

並列化有限要素法に基づく陰解法を用いた円柱周り流れの LES 乱流解析

三浦 慎一郎 (東京都立産業技術高等専門学校 ものづくり工学科)

概 要

有限要素法を用いた流体解析は、工学的に見られる複雑な形状への適用性から有力な数値計算法の一つであると考えられるが、莫大な計算コストを必要とする。本研究ではこれらの問題を克服するため、並列計算機を用いて領域分割型アルゴリズムを用いた並列化、さらに高精度化を図るために陰解法を用いた高 Reynolds 数域における円柱周り流れの有限要素解析を行う。

1 はじめに

工学的問題に見られる複雑形状を有する流れ場の解析では、非構造格子（または要素）への適用性や境界条件の扱いやすさ、さらに解析精度の点で、差分法や有限体積法などに比べて有限要素法は優れていると考えられる。

一方で、有限要素法は有限要素内の係数行列を組み立て、全体系への方程式を構成しそれを解くことに帰着されるため、各種係数行列の組み立てや大規模な行列を扱う必要となり、計算コストの掛かる手法であるといわれている。しかし、近年の急速的な計算機の発展や PC クラスタをはじめとする並列計算機が普及し、さらに有限要素法に特徴的な要素間での並列化を可能とする、領域分割法のアルゴリズムの開発により、大規模な数値計算が可能になってきた。

本研究においても、このような実用的な問題に対応させるために、領域分割型並列化アルゴリズムを導入し、高速化を図った有限要素法による複雑形状、高 Reynolds 数域における乱流解析を行うことを目指す。その中で、円柱周り流れ問題を取り上げ、本手法の大規模乱流計算への妥当性を検討する。

円柱周りの流れ解析は基本的形状の物体周り流れであり、低い Reynolds 数においては 2 次元計算も良く行われている。しかし、Reynolds 数が約 3900 を超えると円柱後流では完全な乱流状態となり、さらに Reynolds 数が約 5×10^5 を超えると円柱表面の境界層が乱流に遷移して剥離が円柱後流位置に変化し、抵抗係数が急激的に減少することが知られている。このように高い Reynolds 数の流れ場では強い 3 次元性を示し、境界層の存在や剥離位置が変動するなどの現象が見られる。このような現象を正確に捉えるには、精度の高い数値計算法と大規模な計算を必要とする。

本研究においても、高精度な数値計算法と大規模計算への手法の確立を目指し乱流計算を行うことを試みるものである。大規模な計算を行うために領域分割型アルゴリズムによる並列化有限要素法を用いて、乱流解析を試みる。数値計算法は、高精度な上流化スキームを図るために指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法を用いる [1], [2]。乱流モデルは、標準 Smagorinsky モデルを用いる。並列化プログラミングには、PC クラスタなどのメモリ分散型並列計算機の利用も考慮し MPI によるコードを使用する。また小領域への領域分割は METIS により自動分割を行い、小領域間の袖領域においてはオーバーラップ領域を用いて並列化に伴う計算精度の劣化を防ぐ。

数値計算例として，大規模な計算を必要とする高 Reynolds 数域 ($Re = 140,000$) に
おける円柱周り流れの Large Eddy Simulation(以下，LES) 解析を試みる．

2 LES 基礎方程式及び数値計算法

2.1 基礎方程式

無限長を想定した円柱周り流れ問題を考える上で，非圧縮性粘性流体を仮定した
運動方程式及び連続の方程式から，LES を基にしたフィルターを施し，次のフィル
タリングされた支配方程式を得る．

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \left(\frac{1}{Re} + \nu_t \right) \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \quad (1)$$

式 (1) において， ν_t で表れる subgrid-scale(以下，SGS) モデルには，本研究では
標準 Smagorinsky モデル及び減衰関数を併用したモデルを用いる．

2.2 有限要素スキーム

運動方程式及び連続の式に対する計算のアルゴリズムにはフラクショナルステッ
プ法を用いる．空間の離散化には，有限要素法に基づく離散化を行う．本研究では
高 Reynolds 数域を対象とした乱流場を考えるため，高精度な上流化手法を与える必
要がある．そこで本手法では，空間の離散化に関して角田，登坂ら [1], [2] によって
提案された指数関数による重み関数を用いた指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素
法による有限要素スキームを構成する．指数関数型重み関数は次式により表される．

$$M_\alpha = \sum_{\gamma, i} N_\alpha e^{-a_i(N_\gamma x_i^\gamma - x_i^\alpha)}, \quad a_i = \frac{\alpha_i}{|L_i|} \text{sign}(\hat{u}_i) \quad (\text{no sum on } i) \quad (2)$$

ここで N_α では双 1 次補間関数を用いるものとし，さらに式 (2) に表れる α_i は上流
化の割合を示すスケーリングパラメータ， L_i は i 方向の要素代表長さ， $\hat{u}_i$ は i 方向
の要素内平均速度， sign は上流側方向を決定するための符号関数である．

有限要素法における質量行列は計算速度や記憶容量の点から，通常対角成分への
集中化が行われるが Petrov-Galerkin 型の上流化を用いた場合，非等方的性質の数値
粘性が等方的性質に変換されるため，対流項に対する位相誤差が増大すると考えら
れる．そこで Multi-pass アルゴリズムのような上流化の非等方性を確保したまま陽
解法で計算を行うことが考えられるが，本手法では境界層を含む流れ場を計算する
ため時間積分の計算コストも考慮し，陰解法を用いることによりこれらの問題を解
決する．したがって時間積分には主流方向及び，垂直方向成分の対流項及び乱流粘性
項に対しては 2 次精度 Adams-Bashforth 法，物理粘性項に関しては Crank-Nicolson
法を用いる．スパン方向には対流項，拡散項共に 2 次精度 Adams-Bashforth 法によ
る時間積分を行う．その他，圧力ポアソン方程式に関しては通常の Galerkin 有限要
素法を用いる．また要素形状は 6 面体要素として，流速及び圧力の補間関数は共に
双 1 次補間関数を用いる．連立方程式の解法として，運動方程式に対しては対角ス

ケーリング付き BiCGStab 法 (L2 ノルムの相対残差 10^{-8}) , 圧力ポアソンに関しては, 対角ケーリング付き CG 法 (L2 ノルムの相対残差 10^{-3}) を用いた. 行列の格納方法は, スカラ計算機の利用を考慮し Compressed Row Storage(CRS) 形式 [3] で行った. その他, 詳しい離散化方法は文献 [4] を参考にされたい.

3 数値計算例

3.1 計算領域及び境界条件

本手法を高 Reynolds 数域での円柱周り流れに適用する. 計算領域を図 1 に示す. Breuer[5] は, スパン方向長さ $1D$, $2D$, πD の長さで検討を行っているが, それによるとスパン方向の長さによる影響は大きいと考えられるため, 本研究ではスパン方向長さは $4D$ とする. 境界条件は円柱上はノンスリップ条件, 流入速度は代表流速として主流方向に一樣な流れを与え, 流出条件は自由流出とする. スパン方向は周期条件を課し, 垂直方向境界においてはスリップ条件を与える.

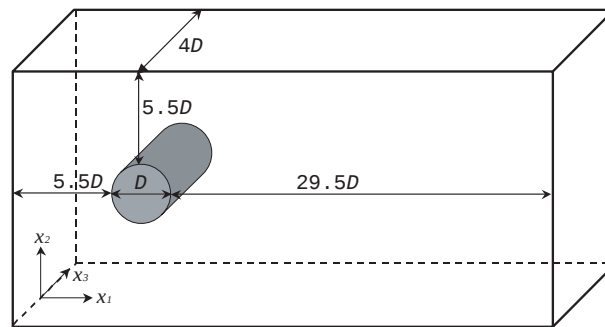
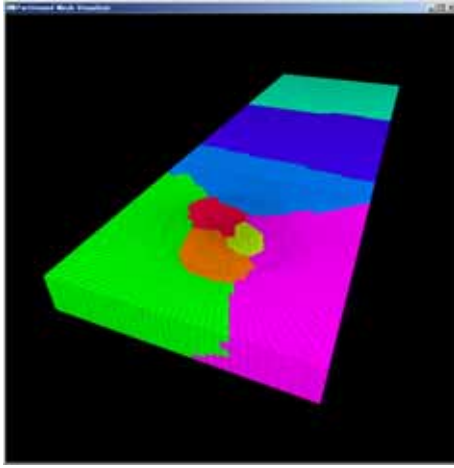


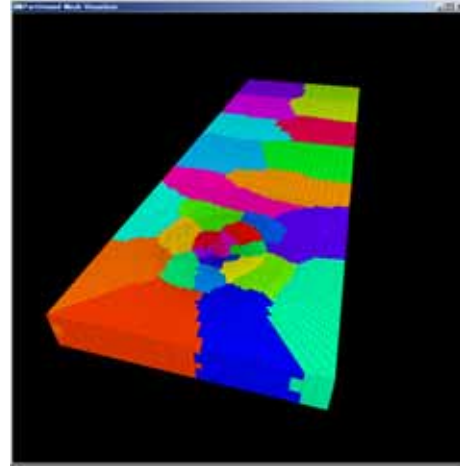
図 1: 計算領域

3.2 領域分割法

並列化のアルゴリズムは, 領域分割法に基づく並列化を行う. 領域分割方法は, フリーソフトウェア METIS[6] に従い小領域に分割される (図 2). その際, 小領域間のデータ交換方法は要素のオーバーラップからデータの交換を行う手法を採用するが, METIS ではオーバーラップ領域となる要素情報が得られないため, データ入力の際にそのオーバーラップとなるデータ交換部 (マスターとスレーブの節点) を与え, 小領域間の整合性を取るよう計算中で小領域間のデータ交換を行う. これらのプログラムには MPI で行い, この交換部分の MPI 命令は Isend と Irecv による非ブロッキング通信を用いる. 計算機は, PC クラスタ (Intel PentiumD, 3.0Ghz, 4 ノード 8CPU) または, IBM eServer p595 (8CPU または 16CPU) を用いた.



(a) 8 分割



(b) 32 分割

図 2: METIS による領域分割

表 1: 各種パラメータ

Case	mesh num.	Cs	α_i
Case A1	mesh1	0.10	0.10
Case A2	mesh1	0.10	0.25
Case A3	mesh1	0.17	0.10
Case A4	mesh1	0.17	0.25
Case A5	mesh1	0.17	0.50
Case B1	mesh2	0.17	0.25

3.3 計算条件

Reynolds 数を 140,000 とし, 2 つのメッシュにより計算を行う. 円柱に対して周方向 128 分割, 半径方向に 72 分割とした. スパン方向分割に関しては 60(mesh1) と 120(mesh2) のものを用いる. mesh1 での総要素数 766,080, 総節点数 793,427, mesh2 での総要素数 1,532,160, 総節点数 1,573,847 である. 最小メッシュ幅は 2.66×10^{-3} ($\approx 1/\sqrt{Re}$), 時間刻み幅を 1.0×10^{-3} として計算を行う. 本手法では SGS モデルに含まれる Smagorinsky 定数及び, 指数関数型重み関数に含まれるスケーリングパラメータ α_i が含まれる. これらのパラメータの依存性を調べるために, いくつかのケーススタディを行う. 表 1 にそれらをまとめる.

4 計算結果

スパン方向及び時間に関して平均を取った統計データにより, Cantwell らの実験データ [7] と比較する. 統計データの算出は, 充分流れの状態が発達したと判断される時刻から無次元時間 60 により算出した.

4.1 流速分布

主流方向流速成分の分布を実験値と比較した結果を図3に示す．いずれのケースで，実験値と良好な一致をしていることが分かる．このことから各種パラメータ，スパン方向へのメッシュ解像度の影響は，流速に関しては影響していないことが分かる．

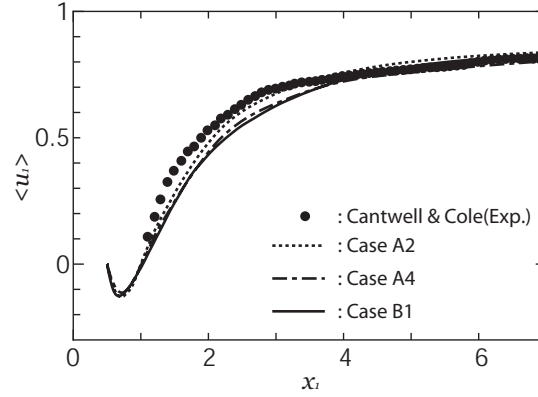


図 3: 主流方向流速成分

4.2 空力特性及び乱流強度

表2に円柱後流における循環渦長さ L_r ，抗力係数 C_D ，円柱背圧値 $C_{P_{back}}$ ，ストローハル数 St をまとめる．表2の L_r の比較から，再循環領域が実験値に比べてや

表 2: 円柱周りの時間平均空力特性値

Case	L_r	C_D	$C_{P_{back}}$	St
Case A1	0.62	0.56	-0.43	0.23
Case A2	0.51	0.60	-0.41	0.19
Case A3	0.61	0.69	-0.52	0.21
Case A4	0.50	0.74	-0.49	0.21
Case A5	0.59	0.73	-0.48	0.17
Case B1	0.53	0.93	-0.66	0.17
Exp.[7]	0.44	1.237	-1.21	0.179

や大きい結果となっている．抗力 C_D との比較から Case B1 を除いて，全体的に低い値となっている．ストローハル数 St はほぼ実験値に近い値となっている．

主流方向，垂直方向成分の乱流強度分布及びレイノルズ応力分布を実験値と比較した図を図4-図6に示す．ここで，上流かの割合を示すスケーリングパラメータの

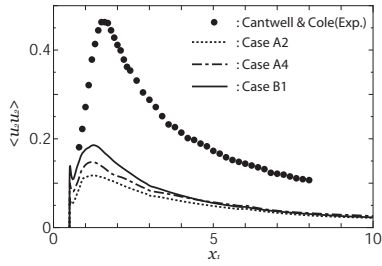


図 4: 主流方向乱流強度

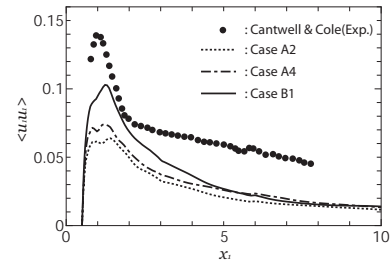


図 5: 垂直方向乱流強度

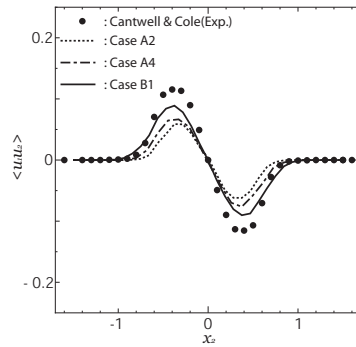


図 6: 円柱周りの Reynolds 応力

違いによる計算結果の差異がほとんど見られないことから、代表的なケースでの結果を図示する。

図 4 は、円柱後流における主流方向成分の乱流強度分布を示す。実験値との比較から、乱流強度は小さく見積もられていることがわかるが、ピーク位置に関しては予測できている。

図 5 は、円柱後流における垂直方向成分の乱流強度分布を示している。主流方向の場合と同様に、乱流強度の値は小さく見積もられているものの、ピーク位置に関しては十分に予測できており、さらに、スパン方向への解像度を増したメッシュでは、実験データに近い値を示していることが分かる。

図 6 は、円柱周りのレイノルズ応力を示したものである。いずれの計算も実験値に近い値を示しており、特にスパン方向への解像度を増した Case B1 では、充分な一致が見られていることが分かる。

5 まとめ

本手法は、指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法に基づく上流化スキームを用いて、 $Re = 140,000$ における円柱周り流れの LES 計算を行った。また、上流化効果を適切に取り入れるために運動方程式に対しても陰解法を用いた。さらに、大規模な計算を行うために領域分割法に基づく並列計算を行った。その結果、いくつか

の見解が得られた。

1. 円柱後方における流速に関しては定量的な一致が見られ、スパン方向成分の分割数の影響や Smagorinsky 定数の影響も小さいことが分かった。
2. 乱流強度に関しては、スパン方向分割数による影響が見られた。また、主流方向及び垂直方向成分に関しては、実験データとの差異が見られた。
3. 抗力に関して、実験と比べると過小評価される傾向にあったがスパン方向の分割数の影響が見られ、分割数を増やすことで改善された結果が得られた。
4. 上流化の割合を示すスケーリングパラメータを 0.1, 0.25, 0.5 として与えたが、流速、乱流強度に関してほとんど差異が見られなかった。しかし、Smagorinsky モデルの値 (0.1 と 0.17) に大きく影響を受ける結果となった。

今後の課題として、背圧係数の実験データとの差異から剥離位置付近におけるメッシュ解像度の影響が考えられるため、今後これらの影響について考察する必要があると思われる。

謝辞: 本研究で使用した計算機の一部は、九州大学情報基盤センターにおける高性能演算サーバ (IBM eServer p5 モデル 595) を利用した。特に「春の無料キャンペーン」においては無料で使用させていただいたことに感謝致します。

参考文献

- [1] Kakuda, K., Tosaka, N. :Finite element approach for high Reynolds number flows, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.41, pp.223-232, 1992.
- [2] Kakuda, K., Tosaka, N. Nakamura, T.:Finite element analysis for 3-d high Reynolds number flows, *Int. J. Comp. Fluid Dyns.*, Vol.7, pp.163-178, 1996.
- [3] 長谷川 里美, 長谷川 秀彦, 藤野 清次 訳, 反復法 Templates, 朝倉書店, 1996.
- [4] 三浦 慎一郎, 水内 衛, 角田 和彦: 有限要素法を用いた円柱周り流れの LES 乱流解析, 日本計算工学会計算工学講演論文集, Vol.11, No.1, pp.277-280, 2006.
- [5] Breuer, M., A challenging test case for large eddy simulation: high Reynolds number circular cylinder flow, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol.21, pp.648-654, 2000.
- [6] The METIS home page, <http://www.cs.umn.edu/~metis>
- [7] Cantwell, B., Coles, D. :An experimental study of entrainment and transport in turbulent near wake of a circular cylinder, *J. Fluid Mech.*, Vol.136, pp.321-374, 1983.