

行列ランク最小化を利用した高次 QAM 検出法の研究

代表研究者

小西 克巳

工学院大学 情報学部 准教授

1 はじめに

本研究では、無線 LAN やモバイル通信、デジタルテレビ放送等の高速通信のために利用される変調方式である直角位相振幅変調 (quadrature amplitude modulation, QAM) の信号検出に注目し、ソフトウェア検出手法を提案する。多くの QAM 検出アルゴリズムが最尤推定法に基づいて提案されている。しかしながら、最尤推定に基づく QAM 検出問題は組合せ最適化問題であり、一般には NP 困難であることが知られており、解くのは難しい。組合せの難しさを解決するために、半定値計画問題を応用した検出手法 [1, 2, 3, 4] が提案されている。半定値計画問題は多項式時間で解けるが、実際の QAM 検出を実現するには計算時間を多く要するため、実用アルゴリズムとしては現実的ではない。そこで本研究では、新しいソフトウェア QAM 検出手法として、スパース最適化に基づく検出手法を提案する。スパース最適化とは、ベクトルの L_0 ノルムを目的関数とする最小化問題や、行列のランクを最小化する行列ランク最小化問題である。本研究では、行列ランク最小化を利用した QAM 検出手法の導出が最終目的であるが、その前段階の研究として、 L_0 ノルム最小化に基づく QAM 検出法を研究し、新しい手法を提案した。

最尤推定に基づく QAM 検出問題は、凸 2 次整数計画問題として定式化される。通常的手法では、この問題を凸 2 次計画問題として解き、何からの方法により得られた解を整数値に丸めて QAM 検出を実現している。本研究では、この「丸める」操作に注目し QAM 検出手法を提案する。具体的には、丸め誤差を L_0 ノルムで表現し、凸 2 次関数と L_0 ノルムの和を目的関数とした QAM 検出問題を提案する。 L_0 ノルムを目的関数に含む問題は一般には NP 困難な問題となるが、 L_1 ノルムで緩和することで、FOBOS (forward-backward splitting) アルゴリズムで効率良く解けることが知られている。そこで本研究では、FOBOS アルゴリズム [5] を利用した QAM 検出アルゴリズムを提案する。提案するアルゴリズムは一種の発見的な手法ではあるが、高速に求解可能であるという特徴を持つ。数値実験により、半定値計画問題を応用した検出手法とほぼ同じ精度で、より高速に解けることを示す。

2 QAM 検出問題

以下のような多入力多出力の通信路を考える。

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n},$$

ここで、 $\mathbf{s}$ は送信シンボルで各要素が整数値となるベクトル、 $\mathbf{n}$ はノイズベクトル、 $\mathbf{y}$ は受信信号ベクトルを表す。受信信号から送信信号を推定する最尤推定問題は、以下のように定式化される。

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}\|^2 \\ &\text{subject to} \quad \hat{\mathbf{s}} \in \mathcal{A}^{N_t} \end{aligned}$$

ここで、 $\hat{\mathbf{s}}$ は受信信号の推定値であり、 $\mathcal{A}$ は整数集合である。この問題は組合せ最適化問題となり、解くのは難しい。

3 提案手法

本研究では、前節で定式化された QAM 検出問題の代わりに以下のような問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}\|^2 + \lambda \|\mathbf{e}\|_0 \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{e} = \hat{\mathbf{s}} - \text{round}(\hat{\mathbf{s}}) \\ & \quad \quad \quad a_1 \leq \hat{s}_i \leq a_q \text{ for all } i \end{aligned}$$

ここで, $\text{round}()$ は最も近い整数を返す関数である. 受信信号において, ノイズが小さい場合, 上記問題の解は前節で定式化した QAM 検出問題の解を完全に一致する. 上記問題は L_0 ノルム項を含むため, 組合せ最適化問題となり解くのは難しい. そこで本研究では, L_0 ノルム項を L_1 ノルムで緩和する以下の問題を考える.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}\|^2 + \lambda \|\mathbf{e}\|_1 \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{e} = \hat{\mathbf{s}} - \text{round}(\hat{\mathbf{s}}) \\ & \quad \quad \quad a_1 \leq \hat{s}_i \leq a_q \text{ for all } i \end{aligned}$$

上記問題において round 項が既知であれば, FOBOS (forward-backward splitting) アルゴリズムと呼ばれるアルゴリズムにより効率的に解くことができる. そこで本研究では, FOBOS アルゴリズムに基づいて解を更新しながら, round 項を更新する新しい手法を Algorithm 1 に提案する. 本手法により, 厳密解が得られる保証はないが, 数値実験により効率的に良い解が得られることが示されている.

Algorithm 1 MIMO detection algorithm

Input: $\lambda > 0, \eta > 0, \gamma > 0, j, \xi$
 $\mathbf{d} \leftarrow \text{round}((\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y})$
 $\mathbf{e}^1 \leftarrow -\mathbf{d}$
for $k = 1$ to j **do**
 for $m = 1$ to ξ **do**
 $\mathbf{e}^{k+\frac{1}{2}} \leftarrow (\mathbf{I} - \eta \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \mathbf{e}^k + \eta \mathbf{H}^T (\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{d})$
 for all i **do**
 $e_i^{k+1} \leftarrow \text{sign}(e_i^{k+\frac{1}{2}}) [|e_i^{k+\frac{1}{2}}| - \lambda \gamma]_+$
 end for
 for all i **do**
 if $e_i^k + d_i < a_1$ **then**
 $e_i^{k+1} \leftarrow a_1$
 else if $e_i^k + d_i > a_q$ **then**
 $e_i^{k+1} \leftarrow a_q$
 end if
 end for
 end for
 $\mathbf{d} \leftarrow \text{round}(\mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{d})$
end for
 $\hat{\mathbf{s}} \leftarrow \text{round}(\mathbf{e}_{j+1} + \mathbf{d})$
Output: $\hat{\mathbf{s}}$

3 数値実験

本節では, 提案手法の数値実験を行う. 本手法の有効性を示すため, 文献[1]で提案されている SDR 法に基づく手法と比較する. 本数値実験において, 通信路は独立なガウス過程により生成した. 全ての数値実験は MATLAB 上で実装し, SDR 法では SeDuMi [6] を用いた. また, 計算に用いた計算機は Intel Core i7 3.4GHz, メモリ 16GB である.

信号が 16QAM の場合について, $\mathbf{H}$ を 8×8 の行列とし, 外乱を 0 から 25 dB の範囲で変化させ SER (Symbol Error Rate) を求めた. 信号が 64QAM の場合については, $\mathbf{H}$ を 16×16 の行列とし, 外乱を 0 から 39 dB の範囲で変化させ SER を求めた. また, Algorithm 1 におけるパラメータ j の値を 250, 500, 1000 の場合で実験を行った. 16QAM および 64QAM の場合の SER をそれぞれ図 1 と図 2 に示す. 計算時間については, 表 1 と表

2に示す.

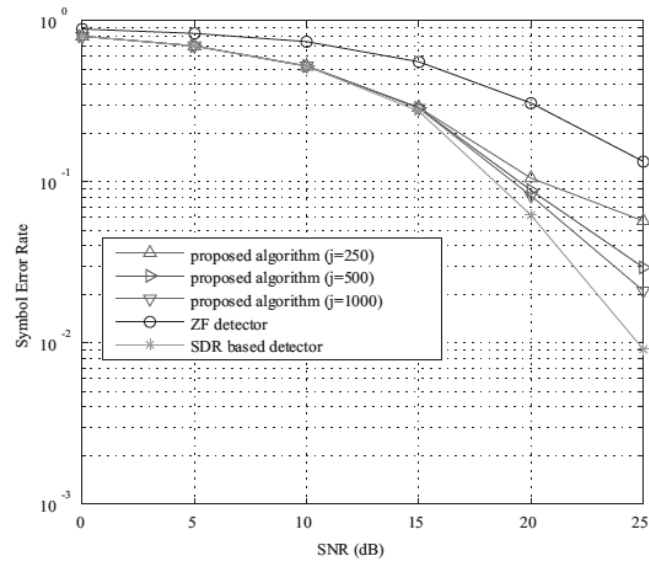


図 1. SER vs. SNR (16QAM の場合)

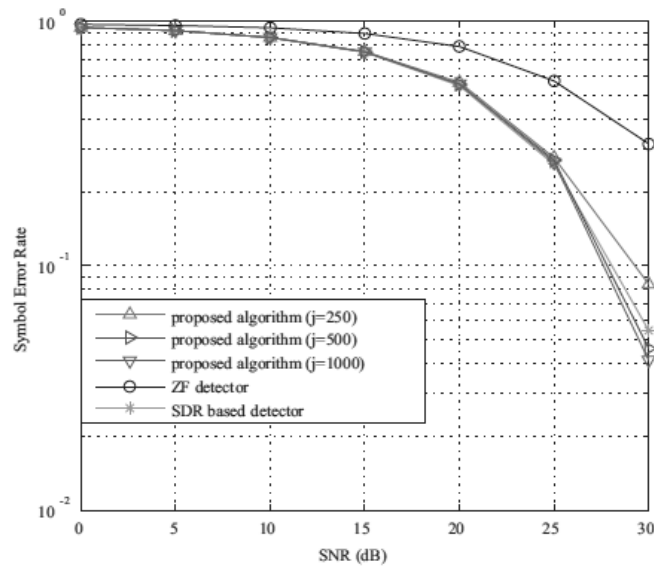


図 2. SER vs. SNR (64QAM の場合)

表 1. 計算時間[sec] (16QAM の場合)

SNR = 10 [dB]	Computing time [sec]
proposed algorithm ($j = 250$)	0.807×10^{-3}
proposed algorithm ($j = 500$)	1.576×10^{-3}
proposed algorithm ($j = 1000$)	3.091×10^{-3}
SDR based detector	5.631×10^{-3}

表 2. 計算時間[sec] (64QAM の場合)

SNR = 10 [dB]	computing time [sec]
proposed algorithm ($j = 250$)	1.156×10^{-3}
proposed algorithm ($j = 500$)	2.190×10^{-3}
proposed algorithm ($j = 1000$)	4.332×10^{-3}
SDR based detector	9.286×10^{-3}

これらの結果から、提案手法は既存手法である SDR に基づく手法よりも計算時間が短く、検出精度は同程度であることがわかる。また、メモリ使用量が少なく、実装が容易であるため、SDR に基づく手法に比べて実用的な手法である。

4 まとめ

本研究では、スパース最適化に基づく QAM 検出手法を提案した。QAM 検出問題は凸 2 次整数計画問題として定式化され、一種の組合せ最適化問題となり簡単に解くことはできない。本研究では、整数へ丸める操作に注目し、QAM 検出問題を L0 ノルム項を含む最適化問題へと定式化した。さらに、L0 ノルムを L1 ノルムで緩和し、スパース最適化手法の一つである FOBOS アルゴリズムを応用した検出アルゴリズムを導出した。提案手法は一種の発見的な手法ではあるが、効率良く解くことができる。数値実験により、本手法が半定値計画問題に基づく手法 (SDR 法) と同等の検出精度を持ち、計算時間が少ない手法であることが示された。また、提案手法はメモリ使用量も少なく、実装に適したアルゴリズムとなっている。

今後の課題としては、行列ランク最小化に基づく手法の導出があげられる。行列ランク最小化問題は、L0 ノルムに基づくスパース最適化問題と密接な関係があることから、行列ランク最小化手法を導入することで、より精度のよい QAM 検出手法の導出が考えられる。

【参考文献】

- [1] Nicholas D. Sidiropoulos and Zhi-Quan Luo, “A Semidefinite Relaxation Approach to MIMO Detection for High-Order QAM Constellations,” IEEE SIGNAL PROCESSING LETTERS, Vol. 13, NO. 9, SEPTEMBER 2006.
- [2] Ami Wiesel, Yonina C. Elder, and Shlomo Shamai (Shitz), “Semidefinite relaxation for detection of 16-qam signaling in mimo channels,” IEEE SIGNAL PROCESSING LETTERS, Vol. 12, No. 9, SEPTEMBER 2005.
- [3] A. Mobasher, M. Taherzadeh, R. Sotirov, and A. K. Khandami, “A nearmaximum-likelihood decoding algorithm for mimo systems based on semi-definite proگرامing,” IEEE Trans. on Information Theory, Vol.53, No. 11, pp. 3869-3886, 2007.
- [4] Wing-Kin Ma, Chao-Cheng Su, Joakim Jaldén, Tsung-Hui Chang, and Chong-Yung Chi, “The equivalence of semidefinite relaxation mimo detectors for high-order qam,” IEEE JOURNAL OF SELECTED TOPICS IN SIGNAL PROCESSING, Vol. 3, No. 6, 2009.
- [5] John Duchi, Yoram Singer, “Efficient Learning using Forward-Backward Splitting,” Journal of Machine Learning Research, 2009.
- [6] J. F. Sturm, “Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones,” Optim. Methods Softw., Vol. 11-12, pp. 625-653,
- [7] Z. Ding, “On convergence analysis of fractionally spaced adaptive blind equalizers”, IEEE Trans. Signal Proc., vol. 45, no. 3, pp. 650- 657, 1997.
- [8] Y. Li and Z. Ding, “Blind channel identification based on second order cyclostationary statistics”, in Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP), vol. 4, pp. 81- 84, Apr. 1993.
- [9] C. Meng, J. Tuwan, and Z. Ding, “A Quadratic Programming Approach to Blind Equalization and Signal Separation”, IEEE trans. on Signal Processing, vol. 57. no. 6, pp. 2232- 2244, 2009

- [10] Z.-Q. Luo, M. Meng, K. M. Wong, and J.-K. Zhang, “A fractionally spaced blind equalizer based on linear programming”, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 50, no. 7, pp. 1650 - 1660, 2002.
- [11] J. Mattingley and S. Boyd, “Real-Time Convex Optimization in Signal Processing”, IEEE Signal Processing Magazine, 27(3):50- 61, May 2010
- [12] H. L. Taylor, S. C. Banks, and J. F. McCoy, “Deconvolution with the L1 norm”, Geophysics, vol. 44, no. 1, pp. 39- 52, Jan. 1979
- [13] J. F. Claerbout and F. Muir, “Robust modeling with erratic data”, Geophysics, vol. 38, no. 5, pp. 826- 844, Oct. 1973
- [14] F. Santosa and W. W. Symes, “Linear inversion of band-limited reflection seismograms”, SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 7, no. 4, pp. 1307- 1330, 1986
- [15] D. L. Donoho and P. B. Stark, “Uncertainty principles and signal recovery”, SIAM J. Appl. Math., vol. 49, no. 3, pp. 906- 931, June 1989
- [16] D. L. Donoho and B. F. Logan, “Signal recovery and the large sieve”, SIAM J. Appl. Math., vol. 52, no. 2, pp. 577- 591, Apr. 1992
- [17] R. Tibshirani, “Regression shrinkage and selection via the lasso”, J. Royal. Statist. Soc B., vol. 58, no.1, pp. 267- 288, 1996
- [18] S. Chen, D. Donoho, and M. Saunders, “Atomic decomposition by basis pursuit”, SIAM J. on Sci. Comp., vol. 20, no. 1, pp. 33- 61, 1998
- [19] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”, Phys. D, vol. 60, no. 1-4, pp. 259- 268, 1992
- [20] P. Blomgren and T. F. Chan, “Color TV: total variation methods for restoration of vector-valued images”, IEEE Trans. Image Processing, vol. 7, pp. 304- 309, March 1998
- [21] E. J. Candès, J. Romberg, and T. Tao, “Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information”, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 2, pp. 489- 509, Feb. 2006
- [22] E. J. Candès and T. Tao, “Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?”, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 12, pp. 5406- 5425, Dec. 2006
- [23] D. Donoho, “Compressed sensing”, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 4, pp. 1289 - 1306, Apr. 2006
- [24] J. F. Sturm, “Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones”, Optim. Methods Softw. vol. 11- 12, pp. 625- 653, 1999

〈発 表 資 料〉

題 名	掲載誌・学会名等	発表年月
Iterative partial matrix shrinkage algorithm for matrix rank minimization	Signal Processing	2014 年 8 月