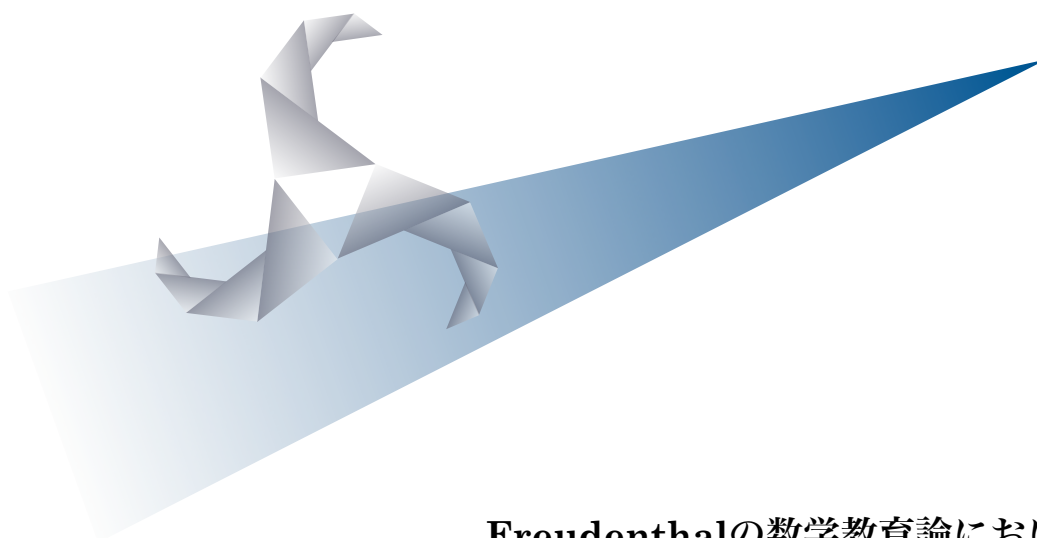




鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

ISSN : 1881-6134



Freudenthalの数学教育論における一考察
-基底的概念の検討を通して-

塩見拓博

vol.10, no.7

Jan. 2008

Site URL : <http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html>

鳥取大学 数学教育学研究室

Freudenthal の数学教育論における一考察

—基底的概念の検討を通して—

塩見拓博

鳥取大学地域学研究科

1. 研究の目的

本研究の目的は、Freudenthal の数学教育論を「基底的概念」という観点によって、根底にどのような概念が位置づくかを検討することである。

このために、本研究では、まず先行研究における評価と問題点を述べ、続いて、Freudenthal の数学教育論を体系化するための視点として「基底的概念」という枠組みを提案する。その上で本研究の課題とその意義を述べる。

2. 先行研究の評価と問題点

2.1. RME における「現実的な文脈」の位置づけ

先行研究(小林, 2006)では、実践に現実事象を取り入れることを目的とし、現実事象の文脈を持つ問題の探求が学習過程の最初に位置づけられている。‘Realistic Mathematics Education’ (RME) を手がかりにした研究がある。そこでは、現実事象が「数学化」することを学習させるために位置づけられており、文脈が持つべき条件として、「典型的」(paradigmatic)でなければならないことが明らかにされてきた。ここでいう文脈とは、現実世界のものに加え、数学自身も含む問題状況を指し、「典型的」とは以下の意味で用いられている。

(1) 違う問題を探求するためのモデルになるという意味

(2) 「再発明」される形式的な数学のためのモデルになれるという意味

そして、数学化することを、「現実」と「数学的な経験」を対象として「数学的手段」を用いて組織することととらえている。

また、小林は RME の根底に Freudenthal の「人間の活動としての数学」という数学観が位置づけられており、「数学化すること」を数学教育に求め、教授原理として、「再発明」と「教授学的現象学」が位置づくことも明らかにした。ここでいう「再発明」の『再』は学習者の以前の学習ではなく、人類の歴史を意味している。つまり、学習者が先人たちによる歴史的発展を繰り返すことを意図しているのである。この「再発明」の具体的な学習過程を述べる上で外すことができないのが「教授学的現象学」である。これについて、Freudenthal (1983) は以下のように述べている。

数学的概念、構造、アイデアを、それが組織する手段となる現象との関係において記述するものであり、この組織する手段を教えるために教育に対してこうした現象から始められることを求め、そのための計画を発達させること。

即ち、「再発明」される数学が、組織する手段として生じてくるような現象を探求させることを、学習過程の最初に位置づけたのである。そして、学習過程は水準によって構造化され、活動を「意識化」し「反省」することによって水準が上昇していくことも明らかにされた。

2.2. 教授原理「再発明」の概念変容

他の先行研究として、「再発明」に焦点をあて、この概念をディーンズの「発見学習」との異同により、1960年代前半と1970年代以降における「再発明」の概念変容も含め、明確にした研究を挙げることができる(伊藤, 2006)。ディーンズの「発見学習」では、数学的構造を具体化したゲームを通じ、それ自体では数学の有用性を求めない抽象化が許容されていた。しかもこうした前数学的な活動に重点をおいている。Freudenthal は、発見の対象が子どもにとってまったくなじみのない現代数学の高度な抽象的概念である必要は必ずしもないことを指摘し、自らの数学的活動を反省しない学習過程について批判しているのである。

これは、現実の数学化、さらには数学の数学化という一連の数学化を強調する Freudenthal にとって当然の指摘といえる。そして、数学化を具体化する教授原理である「再発明」の概念変容については以下の通りである。

1960年代前半

水準構造に沿った数学化の活動

1970年代以降

発明者の歴史的足跡ではなく、今日の学習者に合わせて修正され、適切な軌跡へと導かれた歴史の解釈

このように、RME や Freudenthal の観念、原理を取り上げた研究はあるにせよ、その哲学にあたる Freudenthal の観念や原理がどのような連関をもっているかが明確に体系付けられているとはいえない。しかし、そのような研究が今までされていないかというそうではなく、岡田の研究をあげることができる。

2.3. Freudenthal の数学教育論における観念、原理の関連

この岡田(1977, 1978, 1979, 1981)の研究の中では、Freudenthal が数学教育に関する心理学的研究や実践研究の成果についてほとんど関心をはらわない⁽¹⁾ことを述べている。それは、Freudenthal が大域的な組織化を目指すからであり、学習過程が水準によって構造化されること、その移行過程では発見的でなければならないこと、一回限りではない(operational)方法によって組織されなければならないことを明らかにした。この発見的なための道具の一つとして「帰納的外挿法」(図1)を挙げている。

例えば

$3 + 2 = 5$	$3 - 2 = 1$	$3 \cdot 2 = 6$
$3 + 1 = 4$	$3 - 1 = 2$	$3 \cdot 1 = 3$
$3 + 0 = 3$	$3 - 0 = 3$	$3 \cdot 0 = 0$
$3 + (-1) = \square$	$3 - (-1) = \square$	$3 \cdot (-1) = \square$

(図1)

それは、規則性により子どもが直観を離れても計算の答えを発見できることであり、数学者が数学を研究する姿勢の一つでもある。つまり、数学化という活動の強調とも考えられる。また、operational な方法を重視する背景には、Freudenthal が概念の

発生よりもその発展性を重視する教育的観点をみてとることができる。

そして、これらは、Freudenthal が数学を研究する過程を内省して得られる数学の正しい認識に支えられているのである。この数学の認識を教授-学習において強調した言葉が教授学的現象学であり、この立場に立った探求により、どの数学の内容にも共通して成り立つ指導の原理として「再発明 (re-invention)」が構想された。この教授学的現象学という用語では、上述した 2 つの教育的視点を有することに加え、観念、概念、判断の習得について、comprehension による習得（多数例の帰納による習得の方法）と apprehension による習得（一つの例からの習得の方法）で領域をはっきり分離しなければならないことも述べている。さらに、概念指導と演算指導を区別するべきではないということや、直観的水準からアルゴリズム的水準へ移行するときの必要性を認識させなければならないことについても触れている。これらの視点を踏まえて、指導系列も検討しなければならない。つまり、数学的にみると指導内容 A から指導内容 B へという指導系列をとる場合でも、教授学的に見ると必ずしもふさわしい指導系列とは限らないということである。

5 つの教育的視点

- (1) operational な方法での組織
- (2) 発見的でなければならない
- (3) comprehension による習得と apprehension による習得での領域の分離
- (4) 概念指導と演算指導を区別しない
- (5) 直観的水準からアルゴリズム的水準へ移行するときの必要性の認識

(図 2)

Freudenthal はこれを「教授学的逆転」

とよんでおり、指導系列の判断は上述した 5 つの視点（図 2）をもって構成されなければならないのである。

このような教育的視点を持つ教授学的現象学は、数学は現象を整理し、記述するものであるとする数学観や、数学の学習過程を数学化の活動とみる数学教育観に支えられているのである。

そして、このような立場を背景に持つ指導原理が re-invention であるが、この指導原理が re-discovery とならない理由について、岡田 (1978) は以下の 3 点を挙げている。

- (1) discovery が何か偉大なもの、誰も気づいていないものを見つけだすというセンセーショナルな響きをもっているため
- (2) re-discovery では、教師の誘導尋問により、子どもがすでに知っていることを想起させるという、ソクラテスの方法を思い浮かべる。これでは数学の学習の範囲が極めて制限されるため
- (3) 数学教育の目標が、文化遺産の伝達にあるという考え方が氏の数学教育観と矛盾していると考えられるため

このような観点から Freudenthal は「再発明 (re-invention)」を用いているのである。では何を再発明するのであろうか。

「ここに van Hiele の学習水準理論が登場するのである。van Hiele は、幾何の学習過程を研究して、学習過程には、視点がまったく異なる学習水準があることを示した。第 0 水準では、子供は身のまわりのものから図形を見い出す。第 1 水準では、第 0 水準で見い出した図形を学習の対象とし、そ

これらの性質を見い出す。第2水準では、第1水準で見い出した図形の性質を学習の対象とし、性質間の関連を見い出す。第3水準では、性質間の関連を学習の対象とし、その論理的関係を見い出す。第4水準では、論理的関係そのものを学習の対象とするというものである。」(岡田, 1978, p108)

Freudenthal もこのような学習過程に賛同しており、水準上昇における中心的概念を「中心転換」という用語で表している。これは、子どもが以前に無意識に経験してきたことを意識化することであり、この意識化が水準上昇の必要性ともなるのである。このことから、再発明すべき事柄とは、1つ前の水準において学習した内容を整理する手段であったことがら、それを、次の水準で学習の対象として見つけ出すこと、つまり、意識化されたものがもつ数学的性質を指すのである。

そして、この水準移行に対して、「Piaget は、1つの水準から次の水準への移行が主として子どもの成熟を待つ姿勢をとる」(L. S. Shulman(1970), 訳 岡田(1978))のに対して、Freudenthal は積極的に移行の必要性を子どもに認識させる努力をするということを強調している。このことから、教師の創意工夫による積極的な学習過程への参加のもとで、re-invention という指導の原理が生きてくると考えられるのである。

このように、Freudenthal は不連続性⁽²⁾こそ学習過程の本質であり、この本質をふまえた指導こそ、数学教育の方法論の出発点となると考えているのである。

岡田(1977, 1978)は Freudenthal が数学教育の現状に対して述べた諸批判を検討す

ることによって氏の数学教育論を明らかにしてきたが、岡田自身も「氏の数学教育論を構想すると思われる小部分をいくつか検討したにすぎなかった」と述べるように、Freudenthal の諸観念や原理の連関が必ずしも明確になっているとはいえないのである。しかし、岡田(1979)は、re-invention という指導原理を中心として、それを支える概念を分析することにより、Freudenthal の数学教育論をいわば global に把握しようとした。ところが、この研究においてさえ、local にとらえたものと global にとらえたものの間をうめていくという課題が残されているのである。

3. 体系化するための観点-「基底的観念」-

そこで、教育論として体系化されている研究として、大高(1998)に着目した。大高は、ヴァーゲンシャインの科学教育論を、氏が「自然科学の陶冶価値をどのように認識したか、これを中核にして、基底的観念(科学観—特にアスペクト性—、自然観、人間観・子ども観、陶冶観)—自然科学の陶冶価値認識—科学教授の目的・目標論—科学教授論(教授原理—教授過程の構成と展開—教材研究)の相互関連とそれぞれの意味内容とを明らかにする」ことにより体系付けている。なぜこのようにするかというと、ヴァーゲンシャインの思想を体系化する際の中心的対象になるのは、その科学教授論である。

そして「教授論は一般に陶冶価値を実現する手段についての理論の総体と理解される」。そうであれば、科学教授論は自然科学の陶冶価値の認識とのかかわりの中で最も根底から理解され、体系化されるからである。そして、「自然科学の「陶冶価値認識」

にせよ、「科学教授論」にせよ、その根底には氏の「基底の観念」がある。したがって、「基底の観念」とのかかわりの中ではじめて氏の科学教育論を構成するそれぞれの概念や原理等が正しく理解されうるからである。」(大高, *ibid*)

このようなことから大高は、「基底の観念」、「陶冶価値」という基本的視点をを用いるわけであるが、さらに、科学教育論全体を構造的体系的にとらえるため、という意図もある。

ヴァーゲンシャイン自身は、1970 年前後に、「物理学の『アスペクト性⁽³⁾』についての科学論的洞察(wissenschaftstheoretische Einsicht)に由来する私の教育学的結論ないし、『アスペクト性』の承認は私の立場の基本であると、自分の教育論の基本的立場を明言している。」(大高, *ibid*) 上述した事柄と重複するところもあるが、このことから、ヴァーゲンシャインの科学教育論は、このアスペクト性のテーゼとのかかわりの中で体系的にとらえられうるし、また、とらえるべきである。さらに、物理学のアスペクト性を認識することが、ヴァーゲンシャインの科学教育論において、物理学による陶冶作用成立の必須要件ともなっているのである。ゆえに大高は上記の基本的視点を採用するのである。

このような視点から、岡田の研究をみても。岡田(1977, 1978)は Freudenthal が数学教育の現状に対して述べた諸批判を検討することによって氏の数学教育論を明らかにしてきた。そして、岡田(1979)は、re-invention という指導原理を教育論の軸として、それを支える概念を分析することにより論を展開していった。しかし、

Freudenthal 数学教育論の基本的立場にあたるであろう「人間の活動としての数学」というものがクローズアップされていない。つまり、「人間の活動としての数学」をどのようにとらえるか、どのように位置づけるかという点には触れていないのである。

私は、先の「基底の観念」「陶冶価値」という枠組みに加え「人間の活動としての数学」という立場をクローズアップさせることにより、Freudenthal 数学教育論の体系化を図りたい。そして、そうすることが Freudenthal の数学教育論を global に把握するための一つの手立てとなると考えている。

4. 研究の意義と研究課題

先ほどから述べているように、このような「基底の観念」、「陶冶価値」という視点を取り入れることで、Freudenthal の数学教育論を体系化する際に大域的な組織化が可能になると考える。その意義は、わが国の数学教育研究が「いかに教えるべきか」という教授方法的研究に主たる関心があり、そうした研究では数学教育の根底にある数学の教育的意義まで見通すことは稀であるという点にある。Freudenthal が見るであろう数学の「陶冶作用」がわが国に即したものであるならば、「数学的な見方・考え方」の育成や、近年強調されている「生きる力」の育成に対して、例えば Freudenthal の「数学化」という概念や、「再発明」という教授原理から示唆を得ようとする際、それらを用いる意義を示せることになり、それらの内容からも有効な示唆を得ることができる。

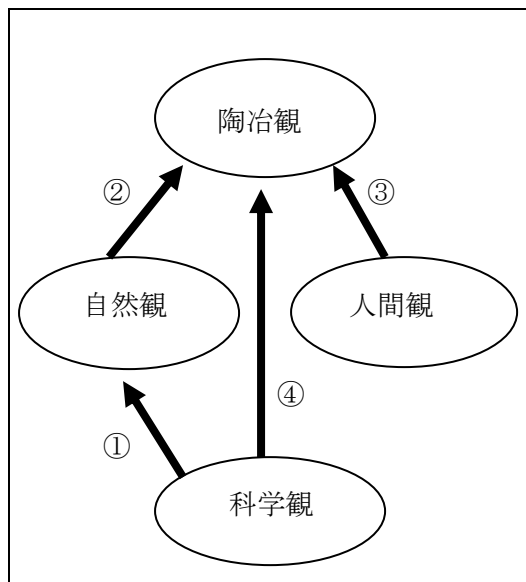
そのため、大高の論理を Freudenthal の数学教育論を構想するガイドラインとする上で、大高が用いる諸「基底の観念」が

Freudenthal の場合にもうまく符合するかどうかの検討が要請される。

今後研究を進めていく上で以下のような研究課題が考えられる。

- ・ Freudenthal 数学教育論における「基本的観念」の内容ではどのようなことが語られなければならないか（内容の検討）
- ・ 「基本的観念」の内容を受け、その内容の関連や氏の言明から、Freudenthal が数学の「陶冶価値」をどのように認識するかを検討する

5. 結語ー研究の着手に向けてー



(図3)

ヴァーゲンシャイン科学教育論における諸基底観念は図3のように関連づけられる。そして、これら観念間は以下のように関連づけられている。

- ①物理学の対象である自然を基本的立場からみることにより、科学教育論上で物理学の対象である自然の真意が解せる。
- ②科学観の中で中心的に語られていることは、アスペクト性であり、このアスペク

トで見ることによって自然が変容する。それにもかかわらず、いつでも誰にでも同じく答えてくれる自然に対し、信頼・畏敬の念をいただくのである。そして、自然に対するこのような認識を作り出すことができる自分を認識することにより、自己信頼が強化されるのである。ここでは、物理学の対象を分析することにより、物理学の陶冶価値を導く基礎を成しているのである。

- ③ヴァーゲンシャインは子どもを生まれつき学ぶことを欲するものであるとする。そして、子どもは研究する存在そのものであるとする。このことにより、自然科学の研究が人間の本質に属しているとするのである。ここでは、陶冶が人間の変容に関わることであるため、その基礎を成していると考えられる。
- ④物理学が常に生成過程にあるという物理学観から、状態ではなく、プロセスとしての陶冶が語られるのである。

本研究においては、このような諸基底観念の枠組みが数学教育の文脈においても使用可能かどうかを検討する。

まず、人間観・子ども観、陶冶観について検討する。本研究では、数学の陶冶価値を中核におき、数学教育論を語ろうとしている。それは、教授論が一般に陶冶価値を実現するための理論の総体と理解されるからである。そして、陶冶とは、人間形成に関わるものである。ゆえに、このような陶冶を語ろうとするとき、人間・子どもをどのようにとらえているかを述べることは、どの教科をもってきても当然必要なのである。さらに、語「陶冶」をどのようにとらえるかにはじまり、人間観からの帰結を含

む、陶冶一般について語られている陶冶観についても同様に必要なのである。そして、数学教育の文脈においても、人間観、陶冶観のこの関連は保存されるのである。

自然観についてはどうだろうか。ここでは、物理学の対象である自然について語られていた。これを数学教育の文脈に置き換えるなら、数学の対象である何かについて語る必要があるかどうかということを考えなければならないということである。その何かとは、数学教育のどの場面においても数学の対象となるものであるため、数学教育に関することは何であってもその対象との関連で述べられなければならない。ゆえに、数学教育論の基底的観念においても、この対象について述べるが必要となるわけであり、その対象について述べていくことが数学の陶冶価値を語る上での足がかりともなるのである。

最後に科学観について、この科学観では、ヴァーゲンシャインの科学教育論における基本的立場であるアスペクト性について語られている。そして、この基本的立場を明らかにしていくことが、物理学の対象、その対象である自然、さらに陶冶論を紐解く鍵となっているのである。このように、科学観の中では、ヴァーゲンシャインが科学教育に携わるにあたり、氏がどのような哲学をもっているかが述べられているのである。これは、数学教育の文脈においても当然必要なこととして考えられる。そして、数学の対象であろうと、陶冶論であろうと、最も基底にある、Freudenthal の数学教育に対する哲学との関連で語られるはずなのである。

以上から、図3の枠組みは数学教育の文脈でも使用可能である。しかし、科学観、

自然観という観念は、数学教育の文脈においてふさわしくない。そこで、Freudenthal の数学教育論における基底的観念となるように、科学観、自然観という観念を適切に言い換えるという課題が要請されるのである。

科学観の言い換えは、Freudenthal の数学教育について述べられている資料において、基本的立場にあたるであろう「人間の活動としての数学」という観念や、教授学的現象学という基本的姿勢により、数学の陶冶価値を導くことができるかどうかを検討する。2次資料(Freudenthal と共に仕事をした人物の資料)、3次資料(その他の資料)において数学の陶冶価値について述べられているのならば、それを参考にしようと考えていたが、そのような資料は見つけられていない。また、ブラウアーや直観主義をどのように扱っていくかが課題として残っている。

自然観の言い換えは、数学のどの場面でも数学の対象となりえる対象について、「数学化」や「学習水準論」から考察する。なぜなら、Freudenthal は学習過程が水準によって構造化されると述べ、活動を「意識化」し「反省」することにより水準の上昇が図られると述べる。ここから、数学のすべての場面で数学の対象となるものを「活動」とであると定めることができそうである。そして、その活動とは「数学化」である。

しかし、現象と活動の関連を明確にする必要がある。つまり、氏は学習の始めに「現実を数学化」する場面を位置づけている。具体的には、「数は量の現象を整理し組織する。いっそう高いレベルでは、幾何図形の現象は、幾何の作図と証明の手段によって

整理し組織され、「数」現象は十進法の手段によって整理し組織される」と述べるように、数学の学習過程には現象もからんでくる。これらの位置づけを考察しなければならぬ。

人間観・子ども観については、Freudenthal が人間・子どもについて述べる内容について検討しながら、「人間が完全なままでいられるところでは、分裂させられるべきではない(49)」とヴァーゲンシャインが述べるのが Freudenthal の数学教育論における人間観・子ども観ともなるかどうかを考察する。

陶冶観については今後の検討課題である。

注および、主要引用・参考文献

(1) 関心をはらわない

Freudenthal は、数学教育に関する心理学的研究や実践研究の成果についてほとんど関心をはらわない。それは、こういった研究では、具体的な指導方法が明示されることが少なく、研究の領域が局所的な研究に限定されるからである。

(2) 不連続性

上述した中心転換という概念から、学習過程をみてみると、1つの水準から次の水準に移行するとき、学習の対象が全く変わってくる。このことから学習過程を不連続な移行とする。

(3) アスペクト性 Aspekt : 観方

物理学は人間と不可分に結びついているということであり、物理学を物理学として教授することを求めている。つまり、物理学が自然を見る一つのアスペクトにすぎないということであり、この用語には、アスペクトの結

果である物理学の自然像が本来的な自然の模写ではないという命題も含まれている。

大高泉 (1998). ドイツ科学教育論研究. 共同出版.

小林廉 (2006). 「数学化すること」を重視した授業設計に関する研究 : Realistic Mathematics Education を手がかりとして. 数学教育論文発表会論文集, 39, 721-726.

伊藤伸也 (2006). H. フロイデンタールの教授原理「追発明」と「発見学習」の異同. 数学教育論文発表会論文集, 39, 625-630.

岡田ヨシ(衣偏に章)雄 (1977). H. Freudenthal の数学教育論(I). 広島大学教育学部紀要, 3(26), 1-9.

岡田ヨシ(衣偏に章)雄 (1978). H. Freudenthal の数学教育論(II). 広島大学教育学部紀要, 2(1), 103-110.

岡田ヨシ(衣偏に章)雄 (1979). H. Freudenthal の数学教育論(III). 広島大学教育学部紀要, 2(2), 81-86.

岡田ヨシ(衣偏に章)雄 (1981). H. Freudenthal の教授学的現象学の概念. 数学教育学研究紀要, 7, 53-55.

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to be Useful, *E. S. M.*, 1(1/2)

Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea, *E. S. M.*, 3(3/4)

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task, D. Reidel.

編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 tsyabe@rstu.jp

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 mizoguci@rstu.jp

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
 - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
 - 算数・数学教育に係わる、理論的、実践的研究論文／報告
 - 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
 - その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDFとします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー（vol.9以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101（溝口）

<http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/>

