高潮の河川遡上に関する理論

矢　野　勝　正

THEORETICAL RESEARCH ON THE SURGING PHENOMENA OF THE HIGH TIDE BY THE TYPHOON INTO THE RIVERS AND CANALS

by Dr. Eng. Katsumasa YANO

Synopsis

Basing on the data of the Ise-Bay Typhoon, when the records of the travelling-up phenomena of the high tide into the Kiso-River and others were clearly recognized, the author tried to solve their phenomena theoretically and found some interesting characteristics, by solving the differential equations by means of Rieman integral method.

1. 基礎方程式

昭和34年9月26日に伊勢湾にわが国有史以来まれにみる大台風が襲つた。そのとき伊勢湾に注ぐ木曽川，揖斐川，長良川等の諸河川に相当顕著な高潮遡上現象が記録された。この記録は非常に珍しく且興味あるもので，遡上現象そのものは別に珍しいことでもないが従来明確な記録がなかなかとれなかつたので理論的研究の実証も困難であつた。著者はかつてジェーン台風による大阪市内河川への高潮遡上の実験を試みたことがあつたが，今回はこれらの資料を基礎にして若干の理論解を試みてみた。

従来潮汐の河川遡上の研究は楠[1]，物部[2]，岡本[3] 等の人々によつて行われてきているが，高潮の遡上問題については市栄[4] 博士が Laplace 転換による理論解を提案している程度にすぎない。

著者は遡上流の抵抗が速度の1乗及び2乗に比例する場合について，夫々その解を Rieman 積分法で試みてみた。

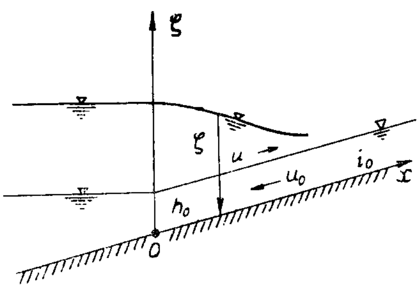

Fig. 1　Notation Diagram

ここでは抵抗が速度の1乗に比例するとして，河床勾配i_0の河川に，高潮発生以前には水深 h_0, 流速u_0の定常流があつたとして，そこに高潮の遡上によつて水位変動 $\zeta(x, t)$ 及び速度 $u(x, t)$ が発生したものとしてその解を求めた。x 座標を **Fig. 1** のように河床に上流向きにとると，運動方程式は

$$\frac{\partial(u-u_0)}{\partial t}+(u-u_0)\frac{\partial(u-u_0)}{\partial x}=-fg\frac{u-u_0}{\zeta+h_0}-g\left(i_0+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) \quad \cdots\cdots(1.1)$$

連続の方程式は，

$$\frac{\partial(\zeta+h_0)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u-u_0)(\zeta+h_0)=0 \quad \cdots\cdots(1.2)$$

u_0, h_0 は const. だから

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+(u-u_0)\dfrac{\partial u}{\partial x}+fg\dfrac{u-u_0}{\zeta+h_0}+g\left(i_0+\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right)=0 \quad \cdots\cdots(1.3) \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+(u-u_0)\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+(\zeta+h_0)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots(1.4) \end{cases}$$

この方程式を連立に解くために，$\bar{\zeta}$ を河口原点の平均水位（遍差）にとり，そのときの流速を $\bar{u}$ として，

$$\zeta(x,t)=\bar{\zeta}+\Delta\zeta(x,t),\qquad u(x,t)=\bar{u}+\Delta u(x,t)\quad\cdots\cdots(1.5)$$

とする。

今 $$V_0=\bar{u}-u_0,\qquad H_0=\bar{\zeta}+h_0\quad\cdots\cdots(1.6)$$

と記号して（1.3）及（1.4）式を，近似的に微小項を省略して，かきあらためると，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Delta u}{\partial t}+V_0\dfrac{\partial\Delta u}{\partial x}+fg\dfrac{V_0}{H_0}\left(1+\dfrac{\Delta u}{V_0}-\dfrac{\Delta\zeta}{H_0}\right)+g\left(i_0+\dfrac{\partial\Delta\zeta}{\partial x}\right)=0\quad\cdots\cdots(1.7)\\[2ex] \dfrac{\partial\Delta\zeta}{\partial t}+V_0\dfrac{\partial\Delta\zeta}{\partial x}+H_0\dfrac{\partial\Delta u}{\partial x}=0\quad\cdots\cdots(1.8)\end{cases}$$

（1.8）式より $$\frac{\partial\Delta u}{\partial x}=-\frac{1}{H_0}\left(\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial t}+V_0\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial x}\right)\quad\cdots\cdots(1.9)$$

（1.7）式を x で微分して（1.9）式を用いて Δu を消去すると，

$$(gH_0-V_0^2)\frac{\partial^2\Delta\zeta}{\partial x^2}-2V_0\frac{\partial^2\Delta\zeta}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\Delta\zeta}{\partial t^2}-fg\frac{V_0}{H_0}\left(\frac{1}{V_0}\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial t}+2\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial x}\right)=0\quad\cdots\cdots(1.10)$$

今 $C_0^2=gH_0$ ⋯⋯⋯⋯(1.11)　と記号し，かつ $\Delta\zeta$ を ζ にもどして（1.10）式をかきあらためると[5)]，

$$(C_0^2-V_0^2)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-2V_0\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-fg\frac{V_0}{H_0}\left(\frac{1}{V_0}\frac{\partial\zeta}{\partial t}+2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)=0\quad\cdots\cdots(1.11)$$

これは本問題を解く基礎方程式である。そこで今仮りに

$$\zeta(x,t)=\phi(x,t)\exp(\alpha x+\beta t)\quad\cdots\cdots(1.12)$$

とおいて（1.11）式に代入すると，

$$\begin{aligned}&(C_0^2-V_0^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-2V_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+2\left\{\alpha(C_0^2-V_0^2)-\beta V_0-fg\frac{V_0}{H_0}\right\}\frac{\partial\phi}{\partial x}\\&-\left(2\alpha V_0+2\beta+fg\frac{1}{H_0}\right)\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left\{\alpha^2(C_0^2-V_0^2)-2\alpha\beta\cdot V_0-\beta^2\right.\\&\left.-fg\frac{V_0}{H_0}\left(\frac{\beta}{V_0}+2\alpha\right)\right\}\phi=0\quad\cdots\cdots(1.13)\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$，$\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ の係数が0となるように α，β を選ぶと，

$$\alpha=\frac{fg}{2H_0}\cdot\frac{F_0}{C_0},\qquad\beta=-\frac{fg}{2H_0}(1+F_0^2)\quad\cdots\cdots(1.14)$$

但し $$F_0=\frac{V_0}{C_0}\quad\cdots\cdots(1.15)$$

従つて（1.13）式は

$$(C_0^2-V_0^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-2V_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\left(\frac{fg}{2H_0}\right)^2(1-F_0^2)\cdot\phi=0\quad\cdots\cdots(1.16)$$

となる。

さらに $$\xi=t-\frac{x}{\omega_1},\qquad\eta=t+\frac{x}{\omega_2}\quad\cdots\cdots(1.17)$$

という変数転換をすると，（1.16）式は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{C_0^2-V_0^2}{\omega_1^2}+\frac{2V_0}{\omega_1}-1\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}-2\left(\frac{C_0^2-V_0^2}{\omega_1\omega_2}+V_0\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1\omega_2}+1\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\\&+\left(\frac{C_0^2-V_0^2}{\omega_2^2}-\frac{2V_0}{\omega_2}-1\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\left(\frac{fg}{2H_0}\right)^2(1-F_0^2)\cdot\phi=0\quad\cdots\cdots(1.18)\end{aligned}$$

ここでも同じように $\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}$，$\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}$ の係数が0になるように ω_1，ω_2 を選ぶと，

$$\omega_1=\pm C_0+V_0,\qquad \omega_2=\pm C_0-V_0 \tag{1.19}$$

となるから，現象から考えて

$$\omega_1=C_0(1+F_0),\qquad \omega_2=C_0(1-F_0) \tag{1.20}$$

をとると，(1.17) 式は

$$\xi=t-\frac{x}{C_0(1+F_0)},\qquad \eta=t+\frac{x}{C_0(1-F_0)} \tag{1.21}$$

となり，(1.18) 式は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}-k^2\cdot\phi=0 \tag{1.22}$$

但し

$$k=\frac{fg}{2H_0}\cdot\frac{(1-F_0{}^2)}{2} \tag{1.23}$$

となる。初期条件として

$$|\zeta(x,t)|_{t\leqq x/\omega_1}=0 \tag{1.24}$$

境界条件として

$$|\zeta(x,t)|_{x=0}=F(t) \tag{1.25}$$

を考える。即ち

$$|\phi(\xi,\eta)|_{\xi=0}=0,\qquad |\phi(\xi,\eta)|_{\eta=\xi}=F(\xi)e^{-\beta\xi} \tag{1.26}$$

の条件のもとに (1.22) 式を解けばよい。

2.　微分方程式の解

(1.22) 式を満足する Rieman 関数を $v(\xi,\eta)$ とすると，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}-k^2\cdot v=0 \tag{2.1}$$

今

$$\theta=(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0) \tag{2.2}$$

として (2.1) 式をかきあらためると，

$$\theta\cdot\frac{d^2v}{d\theta^2}+\frac{dv}{d\theta}-k^2\cdot v=0 \tag{2.3}$$

さらに

$$t=2k\sqrt{\theta} \tag{2.4}$$

として

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{t}\cdot\frac{dv}{dt}-v=0 \tag{2.5}$$

この (2.5) 式の一般解は変形 Bessel 関数で

$$v=I_0(t)=I_0(2k\sqrt{\theta})=I_0\{2k\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\} \tag{2.6}$$

として与えられる。

今

$$P=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial\phi}{\partial\eta}-\phi\frac{\partial v}{\partial\eta}\right),\qquad Q=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial\phi}{\partial\xi}-\phi\frac{\partial v}{\partial\xi}\right) \tag{2.7}$$

とおくと

$$\oint(P\cdot d\eta-Q\cdot d\xi)=0 \tag{2.8}$$

が成立する。この場合，初期条件 $\xi=0$，境界条件 $\eta=\xi$ だから $\xi-\eta$ 座標上で (2.8) 式は

$$\int_P^A P\cdot d\eta+\int_A^0(P\cdot d\eta-Q\cdot d\xi)+\int_0^B P\cdot d\eta-\int_B^P Q\cdot d\xi=0 \tag{2.9}$$

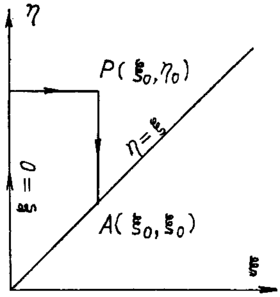

Fig. 2 ξ-η coordinate

が成立する。そこで (2.7) 式を用いて (2.9) 式は

$$\phi_P=\frac{1}{2}\phi_A-\int_0^A(P\cdot d\eta-Q\cdot d\xi)+\int_0^B P\cdot d\eta \quad\cdots\cdots(2.10)$$

となり，さらに

$$\phi_P=\phi_A+(\eta_0-\xi_0)\int_0^{\xi_0}F(\xi)e^{-\beta\xi}\cdot\left|\frac{dv}{d\theta}\right|_{\eta=\xi}\cdot d\xi \quad\cdots\cdots(2.11)$$

しかるに

$$\left|\frac{dv}{d\theta}\right|_{\eta=\xi}=k\cdot\frac{I_1\{2k\sqrt{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)}\}}{\sqrt{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)}} \quad\cdots\cdots(2.12)$$

となるから

$$\Phi(\xi,\xi_0,\eta_0)=\frac{I_1\{2k\sqrt{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)}\}}{\sqrt{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)}} \quad\cdots\cdots(2.13)$$

と記号すると，(2.11) 式は

$$\phi(\xi_0,\eta_0)=F(\xi_0)e^{-\beta\xi_0}+k(\eta_0-\xi_0)\int_0^{\xi_0}F(\xi)e^{-\beta\xi}\cdot\Phi(\xi,\xi_0,\eta_0)d\xi \quad\cdots\cdots(2.14)$$

よつて求める水位の変動 $\zeta(x,t)$ は (1.12) 式によつて

$$\zeta(x,t)=F(\xi_0)\exp(\alpha x+\beta t-\beta\xi_0)+k(\eta_0-\xi_0)\exp(\alpha x+\beta t)\int_0^{\xi_0}F(\xi)e^{-\beta\xi}\cdot\Phi(\xi,\xi_0,\eta_0)d\xi \quad\cdots\cdots(2.15)$$

となる。計算の便のために

$$\sigma_1=\frac{fg}{2H_0}\cdot\frac{(1-F_0)}{C_0(1+F_0)},\qquad k^*=\frac{fg}{2H_0}\frac{1}{C_0} \quad\cdots\cdots(2.16)$$

を用いると結局

$$\zeta(x,t)=F\left\{t-\frac{x}{C_0(1+F_0)}\right\}e^{-\sigma_1 x}+k^*\cdot xe^{\alpha x}\int_0^{\xi_0}F(\xi)e^{\beta(t-\xi)}\Phi(\xi,\xi_0,\eta_0)d\xi \quad\cdots\cdots(2.17)$$

として求めることが出来る。

参　考　文　献

1) 楠宗道：感潮水路の水流に就て，土木学会誌，17—3，大正6年 p. 165.
2) 物部長穂：河川に於ける不定流に就て，土木学会誌，3，大正6年 p. 651.
3) 岡本元治郎：河川に於ける潮汐，地球物理，4—1，昭和15年，p. 62.
4) Ichiye, T. : On the Abnormal High Waters in Rivers. Oceanographical Magazine Vol. 5, No. 1 June 1953, pp. 45～60.
5) 伊藤剛他5名：洪水流に関する研究，建設省土木研究所報告100号の10，昭和33年7月.