

CFRP 積層板の冷却過程における熱粘弾性変形挙動の境界要素解析

BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS OF THERMO-VISCOELASTIC DEFORMATION
ON CFRP LAMINATES IN COOLING PROCESS清水理能¹⁾, 五嶋孝仁²⁾, 講堂康史朗³⁾, 荒井政大⁴⁾

Masayoshi SHIMIZU, Takahito GOSHIMA, Koushirou KOUDOU, Masahiro ARAI

1)富山大学工学部機械知能システム工学科 (〒930-8555 富山市五福 3190, E-mail: shim@eng.toyama-u.ac.jp)

2)富山大学工学部機械知能システム工学科 (〒930-8555 富山市五福 3190, E-mail: goshima@eng.toyama-u.ac.jp)

3)富山大学大学院理工学研究科 (〒930-8555 富山市五福 3190, E-mail: m052091@ems.toyama-u.ac.jp)

4)信州大学工学部機械システム工学科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: arai@shinshu-u.ac.jp)

In this study, analyses and formulation to estimate residual stress and deformation in anisotropic thermo-viscoelastic materials are discussed. The present numerical analysis is based on boundary element method for 2-dimensional solid body. Laplace transform and its inversion is employed for the formulation to treat the time dependency, and a reduced time estimated by shift factor using time-temperature superposition principle. Dynamic modulus of the thermo-viscoelastic material, which is CFRP laminate in the present study, are approximated by generalized Maxwell model. Through some typical numerical demonstration for the CFRP laminates of $[0^{\circ}/90^{\circ}]$ stacking sequence, it is confirmed that the accuracy of the residual stress is improved using generalized Maxwell model, and the final profile of the CFRP laminated beam is strongly affected by the cooling condition.

Key Words : Boundary Element Method, Thermal Visco Elasticity, Anisotropy, Composite Material, Laplace Transform

1. 緒言

炭素繊維強化プラスチック(CFRP)は優れた特性を持ち, また比較的 low コストであるため宇宙用構造材, 航空機用構造材, スポーツ用品などで幅広く使用されている. このように様々な分野で使用されている CFRP であるが, いくつかの問題点がある. その一つに長繊維で強化した CFRP は, 繊維方向と繊維に垂直方向でその機械的特性, 特に線膨張係数が異なるため, 繊維配向により変形したり, 層間で残留応力が発生し層間の強度が低下するということが挙げられる. そのため, CFRP の変形解析や残留応力解析が重要である. またマトリックスに樹脂を使用しているため, その挙動は熱粘弾性挙動を示し, 温度や時間によって特性が異なることも解析を困難にする原因となる.

線形粘弾性体の挙動は, Boltzman の重畳原理により導出された積分形の構成方程式を用いて一般化できる⁽¹⁾. さらに線形熱粘弾性体においては, 温度の時間変化を換算時間に置き換えることができ, 結果として粘弾性体と同様の積分形の構成方程式が導かれる. よって換算時間に対して Laplace 変換を用いることにより, その解析は比較的容易になる. 荒井ら⁽²⁾は等方性体の熱粘弾性解析を Laplace 変換に基づく境界要素法により解析しており, また隅田ら⁽³⁾によって異方性材料の熱粘弾性応力解

析が行われている.

一般によく知られるように, 熱粘弾性体の緩和弾性係数は一本のマスターカーブとシフトファクターにより表現できる. 熱粘弾性体の解析においては, 特にガラス領域からゴム領域にかけてのマスターカーブを高い精度で近似することが重要であり, この近似精度が解析精度を大きく支配することとなる.

そこで本研究では冷却時の CFRP の変形および残留応力を求めることを目的とし, 熱粘弾性問題に対し一般化 Maxwell モデルを用いて, 境界要素法により Laplace 変換法に基づいた定式化を行い変形および応力を解析する手法について検討を行った.

2. 理論解析

2.1 粘弾性体の構成方程式 粘弾性体における構成方程式は, 一般に以下のような Duhamel の畳込み積分形で記述することができる⁽⁴⁾.

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t C_{ijkl}(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau + C_{ijkl}(t) \varepsilon_{kl}(0) \quad (1)$$

ここで, $\sigma_{ij}(t)$, $\varepsilon_{kl}(t)$ はそれぞれ応力とひずみである. $C_{ijkl}(t)$ は緩和弾性テンソルであり, 単位ステップ関数状のひずみ入力 $\varepsilon_{kl}(t) = H(t)$ が与えられた場合の応力履歴に相当する.

時間 t について式(1)に Laplace 変換を施すことにより Laplace 像空間上での構成方程式を次式のように得る。ただし初期条件として $\sigma_{ij}(0) = 0$ を与えた。

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = s \bar{C}_{ijkl}(s) \bar{\varepsilon}_{kl}(s) \quad (2)$$

ここで s は Laplace 変換パラメータである。

2.2 線形熱粘弾性体の構成方程式 次に構成方程式が温度依存性を示す場合について考える。線形熱粘弾性体の緩和弾性係数と温度 T および時間 t の間には、温度-時間換算則が成立し時間に対して対数で表すと次式のようになる。

$$C(\log t, T_0) = C(\log t - \log \alpha_{T_0}(T), T) \quad (3)$$

よって図 1 に示すように任意の温度 T における緩和弾性係数は、ある温度 T_0 における緩和弾性係数を表すマスターカーブを対数時間軸方向に $\log \alpha_{T_0}(T)$ だけ平行移動することによって求められる。ここで α_{T_0} は T_0 と T によって決まる値であり、シフトファクターと呼ばれる。

式(3)を実時間 t に直し換算時間 t' で書き直すと次式を得る。

$$C(t, T) = C\left(\frac{t(T_0)}{\alpha_{T_0}(T)}, T\right) = C(t'(T_0), T_0) = C(t') \quad (4)$$

よって、換算時間 t' を用いて記述すれば、温度の影響を時間によって置き換えることが可能となる。また、温度が時間とともに変化する場合の換算時間 t' は次式を用いて計算される。

$$t' = \int_0^t \alpha_{T_0}^{-1}(T(\tau)) d\tau \quad (5)$$

したがって、熱粘弾性体の構成方程式は時間 t を換算時間 t' に置き換え、さらに熱ひずみの項を加えることにより与えられる。

$$\sigma'_{ij}(t') = \int_0^{t'} C_{ijkl}(t'-\tau) \frac{d}{d\tau} \{ \varepsilon'_{kl}(\tau) - \theta'(\tau) \delta_{kl} \} d\tau + C_{ijkl}(t') \varepsilon'_{kl}(0) \quad (6)$$

右辺における $\theta'(\tau) \delta_{kl}$ が温度変化に伴う熱ひずみの項である。

さらに換算時間 t' について式(6)を Laplace 変換することにより像空間上での構成方程式を次式で示すことができる。

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = s \bar{C}_{ijkl}(s) \left\{ \bar{\varepsilon}_{kl}(s) - \bar{\theta}(s) \delta_{kl} \right\} \quad (7)$$

よって熱粘弾性体の問題も Laplace 像空間上では熱弾性体の問題と同様に求める事ができ、得られた像空間上の解に Laplace 逆変換を施し、さらに換算時間 t' を実時間 t に変換することで、応力またはひずみの時刻歴を求める事ができる。

2.3 線形熱粘弾性問題の境界要素法による定式化 ここでは線形熱粘弾性体についての境界要素法による定式化について述べる。なお本解析での定式化では対象とする現象の時間が物体の慣性力を無視できるほど長いものとし、温度変化は緩や

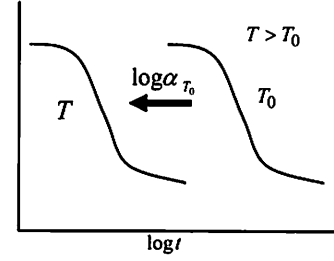


Fig.1 Definition of relaxation modulus and shift factor

かで、物体内の温度は一様であるとみなす。以上の仮定より Laplace 変換領域における釣り合い方程式は以下のように表される。

$$s \bar{C}_{ijkl} \bar{u}_{k,jj} + \bar{\gamma}_{ij,j} = 0 \quad (8)$$

ただし $\bar{\gamma}_{ij}$ は次式で与えられる熱ひずみの項である。

$$\bar{\gamma}_{ij} = s \bar{C}_{ijkl} \bar{\theta}_{kl} \quad (9)$$

式(8)より、温度変化の無い場合と比べて最後の項が付加されていることがわかる。すなわち通常の Navier の式に $-\bar{\gamma}_{ij,j}$ の体積力が働くこととなり $\bar{t}_i + \bar{\gamma}_{ij} n_j$ の表面力が与えられた問題と同様に扱うことができる⁽⁵⁾。

以上の定式化から、Laplace 変換領域における線形熱粘弾性問題は、支配方程式(8)を与えられた境界条件の下で解く問題に帰着する。よって通常の熱弾性問題の定式化に従えば式(8)に対応する Laplace 像空間上での境界積分方程式は次式で与えられる。

$$\bar{C}_{ij}(p) \bar{u}_i(p) = \int_{\Gamma} \left\{ \bar{t}_i(Q) \bar{U}_{ij}(p, Q) - \bar{u}_i(Q) \bar{T}_{ij}(p, Q) + \bar{\gamma}_{jk} n_k \bar{U}_{ij}(p, Q) \right\} d\Gamma \quad (10)$$

ここで \bar{C}_{ij} は境界上の性状により決まる定数である。また境界上の核関数 \bar{U}_{ij} および \bar{T}_{ij} は式(8)を満たす境界積分方程式の基本解であり、一般の静弾性問題と同様に、2 次元直交異方性材料であれば Rizzo と Shippy の解⁽⁶⁾を用いれば良い。

式(10)において境界上の表面力および変位を離散化して近似し、未知量に関する項を左辺、既知量に関する項を右辺に移動して整理することで Laplace 像空間上での未知境界節点値を求めることができる。なお、本研究では数値 Laplace 逆変換に対し、細野の方法⁽⁷⁾を用いた。

3. 異方性熱粘弾性体の解析例

3.1 CFRP の熱粘弾性モデル 本研究では、解析対象材料である CFRP 積層板の熱粘弾性特性を、弾性要素(ばね)と減衰要素(ダッシュポット)からなる力学モデルを用いて近似することとした。従来の多くの研究では、図 2 に示されるような Kelvin 鎖の 3 要素モデルが用いられている。Kelvin モデルによる緩和弾性係数は、以下の式により表される⁽³⁾。

$$\frac{E_r(t')}{E^0} = \frac{q_1'}{p_1'} \exp\left(\frac{-t'}{p_1'}\right) + q_0' \left\{ 1 - \exp\left(\frac{-t'}{p_1'}\right) \right\} \quad (11)$$

しかしながら、Kelvin 鎖の 3 要素モデルは、近似の自由度が低い
ため、時間に対して弾性率が急激に緩和する傾向を示し、
CFRP のような材料に対しては緩和弾性係数の近似に際して多
くの誤差が生じる。

そこで本論文では図 3 に示すように、ばねとダッシュポット
が直列に並び、さらにそれらの要素が並列に組み合わせられた
Maxwell モデルを採用することとした。一般化 Maxwell モデル
では、必要に応じて要素数を増加させることにより、粘弾性モ
デルの近似精度を高めることが可能である。一般化 Maxwell モ
デルにおける緩和弾性係数は、以下の式で定義される⁽⁸⁾。

$$E(t) = \sum_{k=1}^n E_k e^{-t/\tau_{M,k}} + E_0 \quad (12)$$

また、周期的なひずみ入力に対応する動的弾性率は次式で定義
される。

$$E'(f) = \sum_{k=1}^n E_k \frac{(2\pi f\tau_{M,k})^2}{1 + (2\pi f\tau_{M,k})^2} + E_0 \quad (13)$$

ここで、上の二式において E_0 および E_k はばねの弾性率、 $\tau_{M,k}$
は緩和時間、 f は周波数である。

3.2 CFRP の動的弾性率 動的粘弾性測定器により計測
したデータより作成した CFRP の動的弾性率のマスターカーブ
を図 4 に示す。 E'_L は繊維方向、 E'_T は繊維に垂直方向、 G'_{LT} は
せん断方向の動的弾性率を示している。この動的弾性率は線形
熱粘弾性体での温度-時間換算則に基づいて作成したものであり、
その際に用いるシフトファクターを図 5 に示す。シフトファ
クター α_τ は次式に示す Arrhenius の式を用いて近似を行った。

$$\log \alpha_\tau(T) = \frac{\Delta H}{2.303R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad (14)$$

ここで、 ΔH は活性化エネルギー [kJ/mol]、 R は気体定数
(8.31×10^3 [kJ/mol])、 T は温度 [K]、 T_0 は基準温度 (345K) である。
 ΔH の数値については図 5 中に示し、2 つの温度範囲で直線近似
ができる。

この動的弾性率の実験値と重なるように、一般化 Maxwell モ
デルのばねとダッシュポットの組を 39 組用いた。それぞれのば
ねの弾性率とダッシュポットの緩和時間および E_0 に相当する
ばねの弾性率を決め、その値を用いて本解析を行った。

3.3 CFRP の線膨張係数 CFRP の線膨張係数は横型熱膨
張計を用いて一方向 CFRP 積層板を測定したものをを用いた。求
めた線膨張係数を表 1 に示す。ここで、 α_L は繊維方向であり、
 α_T は繊維に垂直方向の線膨張係数であり、測定結果に温度に対
する線形性が見られたため、直線の傾きより表中の値を定めた。

3.4 一方向 CFRP の残留応力解析 単層 CFRP の熱粘弾性
解析に用いた解析モデルを図 6 に示す。モデルは x_1 軸方向に固
定された任意長さの棒(帯板)をモデルとし、 x_2 軸方向が繊維方
向として解析を行った。対称条件を考慮し図中の斜線部のよう
に正方形形状にとりだしたものを計算領域とし、上面を自由面そ

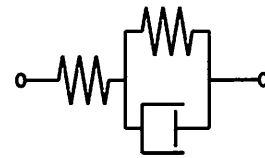


Fig.2 Kelvin chain model

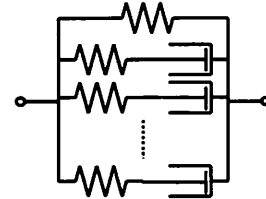


Fig.3 Generalized Maxwell model

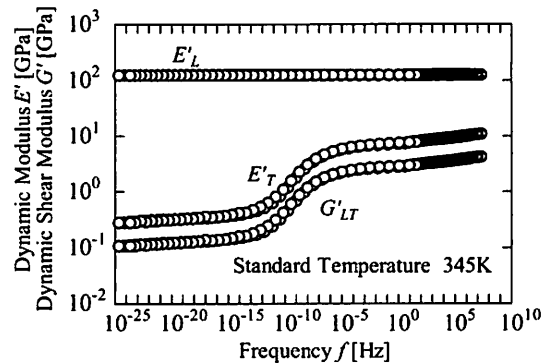


Fig.4 Dynamic modulus of CFRP

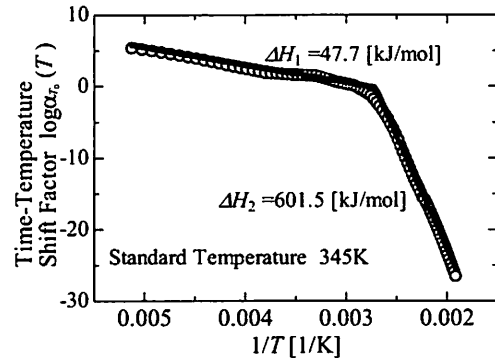


Fig.5 Shift factor of CFRP

Table.1 Coefficient of linear expansion of CFRP

	~107°C	107°C~
α_L [1/K]	1.35×10^{-6}	
α_T [1/K]	4.00×10^{-5}	1.10×10^{-4}

他の 3 辺を対称条件として、境界全域を 16 要素 48 節点の 2
次非適合要素で分割した。

解析対象の温度は、時間に対して一次関数的に降下していく
ものとし、初期温度を 180°C、最終温度を 20°C、冷却時間を
3600[s]とした。また温度が低下する条件で換算時間を用いて計
算を行う場合には長い時間の計算は精度が出ないため、時間を
区分して結果を重ね合わせることで解析を行った⁽³⁾。

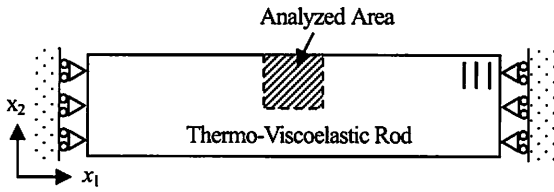


Fig.6 Model 1 (Annealing of rod)

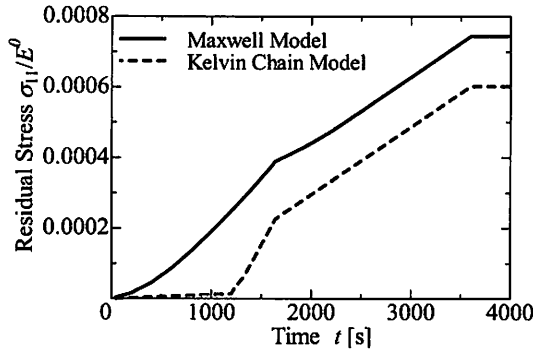


Fig.7 History of residual stress σ_{11}

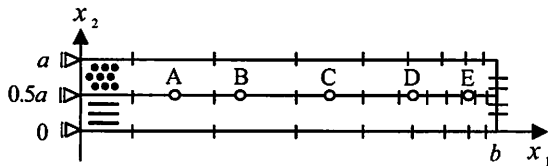


Fig.8 Model 2 (CFRP laminate beam)

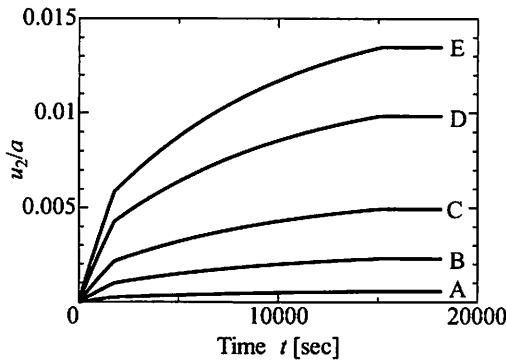


Fig.9 History of displacement u_2

解析結果を図7に示す。Kelvin鎖の3要素モデルを用いると、粘弾性特性の近似精度が低いことに起因して、1200[s]前後で急激な応力変動が生じるとともに、最終的な残留応力もやや低く見積もられている。他方、一般化Maxwellモデルを用いて緩和弾性係数の近似精度を高めたことにより、応力の結果に違いが見られていることがわかる。

3.5 CFRP 積層はりの熱粘弾性解析 ここでは、図8に示すような 0° 層と 90° 層を積層したCFRPにおける熱粘弾性変形挙動解析を行った。解析モデルは図8に示すような2次元モデルとし下の層は 0° 層であり x_1 方向が繊維方向であり、上の層が 90° 層であり奥行き方向が繊維方向である。また解析モデルは長さ $2b$ に対して厚さ a を $1/10$ とし、対称性を考慮して全体の $1/2$ を計算領域とした。そのため左端は対称条件、他の境界はすべて自由端となる。また、熱変形を伴う異材接合モデルで

は、界面端近傍で特異応力場となる。そこで界面端近傍を等比級数的に細かく要素分割し、1領域に対し24要素で計算を行った。

シフトファクター、線膨張係数は一方向CFRPと同様の数値を使用し、動的弾性率は一方向CFRPと同様に一般化Maxwellモデルを用いた場合の数値を用いるものとする。また、本解析で用いる解析対象の温度条件はCFRP積層板成形時に測定した温度を用いるものとする。温度条件は硬化温度である 130°C から室温である 25°C まで約15000[s]で緩やかに冷却するものとして解析を行った。

図9に図8に示したA~Eの層間での変位 u_2 を示す。変位 u_2 は試験片端部に行くほど大きくなり、試験片全体に大きなそりが生じていることがわかる。またどの変位においても繊維に垂直方向の線膨張係数が変化する温度 107°C での時間、すなわち2000[s]付近で傾きの変化が見られる。

4. 結言

本研究では境界要素法により2次元での異方性熱粘弾性解析を温度-時間換算則に基づく熱粘弾性理論およびLaplace変換法を用いて行い、異方性熱粘弾性体である一方向CFRPにおける粘弾性体モデルの影響を比較検討し、積層CFRPの変形挙動について検討した。その結果、粘弾性モデルにKelvin鎖の3要素モデルを用いていた従来の研究から一般化Maxwellモデルを用いることで緩和弾性係数の近似精度を高めたことにより、全体として応力の結果に違いが見られ、その条件で単層CFRPの残留応力解析、繊維配向 $[0^\circ/90^\circ]$ で積層したCFRPの変形挙動解析を行えることが確認できた。

5. 参考文献

- (1) Ferry, J. D. : Viscoelastic Properties of Polymers, (1960), John Wiley & Sons(訳: 祖父江寛, 村上謙吉, 高橋正夫: 高分子の粘弾性, (1964), 東京科学同人).
- (2) 荒井政大, 柴田康二, 足立忠晴: 境界要素法による熱粘弾性材料の残留応力解析, 境界要素法論文集, Vol.15, (1998), pp.29-34.
- (3) 隅田武志, 荒井政大, 清水理能: 境界要素法による異方性材料の熱粘弾性応力解析, 境界要素法論文集, Vol.21, (2004), pp.59-64.
- (4) 日本機械学会 編: 固体力学 基礎と応用, (1987), pp.99-114, オーム社.
- (5) 結城良治, 木須博行: 境界要素法による弾性解析, (1987), p81, 培風館.
- (6) 荒井政大, 上村元祥, 足立忠晴, 山路昭彦: CFRP直交積層板の層間破壊靱性値の評価, 日本機械学会論文集(A編), Vol. 65, No. 639, (1999), pp.2238-2245.
- (7) 細野敏夫: 数値ラプラス変換, 電気学会論文集 A, Vol.99, No.10, (1979), pp.44-50.
- (8) 中川鶴太郎, 神戸博太郎: レオロジー, (1957), pp.353-431, みすず書房.