どのような価値を見出すことができるのかを考察する。また、その指導で生徒に得て欲しいと期待することは何かを考察し、教師はどのように振り返る活動を生徒に指導すればよいのかを考察する。よって次の課題を設定する。

【課題１】振り返る活動の枠組みとは
【課題２】振り返る活動の場面とは
【課題３】教師の振り返る活動に対する指導の方法とは

課題１について、先行研究より G.Polya 氏の「問題解決の４つの相」と、F.K.Lester 氏の「記述的モデル」の考察をすることで、問題解決の過程を捉え振り返る活動の枠組みを構成する。

課題２について、課題１で得られた振り返る活動の枠組みを基にそれぞれの振り返る活動に対する指導の目的・対象・方法を考察する。

課題３について、具体的な問題解決の場面を通して、振り返る活動が行われることでどのような学習の高まりがみられ、具体的にどのような指導を行えばよいかを示す。

## Ⅱ．本論文の構成



（１ページ 35 字×35 行，56 ページ）

## Ⅲ．研究の概要

３．１　【課題１】振り返る活動の枠組み

振り返る活動をつかむために先行研究を考察することから始めた。問題解決過程の各段階を把握し、その中で振り返る活動がどのように位置付けられているか考察するために、G.Polya 氏の問題解決の ４ つの相を各段階ごとに考察し、振り返ってみることは次のような段階であると捉えた。

- 正当性を高める段階
- 他者と自分の違いや共通点を考えたり、問題や解法の関連を捉える段階
- 結果や方法を一般化する段階
- 得られた結果や方法を試す段階

Polya 氏の問題解決の ４ つの相について次のような特徴が見られた。

・４つの相は相互に関連を持ち、各相を行き来しながら進行する
・生徒の思考に作用する問いは、教師が生徒の活動を促すためのきっかけ作りとして有効
・４つの相は、およそ生徒の思考過程で行われるであろうことを述べているが、思考の流れまで捉えられない

具体的な問題解決のどの場面で、これらの活動を行えばよいのか、生徒に困難が生じやすいと考えられる場面はどのようなときなのか、などについて４つの相を検討するだけでは不十分であると考えた。

このことから、生徒の思考の流れを考察する必要があると考え、まず、成功的な解決を行う生徒の思考過程を捉え、その中で成功的な解決に至らなかった生徒は、どの段階で解決に困難を生じているのかを見出し、その困難が振り返ることで解決できるものであるかを判断した上で、振り返る活動の枠組みを捉えたいと考え、生徒の思考の流れについての先行研究として Lester 氏の記述的モデルについて考察することにした。

考察から、生徒は問題を把握し、問題を解くための手順を考える段階からつまづくようになり、つまづくから生徒は振り返ろうと考えると考えられる。つまり、この段階から振り返る活動は取り入れられるべきであると考えた。生徒が解決過程中に振り返ろうとするきっかけはつまづきであり、結果が出た後は、正しさを確認し、その正当性を検証しようという活動を契機に行われていると捉えた。問題が解決した後には、各段階が進んでいくときに出てきた「問い」に対して答えを見つけ、その段階が本当に正しかったのか検証する活動として捉えることができると考えた。

これらの先行研究を踏まえて、問題解決の流れ、その中で期待する解決能力とその能力を必要とする相(Lester 氏の記述的モデルでは Stage 以下は相で略す)、生徒の思考過程をまとめた。

これより、自力解決の各相における生徒の振り返る活動に期待する能力と、解決終了後の練り上げの段階において生徒に期待する能力は異なっていること、振り返る活動は大きく分けて問題を解決する中で見られるものと問題が解決した後で見られるものとがあることが分かった。

よってこれらの振り返る活動はそれぞれの目的に応じて考察すべきであることがわかった。

### 3．2【課題２】振り返る活動の場面の捉え方について

課題１より、振り返る活動には大きく分けて二つ考えられる。

一つ目は『問題解決過程における振り返る活動』である。これは問題提示され、生徒が自力解決を行う段階に行われる振り返る活動とした。

この段階での目的は、下記の表にまとめた。また、対象を考えると、生徒は自力解決、つまり個人の解決を行う段階であることから、指導の対象は個人の解法になる。方法は振り返る指導の目的を考察することでこの目的を達成するための指導方法を提案した。

この振り返る活動の目的・対象・方法をまとめると以下のようになった。

| | |
|---|---|
| 目的 | ・つまづきを感じたときに、過程を振り返ることで、次の解決の糸口を見つけ、見通しを持つこと<br>・解決を実行し一応の解決が終わった時点で、自らの手段を見直し、解決した結果を振り返ること<br>・他の解法を考えたり、本当にこの解法であっているのか、使った条件は確かであるかなどを一つ一つ確認し正当性を高めること<br>・練り上げに向けて自らの考えをまとめて他の生徒に伝えることができるようにすること |
| 対象 | 個人　／　個人の解決方法 |
| 指導方法 | ○ 補助的発問を用いて問う。<br>・つまづいた段階に気付けるように、各段階の活動を見直すきっかけとして<br>・解答の得られた生徒に対して、説明できるか。正しいと証明できるか。他の方法で解くことができるかなど検討させるため<br>○(練り上げの準備段階として)説明することを意識させて、自分の活動をまとめさせる(ノート)。 |

二つ目は『問題解決終了後にみられる振り返る活動』である。この段階は、自力解決が終了し、授業の内容を練り上げていく集団討議の段

階とした。

この段階での目的は、同様に下記の表にまとめた。また、対象を考えると、授業の中で正とそれぞれの考えを持ちより高めていく場であり、生徒全員が対象となる。全ての生徒の中から、本時において代表的な生徒を抽出し（抽出児）その生徒の解法を検討の対象とする。方法は振り返る指導の目的を考察することでこの目的を達成するための指導方法を提案した。

一つ目と同様にまとめると、

| | |
|---|---|
| 目的 | ・自分の成果をもとに、どのような考え方や手順を用いて解決したのかを話し合わせ(発表させ)よりよい解決を作ること<br>・各解答や問題の関連を掴むこと<br>・一般化すること<br>・考えた解決をためすこと<br>・次を意識すること |
| 対象 | 集団　／　本時の問題の代表的な解法をしている生徒(抽出児)の解決方法 |
| 指導方法 | ○ 生徒に発表させる<br>・特徴(類似点・相違点)や工夫しているところを取り上げる<br>・重要な部分を意識させる<br>・分かりなおす活動<br>○ 一般化を促す<br>○ まとめる<br>・新たな問題に対面したときに、ひとつの手段として活用できる知識・技能に高めさせる<br>○ 試させる<br>・得られた結果や方法を他の問題に応用させる<br>○ 次時への意識付けをする |

具体的な指導方法は、課題３で述べる。

### 3. 3【課題３】教師の振り返る活動に対する指導の方法について

次のような問題を考える。

> 与えられた整数ｎが斜辺であるような、辺が整数の直角三角形はあるか？

斜辺が与えられたｎで残りの二辺の長さをＡとＢ(Ａ＞Ｂ)とすると、既習事項から、三平方の定理より、次のような式を作ることができる。

$N^2=A^2+B^2 (0<B\leqq A<n)$

このｎが与えられているからｎに幾つかの数を代入し試してみると、次のような結果が得られる。

> $N^2=A^2+B^2$　$(0<B\leqq A<n)$となる。
> この式にｎを代入すると、
> ｎ＝５のとき
> 　$25=A^2+B^2$
> このときＡとＢに使える数字は、16　9　4　1であり
> 　ｎ＝５のときＡ＝４、Ｂ＝３で作ることができる。
> ｎ＝６のとき
> $36=A^2+B^2$
> このときＡとＢに使える数字は、25　16　9　4　1であり
> ｎ＝６のときはつくれない。
> このように幾つかの場合について調べていくと、
> ｎ＝５，10，13，15，17，29…のときにできることがわかる。

このような解決を行った生徒に対して、活動の中から考えられたことから関連性をつかみ、もっと簡単なことばで簡潔にまとめさせるために「出てきた数には何か関係が無いだろうか？例えば規則性のような。」と問いかけたり、根拠を考えさせるために、「どう考えたのかな。ｎ＝５はできるけれどｎ＝６はできないのはなぜだろう。」など、発問による指導を行うことが有効であると考えられる。

また、さらに解決を検討させると、

> ｎ＝10，15についてはｎ＝５の相似な三角形であるためなのでｎ＝５と同じと考えることができる。
> すると残りの数についてある仮定が立つ。
>
> > Ｎは奇数である。
> > 　　素数である。
> > または奇数の素数である

問題をここまで言い換えることができるようになる。

さらに、「素数はどんなときに斜辺になるのか

な」「どんなときにならないのかな」「この２つの場合の違いは何だろう」ということを練り上げる。
その結果、
「二組の素数に分けられる
　　三角形ができる　　　5、13、17、29・・・
　　三角形ができない　 3、7、11、19・・・
これらの組は差分が４の倍数になっている。
　　⇒4 で割り切れる
できる組　４ｎ＋１　できない組　４ｎ＋３
つまり、４ｎ＋１なる形の素数はただ１つの整数の直角三角形の斜辺である。４ｎ＋３なる形の素数はそのような三角形の斜辺にはならない。」
と、与えられた問題から三角形を導き出す規則性まで見出すことができ、さらにそれを練り上げることで一般化することもできることがわかった。

## Ⅳ．研究の結果

課題１より、振り返る活動は生徒の問題解決過程のあらゆるところで見られる活動であり、各解決過程の様相に合わせて効果的に導入することができるならば、解決を助けるはたらきを持つということ、生徒は問題を把握し問題を解くための手順を考える段階からつまづくようになり、そのつまづきが振り返ろうとするきっかけとなること、問題が解決した後にも各段階が進んでいくときに出てきた「問い」に対して答えを見つけ、その段階が本当に正しかったのか検証する活動があることが得られた。よって振り返る活動を「問題解決過程の振り返る活動」「問題解決終了後の振り返る活動」の大きく２つに分類した。

課題２では課題１で分類した振り返る活動の特徴を考察し、それぞれの振り返る活動の教師の指導目的・指導対象・指導方法をまとめた。

課題３では具体的な問題を設定し問題解決の場面で教師はどのような指導を行うとよいのかを示し、その中で振り返る価値を見出した。問題解決過程における振り返る活動は、つまづきへの解決の糸口を得たり、問題の中で、自分がどこでつまづき、どのように戻れば問題の解決に向かうか問題の解決能力を高めたり、解法の正当性を高めるという価値があり、問題解決終了後の振り返る活動には、問題解決の方法や結果を全員が共有し、新たな問題の手順として活動する起点のはたらきを持ち、この活動を習慣付けることでより数学的な考え方をはぐくむことができる。

## Ⅴ．主要引用・参考文献


・『いかにして問題を解くか』柿内賢信訳　G. Polya 著　(丸善株式会社　1954)
・『数学の問題の発見的解き方１』G.Polya 著　柴垣和三雄　金山靖　訳(みすず書房　1967)
・『数学の問題の発見的解き方２』G.Polya 著　柴垣和三雄　金山靖　訳(みすず書房　1967)
・『算数科・新しい問題解決の指導　基礎編』伊藤説朗　白藤重勝　編著（東洋館出版社 1987)
・『算数科・新しい問題解決の指導　実践編下学年』伊藤説朗　白藤重勝　編著（東洋館出版社 1987)
・『算数科・新しい問題解決の指導　実践編上学年』伊藤説朗　白藤重勝　編著（東洋館出版社 1987)
・『生徒の問題解決における「振り返ってみる活動」に関する一考察』高橋のぞみ(第 23 回数学教育論文発表会論文集ｐ.261～266