

ネットワーク状水路の水理解析

岩佐義朗・綾 史郎・山本正幸

GRAPH-THEORETIC ANALYSIS OF FLOWS IN NETWORKS OF PIPES AND OPEN-CHANNELS

By Yoshiaki IWASA, Shiro AYA and Masayuki YAMAMOTO

Synopsis

The graph theory is used to express the complex structure of pipe and channel networks in this paper. First, a generalized new method and its applicability to analyze steady flows in pipe networks are discussed. This new method is also applied to steady flows in open-channel networks. As for unsteady flows in open-channel networks, another new method is proposed. These new methods for open-channel networks are applied to numerical simulations of a river network in Osaka City and computed values are compared with observed ones.

1. 緒 言

水工学上にあらわれるネットワーク構造としては、上水道の配水管網などの管路ネットワーク、農業用水路や低平地河川などのような開水路のネットワークをあげることができる。このような水路網は、分岐・合流点を多く有する点で、通常の水路と区別できる。

ネットワーク構造の解析には、グラフの理論^{1,2)}が有効に利用でき、管路網解析の分野にはすでに、その適用が行なわれている^{3,5)}。本論文でも、水路をグラフで表示することにより、グラフの数学的表現である1, 2の行列を用いることによって、その流量解析法について検討を行なう。すなわち、管路網解析においては、従来、グラフ理論を用いて解析されていた手法を、より一般の場合に拡張するとともに、連立一次方程式の解法について若干の検討を行ない、その成果を開水路網における定常流の解析に適用し、その流量解析の手法を示す。また、開水路網における非定常流の数値解析法の一つとして、行列表示による簡単な計算法を提案するとともに、開水路網における定常流、非定常流の解析法を大阪市内河川へ適用し、観測値と比較検討することにより、その解析法の妥当性について検討する。

2. 管路網における定常流れの解析

2.1 管路網のモデル化と基礎方程式

一般に管路網は、つぎのような要素から構成されると考えられる。(a)管路、(b)貯水池、(c)取水・注入口、(d)ポンプ、減圧弁。以下、本文においては、貯水池では、流出入する流量にかかわらず全水頭（水位）が一定であるとする。また、取水・注入流量は圧力に関係なく一定とする。増圧ポンプ（減圧弁）は生みだす（失なわれる）水頭が一定と考える、既知のものとする。

管網計算の変数としては、管路流量（ Q ）、損失水頭（ h ）、全水頭（ ϕ ）、取水・注入口を經由して管路網外と流出入する流量（ Q_e ）を考える。（管路長（ l ）、管路径（ d ）、基準面から管路中心までの高さ（ z ）、摩擦損失係数（ f ）など、管路の幾何学的形状は既知とする）

管路網においては、つぎの3つの条件が成立せねばならない。

(1) 管路における抵抗則

$$h = r|Q|^{n-1}Q \quad \dots\dots\dots(1)$$

r , n は用いる抵抗則によって異なるが, Darcy-Weisbach の式を用いるものとすれば,

$$n=2$$

$$r = 8\pi^{-2}g^{-1} \cdot f \cdot l \cdot d^{-5}$$

管路の途中に, 増圧ポンプ, あるいは減圧弁を含むような管路では,

$$h = r|Q|^{n-1}Q + hp \quad \dots\dots\dots(1')$$

ここに, hp ; ポンプで増圧される水頭, あるいは減圧弁によって失なわれる水頭

(2) 管路の分岐・合流点, 取水・注入点における流量の連続条件

(3) Bernoulli の式 (管路の二点間における全水頭の差が, その間の損失水頭に等しい)

(a)~(d) の構成要素から成りたつ管路網をグラフ¹⁾で表現することを考える。

貯水池, 取水・注入点 (管路の分岐・合流点は, 取水・注入点の中に含めるものとする) を節点を選び, 節点間を実際の管路網に従って有向枝で結ぶ (Fig. 1, (a), (b) 参照)。管路網が n_0 個の節点, e_0 個の枝からなる有向グラフで表現されるものとし, 枝において流量, 損失水頭を定義し, 節点において全水頭, 取水・注入流量を定義すれば, 前述の (2), (3) は, グラフの数学的表現である n_0 行 e_0 列の節点一枝接続行列 A_0 を用いてつぎのように書かれる。

$$A_0(n_0, e_0)Q(e_0) = Qe(n_0) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$A_0^T(e_0, n_0)\Phi(n_0) = h(e_0) \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに, A_0^T ; A_0 の転置行列, Q ; 流量を成分とするベクトル, h ; 損失水頭を成分とするベクトル, Φ ; 全水頭を成分とするベクトル, Qe ; 取水・注入流量を成分とするベクトル (注入を正) (以下, 行列を大文字, ベクトルを太字で示す。また, $A(n, e)$, $Q(e)$ などの () 内の符号は, それぞれ (n, e) 行列, (e) 次元ベクトルであることを示し, 行列の右上の添字 T は, 転置行列であることを示すものとする)。

また, (1), (1') 式の関係を行列表示すれば,

$$h(e_0) = R(e_0, e_0)Q(e_0) + hp(e_0) \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに, R ; $r_j|Q_j|^{n-1}$ を対角成分とする対角行列, hp ; ポンプ, 弁を含む管路では, それぞれ増加する

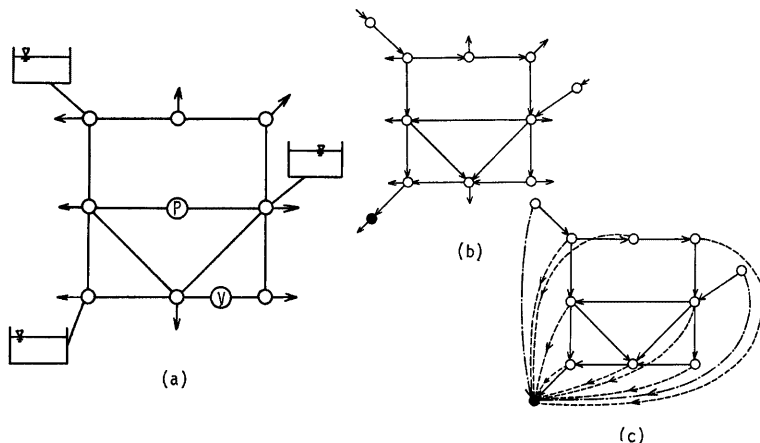


Fig. 1. Pipe network and its graph.

(失なわれる) 水頭, 含まない管路では 0 を成分とするベクトル。

ここで, 方程式と未知数の関係を考えて, 未知数は Q, h, Qe, Φ で, $2e_0 + 2n_0$, 方程式の数は (2), (3), (4) で $n_0 + 2e_0$, したがって n_0 個の値を知らねば解は求まらない。以下, 本文では, 節点において, 全水頭 (ϕ) か, 取水・水頭流量 (Qe) のいずれかがわかっているものとする。すべての節点において, 取水・注入流量を与えると $\text{rank } A_0 = n_0 - 1$ であるから, (2) の独立な方程式の数が 1 本へり, さらに変数を 1 つ既知とせねばならない。本文では, r 個の節点で全水頭がわかっており (貯水池節点と呼ぶ), $o (= n_0 - r)$ 個の節点で取水・注入流量がわかっている (取水・注入節点と呼ぶ) ものとする。

このように, モデル化された管路網を “開いた系” と呼ぶことにする。

このグラフに, 全水頭の基準節点と貯水池節点を結ぶ仮の枝 (Fig. 1 (c) の一点鎖線で示される。 $e_1 (= r - 1)$ 個) および, 取水・注入節点とを結ぶ第 2 の仮の枝 (Fig. 1 (c) の破線で示される。 $e_2 (= o)$ 個) を付け加える。このような系をグラフの内外を出入する量がないことより “閉じた系” と呼ぶことにする。このグラフは, $e_c (= e_0 + e_1 + e_2)$ 個の枝, $n_0 (= r + o)$ 個の節点から構成される。仮の枝においても, 損失水頭と, 流量が定義される。損失水頭とは, 仮の枝の出る節点と, 基準節点との全水頭の差であり, 流量とは, 第 1 の仮の枝においては, 貯水池節点間を流れる仮想の流量であり, 第 2 の仮の枝においては, 取水・注入流量に他ならない。

“閉じた系” を示すグラフを接続行列 A_c で表現すれば (2), (3) 式に対応して次の式を得る。

$$A_c(n_0, e_c) Q_c(e_c) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$A_c^T(e_c, n_0) \Phi(n_0) = h_c(e_c) \quad \dots\dots\dots (6)$$

“閉じた系” は, 必ずループから構成されるから, ループ行列 $B_c(b_c, e_c)$ (b_c : 一次元ベッチ数であり, 独立なループの数を与える。 $b_c = e_c - n_0 + 1$) を用いれば, (5), (6) 式は, $A_c \cdot B_c^T = 0$, $B_c \cdot A_c^T = 0$ の関係より

$$Q_c(e_c) = B_c^T(e_c, b_c) f_c(b_c) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$B_c(b_c, e_c) h_c(e_c) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに, f_c : ループを流れる流量 (ループ流量)

(7) 式は, 枝の流量 Q_c がループ流量 f_c の和から構成されることを示し, (8) 式は, 損失水頭 h_c を 1 つのループに沿って加えると 0 になることを示している。

“開いた系” における (2), (3) 式と “閉じた系” における (5)~(8) 式の関係は, 枝番号を若い順に, 第 1 の仮の枝 (e_1 個), 管路を示す枝 (e_0 個), 第 2 の仮の枝 (e_2 個) とつけることにし, 節点番号も若い順に, 取水・注入節点 (o 個) と, 貯水池節点 (r 個) とつけることにし, $Q_c, h_c, \Phi, Qe, f, A_c, B_c$ をつぎのように分割することによって, 以下のように示される。

$$Q_c(e_c) = \begin{bmatrix} Q_1(e_1) \\ Q_0(e_0) \\ Q_2(e_2) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (9) \quad h_c(e_c) = \begin{bmatrix} h_1(e_1) \\ h_0(e_0) \\ h_2(e_2) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\Phi(n_0) = \begin{bmatrix} \Phi_1(o) \\ \Phi_2(r) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11) \quad Qe(n_0) = \begin{bmatrix} Qe_1(o) \\ Qe_2(r) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$f(b_c) = \begin{bmatrix} f_1(b_1) \\ f_2(e_2) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$A_c(n_0, e_c) = \begin{bmatrix} A_{11}(o, e_1) & A_{10}(o, e_0) & A_{12}(o, e_2) \\ A_{21}(r, e_1) & A_{20}(r, e_0) & A_{22}(r, e_2) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$B_c(b_c, e_c) = \begin{bmatrix} B_{11}(b_1, e_1) & B_{10}(b_1, e_0) & B_{12}(b_1, e_2) \\ B_{21}(e_2, e_1) & B_{20}(e_2, e_0) & B_{22}(e_2, e_2) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに, $b_1 = b_c - e_2 = e_1 + e_0 - n_0 + 1$

(9)~(15) 式を, (5)~(8) 式へ代入して整理する。 A_0 と A_c との関係 ($A_0 = \begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{20} \end{bmatrix}$), および A_{11}

$=0$ を用いて, (5) 式に対して,

$$A_{10}Q_0 = -A_{12}Q_2 = Qe_1 \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$A_{20}Q_0 = -A_{21}Q_1 - A_{22}Q_2 = Qe_2 \quad \dots\dots\dots(17)$$

(6) 式に対しては,

$$A_{21}^T\Phi_2 = h_1 \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$A_{10}^T\Phi_1 + A_{20}^T\Phi_2 = h_0 \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$A_{12}^T\Phi_1 + A_{22}^T\Phi_2 = h_2 \quad \dots\dots\dots(20)$$

(7) 式に対しては,

$$Q_1 = B_{11}^Tf_1 + B_{21}^Tf_2 \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$Q_0 = B_{10}^Tf_1 + B_{20}^Tf_2 \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$Q_2 = B_{12}^Tf_1 + B_{22}^Tf_2 \quad \dots\dots\dots(23)$$

(8) 式に対しては,

$$B_{11}h_1 + B_{10}h_0 + B_{12}h_2 = 0 \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$B_{21}h_1 + B_{20}h_0 + B_{22}h_2 = 0 \quad \dots\dots\dots(25)$$

を得る。

2. 2 一次近似に基づく管路網の解析法

管路網解析においては, (1) あるいは (1') 式が非線形であるため, ほとんどの場合 (1') 式 ((1) 式は (1') 式において $hp=0$ とすればよい) を線形化した

$$h = nr|Q^{(0)}|^{n-1}Q + (1-n)rQ^{(0)n} + hp \quad \dots\dots\dots(26)$$

あるいは,

$$\Delta h = nr|Q^{(0)}|^{n-1}\Delta Q \quad \dots\dots\dots(27)$$

または, (1') 式を Q について解いた式

$$Q = r^{-1/2}|h - hp|^{1/n-1}(h - hp) \quad \dots\dots\dots(28)$$

を線形近似した

$$Q = \frac{1}{n}k|h^{(0)} - hp|^{1/n-1}(h - h^{(0)}) + k(h^{(0)} - hp)^{1/n} \quad \dots\dots\dots(29)$$

ここに, $k = r^{-1/n}$ 。あるいは,

$$\Delta Q = \frac{1}{n}k|h^{(0)} - hp|^{1/n-1}\Delta h \quad \dots\dots\dots(30)$$

が用いられる (以後, (0) で仮定値を, Δ で仮定値と真値との誤差を示す)。

前述のように, 未知数として, Q_0, h_0, Φ_1, f があり, そのうちのいずれを第1の未知数としても, その解法を導くことができるが, 最終的に, Φ_1 , あるいは f を未知数として解くことに帰着するから, ここでは, Φ_1 および f を第1の未知数として解く場合の2つの解法について示す。

(1) ノード法

全水頭 (Φ_1) を未知数とする解法であり, 用いる方程式は (16), (19) 式および (28), (30) 式の行列表示である次式である。

$$Q_0(e_0) = K(e_0, e_0)[h_0(e_0) - hp(e_0)] \quad \dots\dots\dots(31)$$

$$\Delta Q_0(e_0) = \frac{1}{n}K(e_0, e_0)\Delta h_0(e_0) \quad \dots\dots\dots(32)$$

ここに, $K; k_j|h_j^{(0)} - hp_j|^{1/n-1}$ を対角成分とする対角行列。未知数は, Φ_1, h_0, Q_0 であり, ($2e_0 + o$) 個, 式数は (16) 式が o , (19) 式が e_0 , (31) 式が e_0 で, $2e_0 + o$ 本であり, 解を求めることができる。

残りの未知数 $\mathbf{Q}e_2$, $\mathbf{h}_2$ は, Φ_1 が求まれば, (17) および (20) 式を用いて, 求められる。

解法を示せばつぎのようである。

$\Phi_1^{(0)}$ を仮定すると, (19), (31) 式より

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_0^{(0)} &= \mathbf{A}_{10}^T \Phi_1^{(0)} + \mathbf{A}_{20}^T \Phi_2 \\ \mathbf{Q}_0 &= \mathbf{K}[\mathbf{h}_0^{(0)} - \mathbf{h}\mathbf{p}] \\ &= \mathbf{K}[\mathbf{A}_{10}^T \Phi_1^{(0)} + \mathbf{A}_{20}^T \Phi_2 - \mathbf{h}\mathbf{p}]\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(33)$$

$$\Delta \mathbf{h}_0 = \mathbf{A}_{10}^T \Delta \Phi_1 \quad \dots\dots\dots(34)$$

$\mathbf{Q}_0^{(0)} + \Delta \mathbf{Q}_0$ を (16) 式へ代入することにより,

$$\mathbf{A}_{10} \Delta \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}e_1 - \mathbf{A}_{10} \mathbf{Q}_0^{(0)} \quad \dots\dots\dots(35)$$

(31) 式～(35) 式より

$$\left[\mathbf{A}_{10} \cdot \frac{1}{n} \mathbf{K} \mathbf{A}_{10}^T \right] \Delta \Phi_1 = \mathbf{Q}e_1 - \mathbf{A}_{10} \mathbf{K} [\mathbf{A}_{10}^T \Phi_1^{(0)} + \mathbf{A}_{20}^T \Phi_2 - \mathbf{h}\mathbf{p}] \quad \dots\dots\dots(36)$$

(36) 式は, o 個の未知数 $\Delta \Phi_1$ に関する o 本の連立一次方程式であるから, 何らかの方法によって解けば, $\Delta \Phi_1$ が求まる。 $\Delta \Phi_1$ が求まれば, 新たに

$$\Phi_1^{(1)} = \Phi_1^{(0)} + \Delta \Phi_1$$

として, 逐次計算を繰り返して $\Delta \Phi_1$ が許容の誤差範囲内に収まれば, 計算をやめる。

この方法は, 全水頭を仮定し, 修正する点で, 高桑⁴⁾, 常松⁵⁾ が示した方法と本質的に同じであるが, 本文では, 増圧ポンプ, 減圧弁のある場合に拡張している。

(2) ループ法

管路流量がループ流量から構成されることに注目して, ループ流量を未知数として解く解法である。(23) 式より,

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{B}_{22}^{-1} [\mathbf{Q}_2 - \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{f}_1]$$

したがって, (21), (22) 式は,

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_{21}^T \mathbf{B}_{22}^{-1} [\mathbf{Q}_2 - \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{f}_1] \quad \dots\dots\dots(37)$$

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{B}_{10}^T \mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_{20}^T \mathbf{B}_{22}^{-1} [\mathbf{Q}_2 - \mathbf{B}_{12}^T \mathbf{f}_1] \quad \dots\dots\dots(38)$$

(37), (38) 式より, $\mathbf{Q}_2$ は既知であるから, 未知量 $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_0$ を求めることは, ループ流量 $\mathbf{f}_1$ を求めることと同じことがわかる。

簡単のため, $\mathbf{B}_{12} = 0$, $\mathbf{B}_{22} = \mathbf{U}$ ($\mathbf{U}$: 単位行列) となるように独立なループを選べば,

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_{21}^T \mathbf{Q}_2 \quad \dots\dots\dots(39)$$

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{B}_{10}^T \mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_{20}^T \mathbf{Q}_2 \quad \dots\dots\dots(40)$$

$b_1 (= e_0 + e_1 - n_0 + 1)$ 個のループ流量 $\mathbf{f}_1$ は (24) 式によって定めることになる。

まず, $\mathbf{f}_1^{(0)}$ を仮定すると, (40), (4) 式より

$$\mathbf{Q}_0^{(0)} = \mathbf{B}_{10}^T \mathbf{f}_1^{(0)} + \mathbf{B}_{20}^T \mathbf{Q}_2 \quad \dots\dots\dots(41)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_0^{(0)} - \mathbf{h}\mathbf{p} &= \mathbf{R} \mathbf{Q}_0^{(0)} \\ &= \mathbf{R} [\mathbf{B}_{10}^T \mathbf{f}_1^{(0)} + \mathbf{B}_{20}^T \mathbf{Q}_2]\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(42)$$

$$\therefore \Delta \mathbf{h}^{(0)} = n \mathbf{R} \mathbf{B}_{10}^T \Delta \mathbf{f}_1 \quad \dots\dots\dots(43)$$

$\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}_0^{(0)} + \Delta \mathbf{h}_0$ を (24) 式へ代入すると

$$\mathbf{B}_{11} \mathbf{h}_1 + \mathbf{B}_{10} [\mathbf{h}_0^{(0)} + \Delta \mathbf{h}_0] = \mathbf{0}$$

(41), (43) 式より

$$[\mathbf{B}_{10} n \mathbf{R} \mathbf{B}_{10}^T] \Delta \mathbf{f}_1 = -\mathbf{B}_{11} \mathbf{h}_1 - \mathbf{B}_{10} [\mathbf{R} [\mathbf{B}_{10}^T \mathbf{f}_1^{(0)} + \mathbf{B}_{20}^T \mathbf{Q}_2] + \mathbf{h}\mathbf{p}] \quad \dots\dots\dots(44)$$

(44) 式は b_1 個の未知数 $\Delta \mathbf{f}_1$ に関する b_1 本の連立一次方程式であるから, 何らかの方法によって, 解けばよい。 $\Delta \mathbf{f}_1$ が求まれば, 新たに

$$f_1^{(0)} = f_1^{(0)} + \Delta f_1$$

とおいて逐次計算を行ない、許容の誤差範囲内に収まれば計算をやめる。

この方法は、McIlroy⁶⁾、青木⁷⁾の方法と同じである。常松⁸⁾は、単点注入 ($e_1=0$) で、管網がループのみからなるとき、 B_{10} を「開いた系」に対する原始ループ行列に選んで解く方法を示しているが、本文では、複数の貯水池、増圧ポンプ、減圧弁を持ち、管網がループのみから構成されていないような場合に拡張した。また、 $[B_{11}, B_{10}]$ が原始ループでない場合にも、この方法が使用できることを示した（実際の計算に際しては、管網数がふえると、独立なループを見つけることは難しく、原始ループをループにとる方がわかりやすい）。

2.3 管路網解析と連立一次方程式

2.2 で示したように、二つの方法は、最終的に連立一次方程式を解くことに帰着する。本節では、(36) 式、(44) 式の係数行列 $Y = A_{10} \frac{1}{n} K A_{10}^T$ 、 $Z = B_{10} n R B_{10}^T$ の性質について調べる。これらは、電気回路網の解析¹⁾では、それぞれ点アドミタンス、ループインピーダンスと呼ばれている。

$S = BRB^T$ とし、 B は (m, n) 行列、 B^T はその転置行列 R は、対角成分がすべて正の (n, n) 対角行列であるとする。

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mm} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & r_l & \vdots \\ 0 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} b_{11}^T & \cdots & b_{1m}^T \\ \vdots & b_{lj}^T & \vdots \\ b_{n1}^T & \cdots & b_{nm}^T \end{bmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sum_{l=1}^n b_{il} r_l b_{jl}^T \\ &= \sum_{l=1}^n b_{il} b_{jl} r_l \quad (b_{jl} = b_{lj}^T) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (45)$$

r_l は正であるから、 S は対角成分がすべて正の対称行列であることがわかる。

つぎに、 S の符号を調べる。任意の m 次元実ベクトルを x とするとき、

$$\begin{aligned} a &= x^T S x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m s_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

(45) 式より $s_{ij} = \sum_{l=1}^n b_{il} b_{jl} r_l$ であるから

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^n b_{il} b_{jl} r_l \right) x_i x_j \\ &= \sum_{l=1}^n r_l \left| \sum_{i=1}^m x_i b_{il} \right|^2 > 0 \quad (r_l > 0) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (46)$$

したがって、 S は正定符号であり、 $\det S > 0$ である。

$B = A_{10}$ 、 $R = \frac{1}{n} K$ とするとき $\frac{1}{n} K$ は対角成分を正とする対角行列であるから、接続行列 A の定義に従って、 Y はつぎのような要素を持つ。

$$i=j \text{ のとき } y_{ii} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{e_0} (a_{il})^2 k_l |h_l^{(0)} - h_{pl}|^{1/n-1} \quad \dots\dots\dots (47)$$

節点 i に接続する枝 l に関する $\frac{1}{n} k |h_l^{(0)} - h_{pl}|^{1/n-1}$ の和をとったもの

Table 1. Comparison of time for computing.

	Gauss-Seidel Method				Sweepout Method
EPS	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	
Node Method ($\Delta h < 0.001$)	4600 [22]	4938 [19]	5855 [19]	7730 [19]	3800 [19]
Loop Method (1) ($\Sigma h < 0.0001$)		() [48]	2066 [37]	1523 [14]	2100 [8]
Loop Method (2) ($\Sigma h < 0.0001$)			() [48]	2002 [19]	2600 [11]
	Time (ms)				CPU Time (ms)

[] Number of Iterations () Not Convergent

以上のことから、連立一次方程式 (36), (44) 式は一意の解を持つことがわかる。

連立一次方程式の解法としては、Gauss の消去法などの直接法、Gauss-Seidel 法などの反復法がある。Gauss-Seidel 法の収束条件は、*係数行列 A が実対称ですべての i に対して $a_{ii} > 0$ で、 A が正定値であること* (Reich の定理⁹⁾) であるから、ノード法、ループ法いずれの場合にも適用できる。

つぎに、Hardy Cross の方法を連立一次方程式の解法からみると、すでに指摘されているように⁷⁾、係数行列 Z の対角要素のみを用いた連立一次方程式の解法であることが、(49), (50) 式からも理解される。したがって、対角要素 z_{ii} に比較して z_{ij} , ($i \neq j$) が、比較的大きな重みを持つときループ流量の補正值 Δf_i は他のループ流量の影響を受けやすく、解が求まりにくいと考えられる。

つぎに、簡単な計算例を示す。Fig. 2 に示すように 25 節点、32 枝からなる貯水池数 3 (Fig. 2 中◎で示す)、独立なループ数 $b_1=10$ を有する管網を、ノード法、ループ法を用いて解き、解法として Gauss-Seidel 法、消去法を用いて計算したときの、計算時間と逐次近似の回数を示したものが Table 1 である。1 種類の管路網しか計算しておらず、この表から結論を出すことはできないが、つぎのようなことがいえよう。Gauss-Seidel 法は反復法であり、反復打ちの許容誤差 (EPS) の値によって、どの精度まで解の値を求めるかが異なり、逐次計算の回数も異なってくる。ノード法においては、この相違はないが、EPS が小さいほど計算時間がかかっているのは、連立一次方程式を解くための反復計算に時間がかかるためである。ループ法は Fig. 3 (a), (b) に示すように 2 種類のループの組みについて計算している。ループ 1 では $\text{EPS}=10^{-4}$ 、ループ 2 では $\text{EPS}=10^{-5}$ のとき 48 回まで計算したが、まだ Σh は許容誤差内に収まらなかった。また、いずれの場合も、高精度で連立一次方程式を解いた方が、繰りかえし回数も少なく、ま

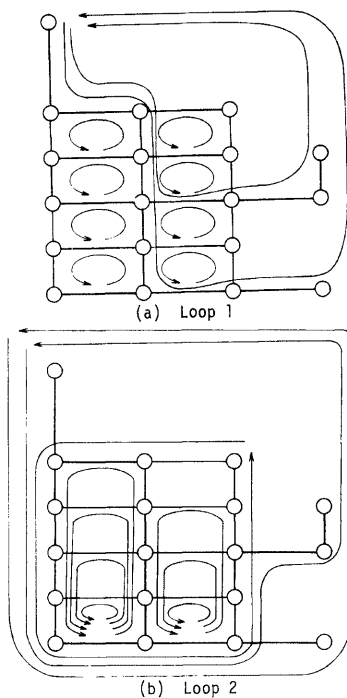


Fig. 3. Loops of sample network.

た、トータル計算時間も短かくなっているが、連立一次方程式の次元が大きくなると、高精度で解を求めることに時間がかかると思われ、必ずしも、高精度で計算する方が、計算時間が少なくなるとはいえないであろう。Sweep out 法と比較すると、繰りかえし回数は、ノード法ではかわらず、ループ法の場合は、ループ 1, 2 のいずれの場合も、Sweep out 法の方が少ない。また、ノード法とループ法を比較すると、Gauss-Seidel 法, Sweep out 法, いずれの場合もループ法の方が計算時間が短かくなっているが、これは連立一次方程式の元数がループ法の方が少ないためと思われる。

3. 開水路網の流れの解析

前述のように、開水路網は、多くの分岐・合流点を有する点で、一般の水路と区別される。水路の分岐・合流に伴う損失の評価、死水域の発生、分岐流量の比率と水路形状の関連など水理学的な問題は別として、その数値計算上の問題点をあげれば、つぎのようである。

- (1) 分岐・合流部においては、流量、流水断面積が定義されにくい。
- (2) また、それらの変量の空間微分、たとえば、 $\partial Q/\partial x$, $\partial A/\partial x$ が定義されにくい。
- (3) (1), (2) を何らかの形で組み入れたとしても、計算式が一般水路の場合と比較して、複雑となり分岐・合流点を多く含む場合、取り扱いに手数がかかる。

本章では、これらのことを考慮して、分岐・合流の形態の影響をあまり受けない低平地の河川のような緩流速の流れを対象として、開水路網の水理解析法について述べる。

3. 1 開水路網のモデル化と基礎方程式

漸変で非定常な開水路流れにおいて、一次元エネルギー解析法が適用されるものとすれば、その基礎方程式はつぎのようである⁹⁾。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{g} v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = i_0 - i_f \quad \dots\dots\dots(51)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -q \quad \dots\dots\dots(52)$$

抵抗則として、Manning 式を用いれば、

$$i_f = \frac{n^2 Q^2}{R^{4/3} A^2} \quad \dots\dots\dots(53)$$

ここに、 g ；重力加速度、 v ；流速、 h ；水深、 A ；流水断面積、 Q ；流量、 i_0 ；底勾配、 i_f ；摩擦勾配、 q ；単位長さあたりの横流出入流量（流出を正とする） x ；距離、 t ；時間

水路の横断面が長方形であり、水路巾 (B) の x 方向への変化の小さいことを仮定して、(51), (52) 式の従属変数を h と Q に変換すれば

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \left(1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}\right) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{2QB}{gA^2} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{Qq}{gA^2} = i_0 - i_f \quad \dots\dots\dots(54)$$

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -q \quad \dots\dots\dots(55)$$

つぎに、(54), (55) 式を x について、それぞれ $i-1$ から i (距離 le) まで、 j から $j+1$ (距離 lc) まで積分すれば、近似的につぎのようにかかる (Fig. 4 参照)。

$$\frac{le}{gA} \frac{dQ}{dt} + \left(1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}\right) (h_i - h_{i-1}) - \frac{2QBle}{gA^2} \cdot \frac{dh}{dt} = (i_0 - i_f)le \quad \dots\dots\dots(56)$$

$$Blc \frac{dh}{dt} + (Q_{j+1} - Q_j) = Q_e \quad \dots\dots\dots(57)$$

連続方程式 (55) において、水路が分岐・合流をするような場合は、貯留面積を S として

$$S \frac{dh}{dt} + \sum Q = Q_e \quad \dots\dots\dots(58)$$

ここに, le ; エネルギー方程式の積分区間長, lc ; 連続方程式の積分区間長, S ; 水路の貯水面積, Qe ; 連続方程式の積分区間における, 水路網系外との流入流出量 (管路網解析との関係で, 流入を正とする), また, (54) 式の積分にあたっては, $q=0$ としており, (58) 式中の Σ は, 考えている水路部分に流入する流量の和をとることを意味している。

開水路網も, 前述の管路網と同様に, グラフで表現することができる。すなわち, 水路の境界端, 分岐・合流点, 流出入流量のある点, および適当な点を節点に選び実際の水路と同じように節点間を有向枝で結ぶ。節点定義量として, 水深, 系外との流入流出量, 貯水面積, 水路床高さ, 枝定義量として, 流量, 流水断面面積, 水路巾を選べば, (56) 式, (57) あるいは (58) 式が, それぞれ枝, 節点で成立すると考えて, つぎのように書かれる (Fig. 4 参照)。

$$EDQ - (U-F)A^T h - GDh = A^T z - RQ \quad \dots\dots\dots(59)$$

$$SDh + AQ = Qe \quad \dots\dots\dots(60)$$

ここに, A : “開いた系” に対するグラフ (n_0 節点, e_0 枝) の節点-枝接続行列であり, (n_0, e_0) 行列。(本章では, とくにことわらないかぎり下添字 0 を省略する)。 E ; le_j/gA_j を対角成分とする対角行列, U ; 単位行列, F ; $Q_j B_j/gA_j^3$ を対角成分とする対角行列, G ; $2Q_j B_j le_j/gA_j^3$ を対角成分とする対角行列, R ; $n_j^2 le_j |Q_j|/R_j^{1/3} A_j^2$ を対角成分とする対角行列, S : 貯水面積 S_i を対角成分とする対角行列, D ; d/dt を対角成分とする対角行列であり, 一種の微分演算子, Q ; 流量 Q_j を対角成分とする対角行列, Q : 各枝の流量を示すベクトル, h ; 各節点の水深を示すベクトル, z ; 水路床の高さを示すベクトル, Qe ; 系外との流入流出量を示すベクトル。また, A, R は枝両端の水深の平均値 $hm_j = (h_{i-1} + h_i)/2$ で示されるものとする。

(59), (60) 式をそれぞれ節点, 枝で考えることにより, 前述の (1), (2), (3) の問題は解決される。

3. 2 定常流の解析法

(51), (52) 式の時間による偏微分の項を 0 とすると, 開水路における漸変定常流の基礎方程式を得るが, 開水路網においては (59), (60) 式における時間に関する微分項を 0 とすると, 開水路網における定常流解析の式を得る。すなわち,

$$-(U-F)A^T h = A^T z - RQ \quad \dots\dots\dots(61)$$

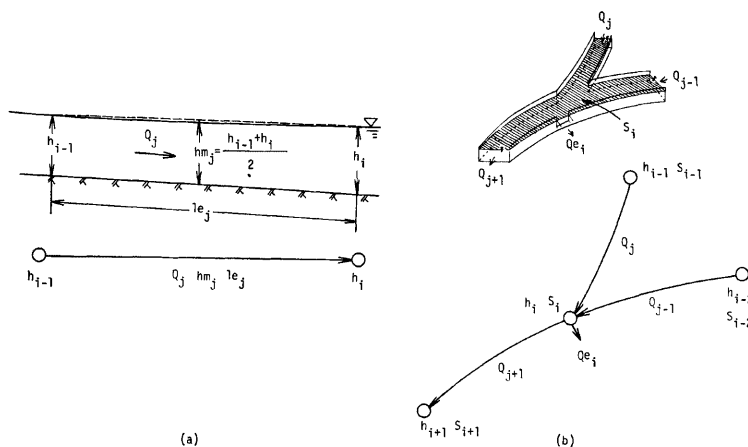


Fig. 4. Definition of variables and equations.

$$AQ = Qe \quad \dots\dots\dots (62)$$

(61) 式を変形すれば、節点における水位を示すベクトル $hs = h + z$ を用いて

$$A^T hs = RQ + FA^T h \quad \dots\dots\dots (63)$$

であり、 $FA^T h$ が速度水頭の変化の近似式であることを考慮すれば、(63) 式は水位の変化が、摩擦損失によるものと、速度水頭の変化によるものの和であることを示しており、エネルギー保存の関係であり、(62) 式は節点における流量の保存の関係に他ならない。

(62)、(63) 式より、管路網解析と同様の手法が、開水路網における流量解析に適用できることが考えられる。管路網と開水路網の変数の対応関係を示せば、つぎのようである。

管 路 網	開 水 路 網
ϕ	$hs = h + z$
$h = RQ + h_p$	$hd = RQ + FA^T h$
Q	Q
Qe	Qe
	(h ; 水深, hd ; 水位差)

開水路網においても、管路網と同じく、節点数だけの境界条件がわかっていなければ、解を一意に決定することができない。本章でも、節点 n_0 個のうち、 r 個の節点で水位が、 $o (= n_0 - r)$ 個の節点で流出流入量がわかっているものとし、節点の番号付も、2. に準じる。

管路網解析と同様に、水位既知節点と水位の基準節点、および各節点と水位の基準節点とを結ぶ第 1, 第 2 の仮の枝を結ぶことによって、*閉じた系* とすることができ、2. と同様に、水位差 $hd_1(e_1)$, $hd_2(e_2)$, 流量 $Q_1(e_1)$, $Q_2(e_2)$ が定義される。

2. で示した、管路網解析の 2 つの方法を開水路網に適用すれば、つぎのようである。

(1) ノード法

(61) 式の j 行成分を示せばつぎのようである (第 j 枝に関する下添字 j を省略する。また $i-1$, $+i$ は、第 j 枝に隣接する $i-1$, i の節点を示す。(Fig. 4 (a) 参照))。

$$\left(1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}\right)(h_i - h_{i-1}) = -(z_i - z_{i-1}) - \frac{n^2 l e |Q|}{R^{4/3} A^2} \cdot Q \quad \dots\dots\dots (64)$$

(64) 式を Q についてとくと、

$$Q = \pm \left| \frac{hd}{(G_1 + G_2)} \right|^{1/2} \quad \dots\dots\dots (65)$$

ここに、 $hd = (h_{i-1} + z_{i-1}) - (h_i + z_i)$ $G_1 = \pm n^2 l e / R^{4/3} A^2$, $G_2 = (h_{i-1} - h_i) B / g A^3$ 。(65) 式において、 h_{i-1} , h_i の微小変化 Δh_{i-1} , Δh_i に対する Q の変化 ΔQ を線形近似によって求めると

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \frac{1}{2} |hd|^{-1/2} (\pm (G_1 + G_2))^{-1/2} (\Delta h_{i-1} - \Delta h_i) \\ &\quad - \frac{1}{2} |hd|^{1/2} (\pm (G_1 + G_2))^{-3/2} (\Delta G_1 + \Delta G_2) (\Delta h_{i-1} + \Delta h_i) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (66)$$

ここに、 $\Delta G_1 = \pm n^2 l e p^{1/3} / 3 A^{10/3} (2dp/dh_m - 5P/AdA/dh_m)$, $\Delta G_2 = -3(h_{i-1} - h_i) / 2 g A^2 h_m^2$, P ; 潤辺であり、 $h_m = (h_{i-1} + h_i) / 2$ により計算され、複号同順とし、負号は、 hd が負の時である。

2.2 にしたがって、水位の仮定値 $hs_1^{(0)}$ に対する補正量 Δhs_1 はつぎの o 本の連立一次方程式で与えられる。

$$A_{10} [K_1^{(0)} A_{10}^T + K_2^{(0)} |A_{10}^T|] \Delta hs_1 = [Qe - A_{10} Q_0^{(0)}] \quad \dots\dots\dots (67)$$

ここに、 $K_1^{(0)} : |hd_j|^{-1/2} (G_1^{(0)} + G_2^{(0)})^{-1/2} / 2$ を対角成分とする対角行列、 $K_2^{(0)} : |hd_j|^{1/2} (G_1^{(0)} + G_2^{(0)})^{-3/2} / 2 (\Delta G_1^{(0)} + \Delta G_2^{(0)}) / 2$ を対角成分とする対角行列であり、また、 $|A^T|$ は A^T の絶対値を各成分とする行列であ

ることを示す。(0) は、仮定値 $hs_1^{(0)}$ を用いて計算された値であることを示し、 $Q_0^{(0)}$ は (65) 式より、また (67) 式の Δhs_1 に対する係数行列も、 $hs_1^{(0)}$ より計算されるから、(67) 式を何らかの方法によってとけばよい。 Δhs_1 が求まれば、新しく

$$hs_1^{(1)} = hs_1^{(0)} + \Delta hs_1 \quad \dots\dots\dots (68)$$

とにおいて、許容誤差内に収まるまで、逐次計算を行なう。

(2) ループ法

開水路においては、管路ほどループが形成されることはないが、精度の関係から、節点数を多くとる必要があるから、境界条件として水位が与えられるとき、ループ法を用いれば、変数の数を著しく少なくすることができる。

簡単のため、2.2 (2) におけるループ行列の部分行列 $B_{12}=0$ とし、 B_{22} を単位行列に選ぶ。(63) 式より

$$hd = [R_1 + R_2]Q_0 \quad \dots\dots\dots (69)$$

ここに、 $R_1; (h_{i-1} - h_i)Q_j B_j / gA_j^3$ を対角成分とする対角行列、 $R_2; n_j^2 l e_j |Q_j| / R_j^{4/3} A_j^3$ を対角成分とする対角行列。

開水路においては (24), (25) 式において、 h のかわりに hd を置いた次式が成立する。これは、あるループに沿って水位差を加えると 0 になることを示している。

$$B_{11}hd_1 + B_{10}hd_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (70)$$

$$B_{21}hd_1 + B_{20}hd_0 + hd_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (71)$$

また、流量の関係は、

$$Q_1 = B_{11}^T f_1 + B_{21}^T Q_2 \quad \dots\dots\dots (72)$$

$$Q_0 = B_{10}^T f_1 + B_{20}^T Q_2 \quad \dots\dots\dots (73)$$

$$Q_2 = Q_2 \quad \dots\dots\dots (74)$$

今、水深を一定として、(69) 式を Q_0 について線形近似することにより、流量と水位差の誤差の関係を求めると

$$\Delta hd_0 = 2[R_1 + R_2]\Delta Q_0 \quad \dots\dots\dots (75)$$

(75) 式および (70) 式を用いることにより、(44) 式と同様に次の $b_1 (=e_0 + e_1 - n + 1)$ 個の連立一次方程式を得る。

$$B_{10}2[R_1 + R_2]B_{10}^T \Delta f_1 = -B_{11}hd_1 - B_{10}hd_0^{(0)} \quad \dots\dots\dots (76)$$

(76) 式を何らかの方法によって Δf_1 について解き、

$$f_1^{(1)} = f_1^{(0)} + \Delta f_1$$

として逐次計算し、 Δf_1 が許容の誤差内におさまれば、求まった f_1 を用いて、(71) 式より基準節点と各節点との水位差 hd_2 が求まるから、水位の補正を行なった後、 R_1, R_2 の計算を行ない、また改めて流量計算を行なう。流量計算に伴う水位 hs の変化が所要の範囲内に収まれば計算を打ちきる。

この方法は、連立方程式の元数は少ないが、仮定値を多く必要とする欠点がある。

つぎに、簡単な計算例をあげる。Table 2 上段に示すような長方形断面の一樣水路における計算結果を示したものが、Table 2 下段である。参考のため、(54) 式において、 $\partial Q/\partial t = \partial h/\partial t = 0$ とおいた

$$\left(1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}\right) \frac{dh}{dx} = i_0 - i_f \quad \dots\dots\dots (77)$$

を常微分方程式の代表的数値積分法である Runge-Kutta 法で積分した値を載せてあるが、三者はよく一致している。

また、ノード法の解の特色を言えば、ノード法は、節点における流量の誤差で補正値 Δhs を決定するから、 Δhs が、許容誤差範囲内に収まっても、必ずしも節点における流量の連続関係が厳密には成立しない。

Table 2. Comparison of results by three methods.

Condition			
Total length	1 Km		
Distance	100 m		
Slope	2.0×10^{-4}		
Manning's roughness coefficient	0.03 (m-sec)		
Discharge at upper boundary	30 m ³ /sec		
Channel width	20 m		
W.L. at lower boundary	2.0 m		
Result (W.L.m)			
Section	R.K. Method	Node Method	Loop Method
0	2.0000	2.000	2.000
1	2.0257	2.026	2.026
2	2.0511	2.051	2.051
3	2.0763	2.076	2.076
4	2.1014	2.101	2.101
5	2.1262	2.126	2.126
6	2.1508	2.151	2.151
7	2.1753	2.175	2.175
8	2.1996	2.200	2.200
9	2.2237	2.224	2.224
10	2.2477	2.248	2.248

とくに、河川におけるように、水路幅の大きな水路では、わずかな水位の違いにより大きな流量の違いがおこると考えられ、節点における連続条件で、収束条件を定めた方がよいと思われる。

3. 3 非定常流の解析法

(1) 計算法

(59) 式, (60) 式は, 非線形の連立常微分方程式系であり, 数値計算法として, Runge-Kutta-Gill 法などの適用が考えられるが, 未知数 (Q_j, h_{d_i}) の数が非常に多くなるため, 多くの計算時間が必要になると思われ, つぎのような計算法¹⁰⁾をとることにした。(59), (60) 式を再記すればつぎのようである。

$$EDQ - (U-F)A^T h - GDh = A^T z - RQ \quad \dots\dots\dots (78)$$

$$SDh + AQ = Qe \quad \dots\dots\dots (79)$$

(78) 式において, 各項をつぎのようにあらわす。

$$\begin{aligned} EDQ &: \frac{1}{2\Delta t} E(Q^{2n+1} - Q^{2n-1}) \\ (U-F)A^T h &: (U-F)A^T h^{2n} \\ GDh &: \frac{1}{4\Delta t} G|A^T| (h^{2n} - h^{2(n-1)}) \\ RQ &: R'|Q|^{2n-1} \cdot Q^{2n-1} \end{aligned}$$

上式において, 上添字は時間ステップを示す。 E, F, G, R' の計算にあたっては, Q, h として, 直前に求められている値を用いて計算するものとする。また, $R', |Q|$ は, それぞれ $n_j^2 |e_j| / R_j^{4/3} A_j^2$, $|Q_j|$ を対角成分とする対角行列。これらの関係を (78) 式へ代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} E(Q^{2n+1} - Q^{2n-1}) - (U-F)A^T h^{2n} - \frac{1}{4\Delta t} G|A^T| (h^{2n} - h^{2(n-1)}) \\ & = A^T z - R'|Q|^{2n-1} \cdot Q^{2n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(80)$$

また、(79) 式の各項をつぎのようにあらわす。

$$\begin{aligned} & SDh; \frac{1}{2\Delta t} S(h^{2(n+1)} - h^{2n}) \\ & AQ; AQ^{2n+1} \\ & Qe; Qe^{2n+1} \end{aligned}$$

これらの関係を (79) 式へ代入すれば、

$$\frac{1}{2\Delta t} S(h^{2(n+1)} - h^{2n}) + AQ^{2n+1} = Qe^{2n+1} \quad \dots\dots\dots(81)$$

(80) 式より、未知量 Q^{2n+1} を求め、時間ステップを Δt だけ進め、つぎに (81) 式より h^{2n+1} を求めれば、各時間ステップごとに Q と h が交互に求められる。(Fig. 5)

(2) 数値計算法の検討

以下に示すように、(1) で示された計算法は、staggered scheme で差分近似したものとも解釈でき、この立場から、(1) で示した計算法の検討を行なう。簡単のため、水路は、分岐・合流がなく、広長方形断

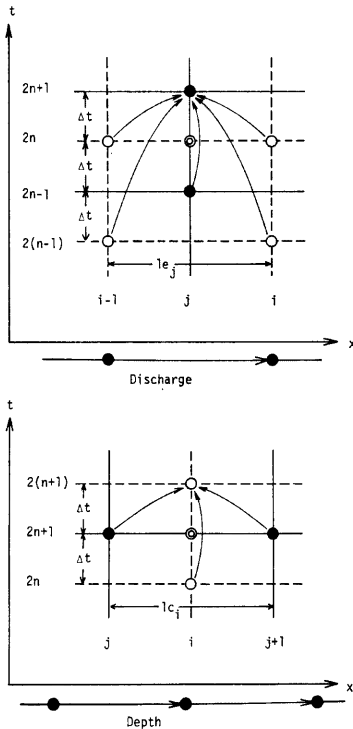


Fig. 5. Method of Computation.

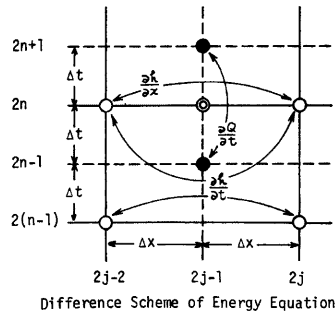


Fig. 6. Staggered difference scheme.

面であるとし、横からの流入流出量がないものとする。

(54), (55) 式を staggered scheme で差分表示すれば、つぎのようである (Fig. 6 参照)。(但し, $q=0$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{gA_{2j-1}} \cdot \frac{2\Delta x}{2\Delta t} (Q_{2j+1}^{2n+1} - Q_{2j-1}^{2n+1}) + \left(1 - \frac{Q_{2j-1}^{2n} B_{2j-1}}{gA_{2j-1}^3} (h_{2j}^{2n} - h_{2(j-1)}^{2n})\right) \\ & - \frac{2Q_{2j-1}^{2n} B_{2j-1}}{gA_{2j-1}^3} \frac{2\Delta x}{4\Delta t} ((h_{2(j-1)}^{2n} + h_{2j}^{2n}) - (h_{2(j-1)}^{2n-1} + h_{2j}^{2n-1})) \\ & = -(z_{2j} - z_{2(j-1)}) - \frac{n_{2j-1}^2 2\Delta x}{R_{2j-1}^{4/3} A_{2j-1}^2} Q_{2j-1}^{2n} Q_{2j-1}^{2n-1} \dots\dots\dots (82) \end{aligned}$$

$$B_{2j} \frac{2\Delta x}{2\Delta t} (h_{2j}^{2(n+1)} - h_{2j}^{2(n-1)}) + (Q_{2j+1}^{2n+1} - Q_{2j-1}^{2n+1}) = 0 \dots\dots\dots (83)$$

(80), (81) 式の各行成分を, (82), (83) 式と比較すると, $2\Delta x = l e_j = l c_i$ と考えると, それらは全く等しくなり, (80), (81) 式による計算法の吟味を (82), (83) 式による解法の立場から行なう。

広長方形断面の一樣水路の上に, 微小擾乱がのせられた場合を考える。(54), (55) 式を $Q = Q_0 + Q_1$, $h = h_0 + \eta$ を用いて線形化する。 Q_0 , h_0 が定常流の値であること, Q_1 , η がそれからの微化変化であるから, $Q_1 \ll Q_0$, $\eta \ll h_0$ の関係を用いると,

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} + a \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \eta}{\partial t} + c Q_1 + d \eta = 0 \dots\dots\dots (84)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + e \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (85)$$

ここに, $a = gBh_0(1 - Q_0^2/gB^3h_0^3)$, $b = -2Q_0/h_0$, $c = 2gBh_0i_0/Q_0$, $d = -10gBi_0$, $e = 1/B$, ただし $R \approx h$ としている。

(84) 式の左辺を $L_1(Q_1)$ で示すものとする。(84) 式において, Q_1 , η を $(2j-1, 2n)$ を中心に Taylor 展開し, $L_1(Q_1)$ の差分方程式 $\langle L_1(Q_1) \rangle_{2j-1}^{2n+1}$ を求めて, 原方程式の $(2j-1, 2n)$ における値 $L_1(Q_1)_{2j-1}^{2n}$ との差, すなわち打ち切り誤差 ε_1 を求めると,

$$\varepsilon_1 = \langle L_1(Q_1) \rangle_{2j-1}^{2n+1} - L_1(Q_1)_{2j-1}^{2n} = \Delta t \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) \dots\dots\dots (86)$$

(85) 式においても, その左辺を $L_2(\eta)$ とし, $(2j, 2n+1)$ を中心に Taylor 展開して, 同様に行なうと, 打ち切り誤差 ε_2 は,

$$\varepsilon_2 = \langle L_2(\eta) \rangle_{2j}^{2n+1} - L_2(\eta)_{2j}^{2n+1} = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \dots\dots\dots (87)$$

となり, (86) 式より, 正確度 1, (87) 式より正確度 2 の差分近似であることがわかり, いずれの場合も, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ で, ε_1 , $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ となるから, 適合条件は満足される。

つぎに, 安定性の検討を行なう。(84), (85) 式を staggered scheme で差分し, Q に関する項を消去し, 変数が η のみの差分方程式を求める。差分方程式の解を次のように仮定して

$$\eta_{2j}^{2(n+1)} = r^n e^{ik(2j\Delta x)} \quad (i = \sqrt{-1})$$

差分方程式に代入すると, 増巾因子 r はつぎの 2 次方程式を満足する。

$$Ar^2 + 2Br + C = 0 \dots\dots\dots (88)$$

ここに, $A = 1$, $B = -a - e \lambda^2 \cos \omega - 1 + a e \lambda^2 + c \Delta t + i(-1/2 b e \lambda - d e \lambda \Delta t) \sin \omega$, $C = (1 - 2c \Delta t) + i(b e \lambda) \sin \omega$, $\lambda = \Delta x / \Delta t$, $\omega = 2k \Delta x$ 。(88) 式より根の公式を用いて r の値を求めることができる。 $\omega = 0$ のときの解を求めると

$$r = \begin{cases} 1 \\ 1 - 2c \Delta t \end{cases} \dots\dots\dots (89)$$

今, 安定条件として, $|r| \leq 1$ を考えると, (85) 式より

$$2\Delta t \leq \frac{2}{c} = \frac{h_0^3}{g n \sqrt{i_0}} \dots\dots\dots (90)$$

となり、 dt の上限を与え、Vasiliev の条件¹¹⁾となる。

$\omega = \pi$ のときは、摩擦項、水路床勾配の項を無視した場合を考えると

$$r = 1 - 2a e \lambda^2 \pm \sqrt{4a^2 e^2 \lambda^4 - 4ae \lambda^2} \quad \dots\dots\dots (91)$$

であるから、 $4a^2 e^2 \lambda^4 - 4ae \lambda^2 \leq 0$ のとき $|r| = 1$ となって安定となる。すなわち

$$\sqrt{gh_0 - \frac{Q_0^2}{A_0^3}} \leq \sqrt{gh_0} \leq \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\lambda} \quad \dots\dots\dots (92)$$

となり、いわゆる C.F.L. 条件¹¹⁾の適用が考えられる。

いま、例として、 $n = 0.025$, $h_0 = 3.0$ m, $i_0 = 0.02$, $B = 100$ m の水路について、(84) 式の解 r を複素平面上で図示すると **Fig. 7** のようである。 $dt = 60$ sec は C.F.L. 条件

$$v + \sqrt{gh} \leq 1/\lambda \quad \dots\dots\dots (93)$$

を満足しており、 $dt = 90$ sec は満足していない。**Fig. 7** よりわかるように、 r の絶対値は C.F.L. 条件 (93) を満足するとき、1 より小さく、満たさないとき 1 より大きい。

3. 4 大阪市内河川の数値シミュレーション

3.2.3 で述べた開水路網の解析法を大阪市内の河川網へ適用して、数値シミュレーションした結果について述べる。

計算対象とした区域は、上流端を、毛馬洗堰、寝屋川水門とし、下流端を、安治川では安治川水門、尻無川では甚兵衛渡、木津川では落合下の渡までとした。河川は上流から、まず、大川と寝屋川が合流し、つぎに堂島川と土佐堀川、および東横堀川に分流する。堂島川と土佐堀川は合流すると同時に、安治川と木津川に分流し、木津川は、途中東横堀川（道頓堀川）と合流し、尻無川に分流し、大阪湾へ注いでいる。(Fig. 8)。流域は、きわめて平坦な沖積平野であり、河川網は、大阪湾潮位の影響をうける感潮河川であり、自流量も少ないことから、緩慢な流れとなっている。

この区間を41節点、44枝を持つグラフで表現した。分合流点を5つ有し、下流端水位を3川とも同一としたので、計算上のループは4個である。グラフの概形を **Fig. 9** に示す。節点間距離は、各河川ごとに等しくとり、1区間 650~550 m 程度である。河川の横断、縦断形状は大阪府土木部の資料によった。河幅は区間の中点における値を用い、横断形状はすべて長方形としてある。貯水面積は、地図上でみて、長方形とみなせるところは河幅と区間長から、それ以外のところは、地図上からその面積を算出した。粗度係数につ

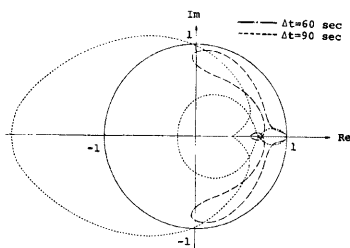


Fig. 7. Amplification factor.

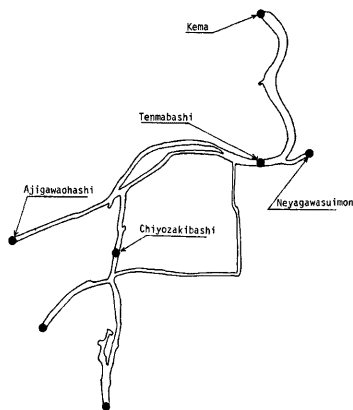


Fig. 8. River network on Osaka City.

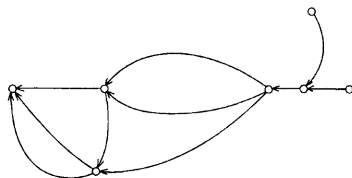


Fig. 9. Outline of graph for a river network in Osaka City.

いては後述する。

計算対象期間は、1971年1月26日 10:00 a.m.～ 1月27日 10:00 a.m. までの24時間である。この間、大阪府土木部による水系の流量、水位の同時観測が行なわれたので、この値と、計算結果を比較してみることにする。

初期条件としては3.1で述べたループ法、ノード法を用いて、上・下流端で1月26日 10:00 a.m. の水位を与えて、定常流計算した値を用いた。粗度係数は、全区間同一とし、 $n=0.025\sim 0.045$ までの5種類について計算した。水位については、粗度係数による相違はあまりなく、流量は粗度係数がふえるにしたがって、ほぼ同比率で減少していった。 $n=0.04$ の場合の結果を示せば、Fig. 10 である。Fig. 10 には、実測値もそえてあるが、前述のように河川網は感潮河川であり、計算結果と、観測値との比較はあまり意味がないが、水位についてはよく一致している。

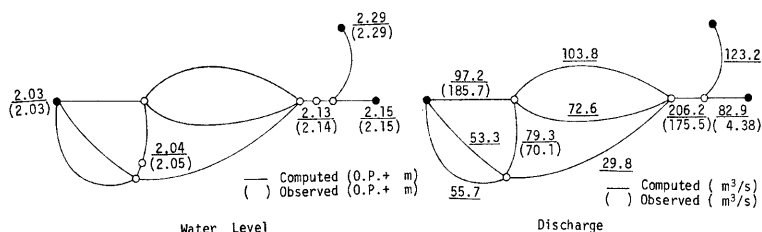


Fig. 10. Result of computation (Steady flow)

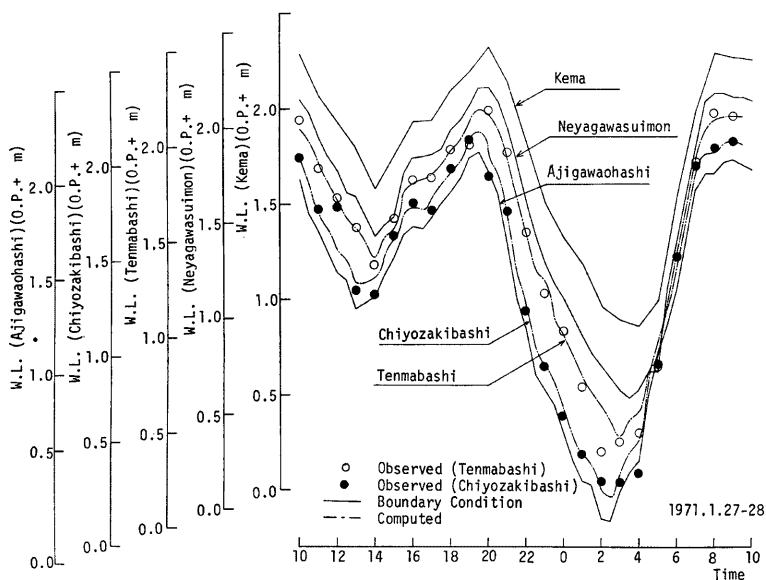


Fig. 11. Result of computation (W.L.~Time curves).

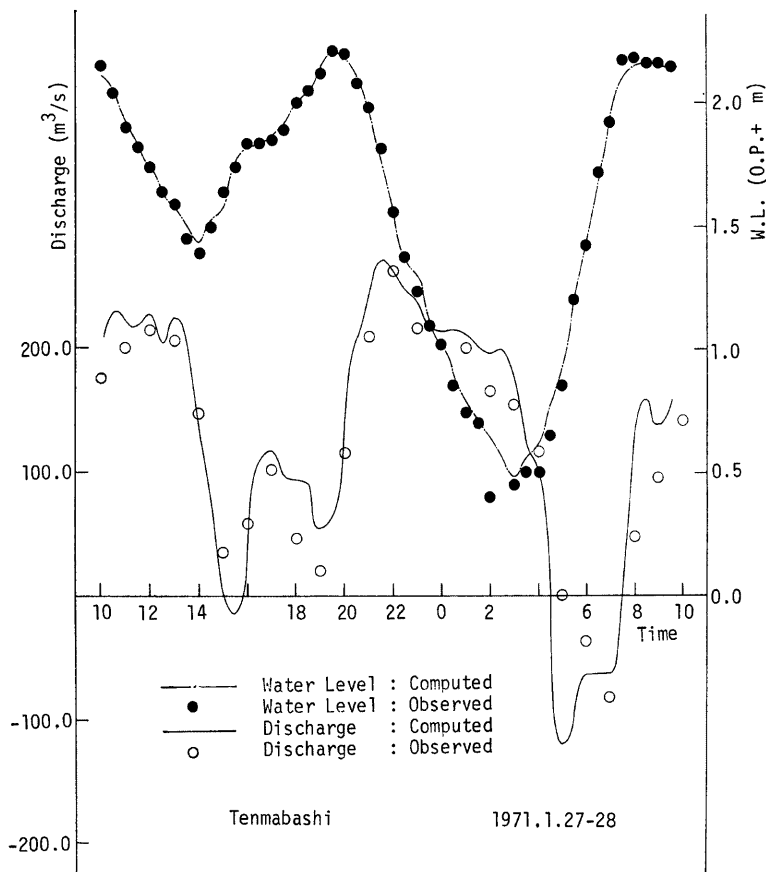


Fig. 12. Result of computation (Hydrographs at Tenmabashi).

また、境界条件としては、上・下流端における水位～時間曲線を観測結果にもとずいて与えた。

中間地点である千代崎橋、天満橋における水位～時間曲線を境界条件とともに示したものが、Fig. 11 である。2地点における計算結果と、観測値とはよく一致している。また、天満橋におけるハイドログラフを示したものが Fig. 12 である。水位、流量ともに計算値は、観測値とよく一致している。

非定常流の計算についても、粗度係数を $n=0.025\sim0.045$ までの5種について行なっている。大阪府土木部においては、 $n=0.025$ が用いられているが、この値では、流量の振幅が大きすぎたので、いろいろかえて計算した結果 $n=0.04$ の場合が一番よくあっていた。Fig. 11, Fig. 12 は、この値を用いて計算した結果を示したものである。この値は通常の河川に対する値よりも大きいのが、分合流、曲がりによる損失なども、粗度係数に含まれているので、その影響が考えられる。また、流量測定信頼度も考慮せねばならない。

以上のような、観測結果と、計算値との比較から、本章で示された数値計算法は、沖積平野における都市河川網の水理解析手法として、有効であると思われる。

4. 結 言

管路網、開水路網をグラフで表現し、接続行列 A 、ループ行列 B を用いて、その解析法を定式化した。すなわち、管路網の定常流の解析法をより一般化するとともに、開水路網の定常流の流量解析法と、非定常流の数値計算法について述べた。

解析法は、すべて、行列を用いて表現されているので式の見透しを得やすく、またネットワークの構造にかかわらず表現される特色がある。管路網の定常流の解析においては、その特色を生かして、線形近似にもとずく逐次計算の途中にあられる連立一次方程式の係数行列について、検討を行なうことが可能となった。

また、開水路網の水理解析法を大阪市内河川へ適用した結果は、きわめて良好であり、本文で示された方法の有効性が確認された。

今後の課題としては、管路網解析においては、連立一次方程式の係数行列の特色を生かした解法の検討、反復法を用いた場合の許容誤差と収束判定値との関係、ならびにループ法を用いた場合のループ選択の問題などがあげられよう。

また、開水路網の解析においては、複雑な河川形状をどのように単純化するか、分・合流に伴う損失など、水理学的な問題点をどのように組み入れるかが問題となろう。さらに、非定常流の数値計算については、他の数値計算法との比較検討を行なう必要がある。

終わりに、本研究に適切な助言を頂いた土木工学教室助教授井上和也氏、ならびに計算に協力して頂いた元京都大学学生中島規之氏（現大阪ガス）、大阪市内河川の非定常流計算に際して、貴重な資料を提供して頂いた大阪府土木部、建設省淀川工事事務所の諸氏に、深甚の謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 小野寺力男：グラフ理論の基礎，森北出版，1970.
- 2) 毛利正光：新数学講座 7，8，土木学会誌，Vol. 55. No. 4, 1970, pp. 72~79, No. 5, 1970, pp. 77~84.
- 3) Kesavan, H.K. and M. Chandrasheker: Graph-Theoretic Models for Pipe Network Analysis, Proc. ASCE. Vol. 98, No. HY2 pp. 345~364, 1972.
- 4) 高桑哲男：配水管網流量計算法に関する研究，水道協会雑誌，第423号，1969, pp. 46~60.
- 5) 常松芳昭：管路水輸送システムのグラフ理論的解析，土木学会論文報告集，第229号，1974, pp. 21~30.
- 6) McIlroy, M.: Pipeline Network Flow Analysis Using Ordinary Algebra, Jour. A.W.W.A Vol. 41, No. 5 1949, pp. 422~428.
- 7) 青木康夫：管網計算の連立一次方程式による新解法，水道協会雑誌，第295号，1964, pp. 25~29.
- 8) Westlake, J.R. (戸川隼人訳)：コンピュータのための線形計算ハンドブック，培風館，1972.
- 9) 石原藤次郎編：水工水理学，丸善，1974, p. 24.
- 10) 岩佐義朗，綾史郎：グラフ理論による開水路不定流の解析法について（第3報），昭和49年度土木学会年次学術講演会講演概要集.
- 11) 伊藤剛編：数値計算の基礎と応用，アテネ出版，1971, pp. 197~221.