99-01049

多次元可変非整数遅延ディジタルフィルタの画像高解像度変換への応用に関する研究

鄧　　天　波　東邦大学理学部情報科学科助教授

あらまし　ディジタル画像の拡大と縮小に、空間領域では2次と3次多項式を用いた補間法が提案されているが、多項式の次数が低いため、再生した画像の画質が著しく劣化し、高精度の画像補間は極めて困難である。補間精度を高めるには、多項式の次数を高くしなければならないが、多項式の係数と再生画質の対応関係が明らかではないため、現時点では有効な解決法がまだ見当たらない。この問題を解決するため、本研究では、画像の高精度補間問題を多次元可変非整数遅延（Variable Fractional Delay: VFD）フィルタの周波数領域での最適設計問題に帰着させ、ディジタル画像の可変非整数遅延フィルタリングを行うことによって高精度の画像補間を実現する周波数領域でのアプローチを提案する。本研究の初期段階として、まず1次元VFDフィルタの閉じた形の最適設計法を提案し、設計例を用いて本設計法の有効性を実証する。

1　まえがき

通過域幅、遮断周波数、共振周波数、遅延特性などが可変なディジタルフィルタは可変ディジタルフィルタと呼ばれる。可変ディジタルフィルタは音声、画像、ディジタル通信など様々な情報処理と情報通信の分野にその有効性が期待され、最適設計と実現に関する研究は活発に行われている。可変ディジタルフィルタは振幅特性が可変なものと位相（遅延）特性が可変なものに大別できる[1]-[8]。特に最近、遅延応答が非整数（サンプリング間隔の非整数倍）でかつ可変なVFDフィルタは音声の高精度符号化、楽器のモデル化とディジタル通信における送受信信号の時間ずれの微調整などの分野に有効であることが報告されている[9]-[19]。VFDフィルタを用いれば、任意の時刻（1次元信号の場合）、または任意の空間点（2次元信号の場合）における離散信号の値をVFDフィルタによるフィルタリングの出力として求めることができるので、ディジタル信号の高精度補間が可能となる。従って、ディジタル信号の補間問題は時間領域、或いは空間領域で言うと、Sinc関数の近似問題になるが、周波数領域で言うと、可変非整数遅延応答をもつ理想の可変非整数遅延素子の近似問題になる[20]-[24]。

本研究の目的は画像の高精度補間のための多次元VFDフィルタの最適設計を行うことであるが、研究の初期段階と基礎として、まず1次元VFDフィルタの最適設計法を開発する。次に、1次元の最適設計に基づき、1次元の設計理論を2次元の場合に拡張すれば、2次元VFDフィルタの最適設計の定式化も可能である。従って、1次元のものは多次元の場合の基礎となる。本報告では、著者は設計パラメータの離散化を必要としない1次元VFDフィルタの閉じた形の新しい設計法を提案する。設計法の基本的な考え方としては、まずVFDフィルタのすべての係数を可変非整数遅延の多項式として表現する。次に、理想の可変非整数遅延素子の周波数応答と実際のVFDフィルタの周波数応答の重み付き自乗誤差関数を最小化することによって、VFDフィルタの最適係数を閉じた形で求める。設計の過程では、設計パラメータの離散化を必要としないため、設計に要する計算量を大幅に減らすことができる。また、最終の設計結果は従来の設計パラメータの離散化を必要とする方法のような離散化の密度による設計精度の影響がなく、最終の設計結果の最適性が保証される。

2　設計問題の定式化と最適解

本節では、我々はまずVFDフィルタの設計問題の定式化を行い、可変周波数応答の重み付き自乗誤差関数を導出する。それから閉じた形の最適解を求め、その数値安定問題について論じ、その有効な対策を提案する。

従来の定常ディジタルフィルタ（周波数特性が固定なディジタルフィルタ）と違って、可変ディジタルフィルタは係数が可変でなければならない。つまり、可変ディジタルフィルタの係数は可変周波数特性を決定するパラメータの関数でなければならない。一方、多項式はいろいろな関数の中で最も単純で扱いやすい関数の一つであるため、本研究では、1次元VFDフィルタの係数を可変パラメータ（非整数遅延）p の1次元多項式として表現する。即ち、1次元VFDフィルタの伝達関数は

$$H(z,p)=\sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n(p)z^{-n} \tag{1}$$

とする。ここで、$N1$ と $N2$ は正の整数で、VFDフィルタの次数

$$N=N_1+N_2$$

を決定する。また、N が奇数のとき、

$$\begin{cases} N_1=\dfrac{N-1}{2} \\ N_2=\dfrac{N+1}{2} \end{cases} \tag{2}$$

N が偶数のとき、$N1$ と $N2$ の値は

$$N_1=N_2=\frac{N}{2} \tag{3}$$

となる。特に、先ほど述べたように、VFDフィルタの係数 $a_n(p)$ は可変非整数遅延 $p\in[-0.5,0.5]$ のK次多項式

$$a_n(p)=\sum_{k=0}^{K} a(n,k)p^k \tag{4}$$

として表現される。従って、可変伝達関数 $H(z,p)$ は

$$\begin{aligned} H(z,p) &= \sum_{n=-N_1}^{N_2}\sum_{k=0}^{K} a(n,k)p^k z^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{K}\left[\sum_{n=-N_1}^{N_2} a(n,k)p^k z^{-n}\right] \\ &= \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{z}) \end{aligned} \tag{5}$$

のように書き替えられる。ここで、係数ベクトル a は係数行列

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a(-N_1,1) & a(-N_1,2) & \cdots & a(-N_1,K) \\ a(-N_1+1,1) & a(-N_1+1,2) & \cdots & a(-N_1+1,K) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a(0,1) & a(0,2) & \cdots & a(0,K) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a(N_2-1,1) & a(N_2-1,2) & \cdots & a(N_2-1,K) \\ a(N_2,1) & a(N_2,2) & \cdots & a(N_2,K) \end{bmatrix} \tag{6}$$

の列展開であり、その要素は係数行列 A の列方向の要素順に並べ替えられたものである。つまり、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^T &= \mathrm{cs}(\boldsymbol{A}) \\ &= \left[\underbrace{a(-N_1,1)\ \cdots\ a(N_2,1)}_{\text{first column}}\ \underbrace{a(-N_1,2)\ \cdots\ a(N_2,2)}_{\text{second column}}\ \cdots\ \underbrace{a(-N_1,K)\ \cdots\ a(N_2,K)}_{K-th\ \text{column}}\right] \end{aligned} \tag{7}$$

また、式(5)では、記号 $\otimes$ はクロネッカ積（Kronecker product）を表し、ベクトル p と z は

$$\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix} 1 & p & p^2 & \cdots & p^K \end{bmatrix}^T \tag{8}$$

$$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix} z^{N_1} & z^{N_1-1} & \cdots & z & 1 & z^{-1} & \cdots & z^{-(N_2-1)} & z^{-N_2} \end{bmatrix}^T \tag{9}$$

となる。式(5)からVFDフィルタの実際の可変周波数応答は

$$H(\omega,p)=\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{\omega}) \tag{10}$$

となり、ここで、複素ベクトル ω は

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix} e^{jN_1\omega} & e^{j(N_1-1)\omega} & \cdots & e^{j\omega} & 1 & e^{-j\omega} & \cdots & e^{-j(N_2-1)\omega} & e^{-jN_2\omega} \end{bmatrix}^T \quad (11) \tag{11}$$

となる。明らかに、クロネッカ積演算の $p \otimes \omega$ は長さ（次元）が $(N+1)(K+1)$ となる長いベクトルを作り出す。本研究では、理想の可変周波数応答（近似仕様）

$$H_d(\omega, p) = e^{-j\omega p} \tag{12}$$

が与えられたとする。ここで、ω は正規化角周波数で、$\omega \in [0, \pi]$, p は連続可変非整数遅延、 $p \in [-0.5, 0.5]$ である。本研究の目的は可変周波数応答の重み付き自乗誤差関数

$$J(\boldsymbol{a}) = \int_0^{\pi} \int_{-0.5}^{0.5} W(\omega, p) |H(\omega, p) - H_d(\omega, p)|^2 d\omega dp \tag{13}$$

が最小になるように最適係数 $a(n, k)$、または同様であるが、最適係数ベクトル a を求めることである。閉じた形の最適解を導出するため、我々は重み関数 $W(\omega, p)$ を分離可能な形として以下の様に仮定する。

$$W(\omega, p) = W_1(\omega) W_2(p) \tag{14}$$

つまり、$W(\omega, p)$ は2つの1次元区間的なステップ関数 $W_1(\omega)$ と $W_2(p)$ の積である。ここで、

$$W_1(\omega) = \begin{cases} \alpha_l & \text{for } \omega \in [\omega_{l-1}, \omega_l) \\ \alpha_L & \text{for } \omega = \omega_L \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} l = 1, 2, \cdots, L \\ \omega_0 = 0 \\ \omega_L = \pi \end{cases}$$

$$W_2(p) = \begin{cases} \beta_m & \text{for } p \in [p_{m-1}, p_m) \\ \beta_M & \text{for } p = p_M \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} m = 1, 2, \cdots, M \\ p_0 = -0.5 \\ p_M = 0.5 \end{cases}$$

とし、α_l と β_m は定数である。周波数応答の誤差（複素数）

$$\begin{aligned} e(\omega, p) &= H(\omega, p) - H_d(\omega, p) \\ &= \boldsymbol{a}^T (\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{\omega}) - e^{-j\omega p} \end{aligned} \tag{17}$$

から

$$\begin{aligned} |e(\omega, p)|^2 &= e(\omega, p) e^*(\omega, p) \\ &= \left[\boldsymbol{a}^T (\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{\omega}) - e^{-j\omega p}\right] \left[\boldsymbol{a}^T (\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{\omega}) - e^{-j\omega p}\right]^* \\ &= \left[\boldsymbol{a}^T (\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{\omega}) - e^{-j\omega p}\right] \left[(\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{\omega})^* \boldsymbol{a} - e^{j\omega p}\right] \end{aligned} \tag{18}$$

が得られる。ここで、［・］* は［・］の複素共役転置を表す。クロネッカ積の性質

$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$

より

$(p \otimes \omega)^* = p^T \otimes \omega^*$

が求まる。ここで、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^* &= \left[e^{-jN_1\omega} \ e^{-j(N_1-1)\omega} \ \cdots \ e^{-j\omega} \ 1 \ e^{j\omega} \ \cdots \ e^{j(N_2-1)\omega} \ e^{jN_2\omega}\right] \\ &= e^{-jN_1\omega} \left[1 \ e^{j\omega} \ e^{j2\omega} \ \cdots \ e^{jN\omega}\right] \end{aligned} \tag{19}$$

は複素ベクトル ω の複素共役転置である。よって、

$$\begin{aligned} |e(\omega, p)|^2 &= \left[\boldsymbol{a}^T (\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{\omega}) - e^{-j\omega p}\right] \left[(\boldsymbol{p}^T \otimes \boldsymbol{\omega}^*) \boldsymbol{a} - e^{j\omega p}\right] \\ &= \boldsymbol{a}^T (\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{p}^T \otimes \boldsymbol{\omega}^*) \boldsymbol{a} - 2\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{a}^T (\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{\omega}) e^{j\omega p}\right] + 1 \\ &= e_1(\omega, p) - 2e_2(\omega, p) + 1 \end{aligned} \tag{20}$$

ここで、Re［・］は［・］の実部を表す。クロネッカ積の性質

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})(\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{AC}) \otimes (\boldsymbol{BD}) \tag{21}$$

より、式(20)の初めの項は

$$
\begin{aligned}
e_1(\omega,p) &= \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{p}^T\otimes\boldsymbol{\omega}^*)\boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{a}^T\left[(\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T)\otimes(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^*)\right]\boldsymbol{a} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T = \begin{bmatrix} 1 & p & p^2 & \cdots & p^K \\ p & p^2 & p^3 & \cdots & p^{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p^K & p^{K+1} & p^{K+2} & \cdots & p^{2K} \end{bmatrix} \qquad (23)
$$

はハンケル行列（Hankel matrix）で、

$$
\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^* = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega} & e^{j2\omega} & \cdots & e^{jN\omega} \\ e^{-j\omega} & 1 & e^{j\omega} & \cdots & e^{j(N-1)\omega} \\ e^{-j2\omega} & e^{-j\omega} & 1 & \cdots & e^{j(N-2)\omega} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-jN\omega} & e^{-j(N-1)\omega} & e^{-j(N-2)\omega} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (24)
$$

はトエプリッツ形エルミート行列（Hermitian matrix）である。更に、式（20）の2番目の項は

$$
\begin{aligned}
e_2(\omega,p) &= \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{\omega})e^{j\omega p}\right] \\
&= \boldsymbol{a}^T\mathrm{Re}\left[(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{\omega})e^{j\omega p}\right] \\
&= \boldsymbol{a}^T\left[\boldsymbol{p}\otimes\mathrm{Re}\left(e^{j\omega p}\boldsymbol{\omega}\right)\right] \\
&= \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}) \qquad (25)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、実ベクトル q は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q} &= \mathrm{Re}\left[e^{j\omega p}\boldsymbol{\omega}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left\{\left[e^{j\omega(p+N_1)}\ e^{j\omega(P+N_1-1)}\ \cdots\ e^{j\omega p}\ \cdots\ e^{j\omega(p-N_2+1)}\ e^{j\omega(p-N_2)}\right]^T\right\} \\
&= \left[\cos\omega(p+N_1)\ \ \cos\omega(p+N_1-1)\ \cdots\ \cos p\omega\ \cdots\ \cos\omega(p-N_2+1)\ \ \cos\omega(p-N_2)\right]^T \qquad (26)
\end{aligned}
$$

と定義されている。結局、式(14)と式(20)を式(13)に代入すると、誤差関数は

$$
\begin{aligned}
J(\boldsymbol{a}) &= \int_0^\pi\int_{-0.5}^{0.5}W_1(\omega)W_2(p)|e(\omega,p)|^2d\omega dp \\
&= \int_0^\pi\int_{-0.5}^{0.5}W_1(\omega)W_2(p)\left[e_1(\omega,p)-2e_2(\omega,p)+1\right]d\omega dp \\
&= J_1(\boldsymbol{a})-2J_2(\boldsymbol{a})+J_3 \qquad (27)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
J_1(\boldsymbol{a}) &= \int_0^\pi\int_{-0.5}^{0.5}W_1(\omega)W_2(p)e_1(\omega,p)d\omega dp \\
&= \int_0^\pi\int_{-0.5}^{0.5}W_1(\omega)W_2(p)\boldsymbol{a}^T\left[(\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T)\otimes(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^*)\right]\boldsymbol{a}d\omega dp \\
&= \boldsymbol{a}^T\left\{\left[\int_{-0.5}^{0.5}W_2(p)\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^Tdp\right]\otimes\left[\int_0^\pi W_1(\omega)\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^*d\omega\right]\right\}\boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega}_c)\boldsymbol{a} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

行列 P は以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \int_{-0.5}^{0.5} W_2(p)\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T dp \\
&= \int_{-0.5}^{0.5} W_2(p) \begin{bmatrix} 1 & p & p^2 & \cdots & p^K \\ p & p^2 & p^3 & \cdots & p^{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p^K & p^{K+1} & p^{K+2} & \cdots & p^{2K} \end{bmatrix} dp \\
&= \sum_{m=1}^{M} \beta_m \int_{p_{m-1}}^{p_m} \begin{bmatrix} 1 & p & p^2 & \cdots & p^K \\ p & p^2 & p^3 & \cdots & p^{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p^K & p^{K+1} & p^{K+2} & \cdots & p^{2K} \end{bmatrix} dp \\
&= \sum_{m=1}^{M} \beta_m \boldsymbol{P}_m
\end{aligned} \tag{29}
$$

ここで、行列 P_m は

$$
\boldsymbol{P}_m = \int_{p_{m-1}}^{p_m} \begin{bmatrix} 1 & p & p^2 & \cdots & p^K \\ p & p^2 & p^3 & \cdots & p^{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p^K & p^{K+1} & p^{K+2} & \cdots & p^{2K} \end{bmatrix} dp = [P_m(i,j)] \tag{30}
$$

と定義され、P_m の (i , j)番の要素は

$$
\begin{aligned}
&P_m(i,j) = \frac{p_m^{i+j-1} - p_{m-1}^{i+j-1}}{i+j-1} \\
&i = 1, 2, \cdots, (K+1) \\
&j = 1, 2, \cdots, (K+1)
\end{aligned} \tag{31}
$$

である。ここで注意しなければならないことは行列 P_m はハンケル行列であるため、行列 P_m の最初の列と最後の行を計算すればよい。式(29)から明らかなように、行列 P もサイズが$(K+1) \times (K+1)$ のハンケル行列である。

一方、式(28)の中の行列

$$
\boldsymbol{\Omega}_c = \int_0^{\pi} W_1(\omega)\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^* d\omega \tag{32}
$$

は複素エルミート行列（Hermitian matrix）であるが、J_1 (a) は実数なので、Ω_c の実部を計算すればよい。これは以下の理由による。

$$
\begin{aligned}
J_1^*(\boldsymbol{a}) &= \left[\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{\Omega}_c)\boldsymbol{a}\right]^* \\
&= \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{P}^T \otimes \boldsymbol{\Omega}_c^*)\boldsymbol{a}
\end{aligned} \tag{33}
$$

また、P と Ω_c はそれぞれハンケル行列（Hankel matrix）とエルミート行列であるため、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^T &= \boldsymbol{P} \\
\boldsymbol{\Omega}_c^* &= \boldsymbol{\Omega}_c
\end{aligned} \tag{34}
$$

から

$$
\begin{aligned}
J_1^*(\boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{P}^T \otimes \boldsymbol{\Omega}_c^*)\boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{\Omega}_c)\boldsymbol{a} \\
&= J_1(\boldsymbol{a})
\end{aligned} \tag{35}
$$

が分かる。以上より、J_1 (a) は実数であることが証明される。従って、J_1 (a) を計算するため、Ω_c の実部を計算すれば十分である。

複素行列 Ω_C の実部は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\Omega}_c\right] \\ &= \int_0^{\pi} W_1(\omega)\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^*\right]d\omega \\ &= \sum_{l=1}^{L}\alpha_l\boldsymbol{\Omega}_l \end{aligned} \tag{36}$$

となり、ここで、

$$\boldsymbol{\Omega}_l = \int_{\omega_{l-1}}^{\omega_l}\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega & \cos 2\omega & \cdots & \cos N\omega \\ \cos\omega & 1 & \cos\omega & \cdots & \cos(N-1)\omega \\ \cos 2\omega & \cos\omega & 1 & \cdots & \cos(N-2)\omega \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos N\omega & \cos(N-1)\omega & \cos(N-2)\omega & \cdots & 1 \end{bmatrix} d\omega = \left[\Omega_l(i,j)\right] \tag{37}$$

$$\Omega_l(i,j) = \begin{cases} \omega_l - \omega_{l-1} & \text{if } i=j \\ \dfrac{\sin\left[(i-j)\omega_l\right] - \sin\left[(i-j)\omega_{l-1}\right]}{i-j} & \text{for } i \neq j \end{cases} \tag{38}$$

$i, j = 1, 2 \cdots, (N+1)$

ここで強調すべきことは行列 Ω_l が対称トエプリッツ（Toeplitz matrix）なので、Ω_l を計算するため、 Ω_l の最初の行を計算すればよい。結局、式(36)の行列 Ω も対称トエプリッツ行列であり、Ω のサイズは $(N+1)\times(N+1)$である。

以上の行列 P と Ω の導出に基づき、式(27)の中の $J_1(a)$ は

$$J_1(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{a} \tag{39}$$

となる。また、式(27)の中の2番目の項は

$$\begin{aligned} J_2(\boldsymbol{a}) &= \int_0^{\pi}\int_{-0.5}^{0.5} W_1(\omega)W_2(p)e_2(\omega,p)d\omega dp \\ &= \int_0^{\pi}\int_{-0.5}^{0.5} W_1(\omega)W_2(p)\left[\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q})\right]d\omega dp \\ &= \boldsymbol{a}^T\left\{\int_{-0.5}^{0.5} W_2(p)\left[\boldsymbol{p}\otimes\int_0^{\pi}W_1(\omega)\boldsymbol{q}d\omega\right]dp\right\} \\ &= \boldsymbol{a}^T\left[\int_{-0.5}^{0.5}W_2(p)(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{u})dp\right] \\ &= \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{40}$$

となり、ここで、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \int_0^{\pi}W_1(\omega)\boldsymbol{q}d\omega \\ &= \sum_{l=1}^{L}\alpha_l\left[\int_{\omega_{l-1}}^{\omega_l}\boldsymbol{q}d\omega\right] \\ &= \sum_{l=1}^{L}\alpha_l\boldsymbol{u}_l \end{aligned} \tag{41}$$

ベクトル u_l の要素は式(26)におけるベクトル q を用いて

$$\begin{aligned} u_l(n) &= \int_{\omega_{l-1}}^{\omega_l} q(n)d\omega \\ &= \int_{\omega_{l-1}}^{\omega_l}\cos(\gamma\omega)d\omega \\ &= \begin{cases} \omega_l - \omega_{l-1} & \text{if } \gamma = 0 \\ \dfrac{\sin(\gamma\omega_l) - \sin(\gamma\omega_{l-1})}{\gamma} & \text{if } \gamma \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{42}$$

として求められる。ここで、$\gamma=p+N_1-n+1$、$n=1,2,\cdots,(N+1)$。更に、式(40)の中のベクトル v は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \int_{-0.5}^{0.5} W_2(p)(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{u})dp \\
&= \int_{-0.5}^{0.5} W_2(p)\left[\boldsymbol{p}\otimes\sum_{l=1}^{L}\alpha_l\boldsymbol{u}_l\right]dp \\
&= \int_{-0.5}^{0.5} W_2(p)\left[\sum_{l=1}^{L}\alpha_l(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{u}_l)\right]dp \\
&= \sum_{l=1}^{L}\alpha_l\left[\int_{-0.5}^{0.5} W_2(p)(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{u}_l)dp\right] \\
&= \sum_{l=1}^{L}\alpha_l\left[\sum_{m=1}^{M}\beta_m\int_{p_{m-1}}^{p_m}(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{u}_l)dp\right] \\
&= \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}\alpha_l\beta_m\boldsymbol{v}_{lm}
\end{aligned} \tag{43}$$

と求められる。ここで、

$$\boldsymbol{v}_{lm} = \int_{p_{m-1}}^{p_m}(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{u}_l)dp$$

v_{lm} の要素は数値積分

$$v_{lm}(i) = \int_{p_{m-1}}^{p_m} p^k u_l(n)dp \tag{44}$$

の計算によって求められる。ここで、

$$\begin{aligned}
&k = 0,1,\cdots,K \\
&n = 1,2,\cdots,(N+1) \\
&i = k(N+1)+n
\end{aligned} \tag{45}$$

最後に、式(27)の中の3番目の項

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_0^{\pi}\int_{-0.5}^{0.5} W_1(\omega)W_2(p)d\omega dp \\
&= \left[\int_0^{\pi} W_1(\omega)d\omega\right]\left[\int_{-0.5}^{0.5} W_2(p)dp\right] \\
&= \left[\sum_{l=1}^{L}\alpha_l(\omega_l-\omega_{l-1})\right]\left[\sum_{m=1}^{M}\beta_m(p_m-p_{m-1})\right] \\
&= \text{constant}
\end{aligned} \tag{46}$$

は定数となる。

以上で得られた $J_1(a)$, $J_2(a)$ と J_3 を一緒にまとめると、式(27)の誤差関数は係数ベクトル a の関数として以下の様に求められる。

$$J(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{v} + \text{constant}. \tag{47}$$

誤差関数 $J(a)$を最小化するため、 $J(a)$の係数ベクトル a に関する偏微分を求め、それを0とする。

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}} = \left[(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega}) + (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega})^T\right]\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{48}$$

従って、

$$\left[(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega}) + (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega})^T\right]\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{v} \tag{49}$$

行列 P と Ω はそれぞれハンケル行列と対称トエプリッツ行列であることから、

$$\boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^T = \boldsymbol{\Omega}$$

よって、

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega})^T=\boldsymbol{P}^T\otimes\boldsymbol{\Omega}^T=\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega} \tag{50}$$

式(50)を式(49)に代入すれば、行列方程式

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{v} \tag{51}$$

が得られる。上式から係数ベクトル a の最適解は

$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega})^{-1}\boldsymbol{v} \tag{52}$$

と求まる。更に、クロネッカ積の性質 [25]

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{\Omega})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Omega}^{-1}$$

より、

$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{P}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Omega}^{-1})\boldsymbol{v} \tag{53}$$

が求まる。しかし、行列 P と Ω の逆行列の直接計算は行列の条件数（condition number）が大きいとき、数値的不安定な解をもたらす恐れがあるので、有効な対策を施さなければならない。

行列 P と Ω は正定行列なので、Cholesky分解を用いれば以下のように分解できる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{\Omega}&=\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\end{aligned} \tag{54}$$

ここで、行列 R と S は上三角行列である。式(54)から行列 P と Ωの逆行列は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}&=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}^{-T}\\ \boldsymbol{\Omega}^{-1}&=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}^{-T}\end{aligned} \tag{55}$$

となる。行列 R と S はの条件数は行列 P と Ωの条件数より小さいため、式(55)による行列行列 P と Ωの逆行列の計算はある程度数値不安定問題を避けることができる。

式(55)を式(53)に代入して、クロネッカ積の性質(21)を用いれば、係数ベクトル a の閉じた形の最適解は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\left[(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}^{-T})\otimes(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}^{-T})\right]\boldsymbol{v}\\ &=(\boldsymbol{R}^{-1}\otimes\boldsymbol{S}^{-1})(\boldsymbol{R}^{-T}\otimes\boldsymbol{S}^{-T})\boldsymbol{v}\\ &=(\boldsymbol{R}^{-1}\otimes\boldsymbol{S}^{-1})\left[(\boldsymbol{R}^{-T}\otimes\boldsymbol{S}^{-T})\boldsymbol{v}\right]\end{aligned} \tag{56}$$

ここで注意すべきことは式(56)の中の最後のグループ分けが安定な数値解を保証する意味で非常に重要である。最適な係数ベクトル a が求まったら、式(6)における係数行列 A を式(7)の逆順で求めることができる。

3　設計例

本節では、文献 [21] と同じ設計例を用いて本研究で提案した離散化を必要としないVFDフィルタの設計法の有効性を実証する。

設計仕様：次式で定義される可変周波数応答の最大絶対値誤差

$$e_{max}=\max\left\{e(\omega,p)|\omega\in[0,0.9\pi],p\in[-0.5,0.5]\right\} \tag{57}$$

が $\omega\in[0, 0.9\pi]$，$P\in[-0.5, 0.5]$ の範囲で-100dBを超えないように最適VFDフィルタの最低次数を決定すること。ここで、

$$e(\omega,p)=20\log_{10}|H(\omega,p)-H_d(\omega,p)| \tag{58}$$

従来の設計法と比べるため、我々は文献 [21] の設計法と本設計法を用いて設計を行った。計算機シミュレーションにおいて、もし設計パラメータ

$$N=65$$

$$K=7$$

$$W_1(\omega)=\begin{cases}0.64 & \text{for } \omega\in[0,0.55\pi)\\ 4.9 & \text{for } \omega\in[0.55\pi,0.85\pi)\\ 37 & \text{for } \omega\in[0.85\pi,0.8996\pi)\\ 0 & \text{for } \omega\in[0.8996\pi,\pi]\end{cases} \tag{59}$$

$$W_2(p)=\begin{cases}53 & \text{for } p\in[-0.5,-0.4)\\ 0.2 & \text{for } p\in[-0.4,0.4)\\ 8 & \text{for } p\in[0.4,0.5]\end{cases}$$

と設定すれば、本設計法は上記の設計仕様を満たす設計結果を得ることができる。本設計法と文献 [21] の方法を比較するため、周波数応答の最大誤差(57)と平均自乗誤差

$$e_2 = \left[\int_0^{0.9\pi} \int_{-0.5}^{0.5} |H(\omega, p) - H_d(\omega, p)|^2 d\omega dp\right]^{1/2} \tag{60}$$

を用いる。また、設計に要する計算量（計算の複雑度））を比較するため、Flop（FLoating OPeration）数を用いることにする。文献 [21] の設計法による設計では、周波数 $\omega \in [0, 0.9\pi]$ と非整数遅延 $P \in [-0.5, 0.5]$ の離散化を必要とするため、離散化の密度が高くなるにつれ、設計に要する計算量が著しく増加する。その意味で設計者は設計精度と計算量のトレードオフ（trade-off）を折中しなければならない。本報告では、周波数 $\omega \in [0, 0.9\pi]$ の離散点と非整数遅延 $P \in [-0.5, 0.5]$ の離散点はそれぞれ $6(N+1)$ と $6(K+1)$ とする。

表1に2つの設計法による設計結果をまとめてある。表1から分かるように、設計パラメータを上記のように設定すれば、本設計法による設計結果は要求された設計仕様を満足する。この場合の可変周波数応答の最大絶対値誤差は－100.3683dBであり、設計仕様の－100dBを超えていない。一方、文献 [21] の設計法による可変周波数応答の最大絶対値誤差は－99.9208dBなので、設計仕様の－100dBを超えている。更に、計算量からみると、本設計法は文献 [21] の場合のFlop数の5.58%しか要しないため、大幅に計算量を削減できた。

図1は式(58)によって定義される可変周波数応答の絶対値誤差（dB）を示しており、図2は$\omega \in [0, 0.9\pi]$ と$P \in [-0.5, 0.5]$ の範囲での可変非整数遅延を示している。図2から分かるように、設計したVFDフィルタの非整数応答は極めて平坦である。また、図3は可変非整数遅延誤差の絶対値を示し、最大誤差は0.0013となっている。

文献 [21] の設計法と比べ、本設計法は設計の過程で周波数 ω と非整数遅延 p の離散化を必要としないため、設計に要する計算量を大幅に削減できた上、設計精度の向上も実現できた。以上の高い精度の設計を得るため、前節で述べた対策で数値不安定問題の解決が不可欠である。その理由としては、行列 P と行列 Ω の条件数は次数 K と N の増加に従って大きくなり、逆行列の直接計算は数値不安定問題をもたらすからである。表2と表3は行列 P と行列 Ω の条件数と次数 K と N の関係を示している。

図4は式(53)による直接計算の場合の可変周波数応答の絶対値誤差を示している。明らかに、図4と図1は大きく異なる。図4の場合の最大絶対値誤差は－71.4424dBなので、設計仕様の－100dBを上回り、設計仕様を満足できなかった。従って、Cholesky分解に基づく最適解(56)は安定な数値解を得るために非常に重要である。

表1　設計誤差と計算量の比較

	文献 [21] の方法	本方法
e_{max} (dB)	-99.9208	-100.3683
e_2	4.4931×10^{-4}	4.4147×10^{-4}
Flops Used	84057162	4694097

表2　行列Pの条件数とKの関係

K	1	2	3	4	5
cond($\boldsymbol{P}$)	13.0914	963.2356	1.0879×10^4	1.7093×10^5	3.7873×10^6
K	6	7	8	9	10
cond($\boldsymbol{P}$)	6.7465×10^7	1.0001×10^9	1.6486×10^{10}	3.1000×10^{11}	5.6017×10^{12}

表3　行列Ωの条件数とNの関係

N	61	62	63	64	65
cond($\boldsymbol{\Omega}$)	4.7504×10^7	6.5020×10^7	8.8738×10^7	1.2222×10^8	1.6792×10^8
N	66	67	68	69	70
cond($\boldsymbol{\Omega}$)	2.2852×10^8	3.0872×10^8	4.1743×10^8	5.6633×10^8	7.6699×10^8

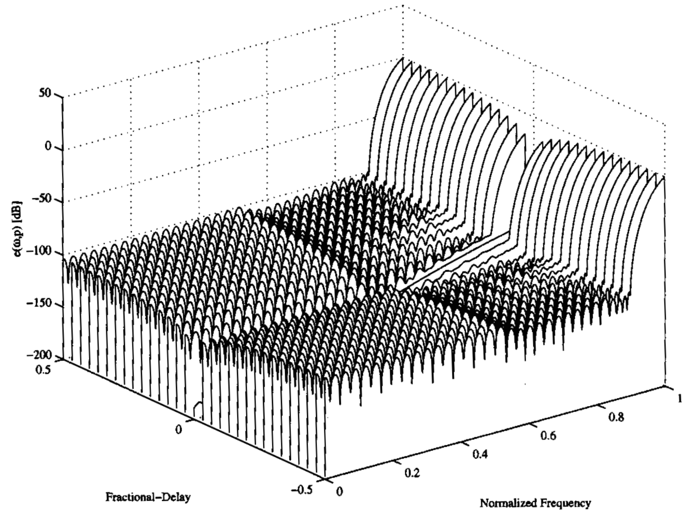

図1　可変周波数応答の絶対値誤差

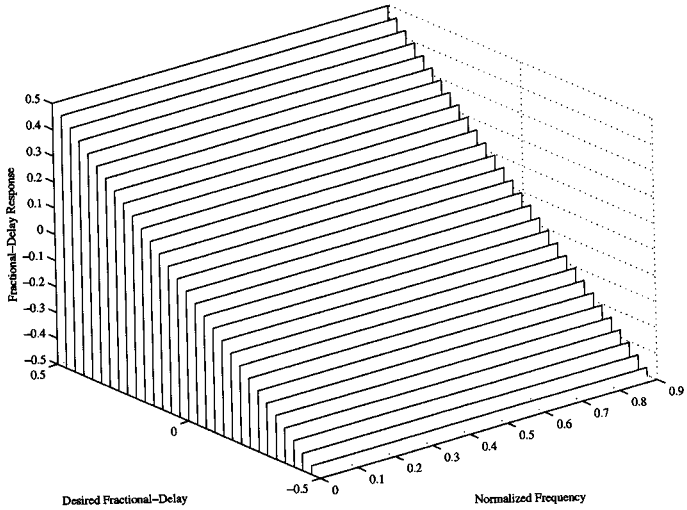

図2　可変非整数遅延応答

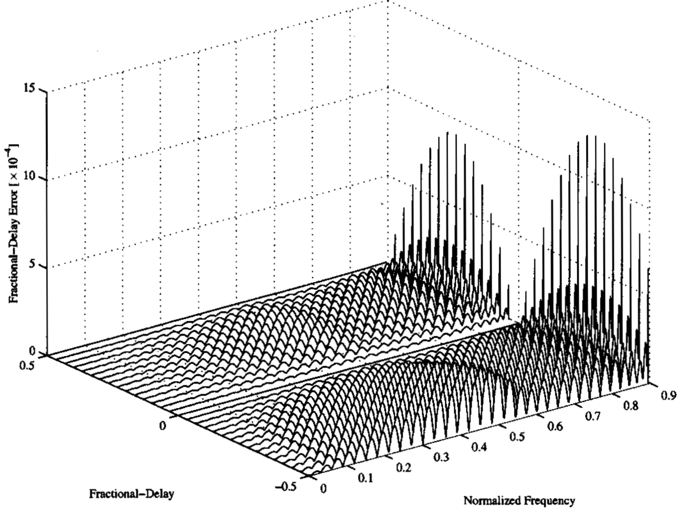

図3　可変非整数遅延の絶対値誤差

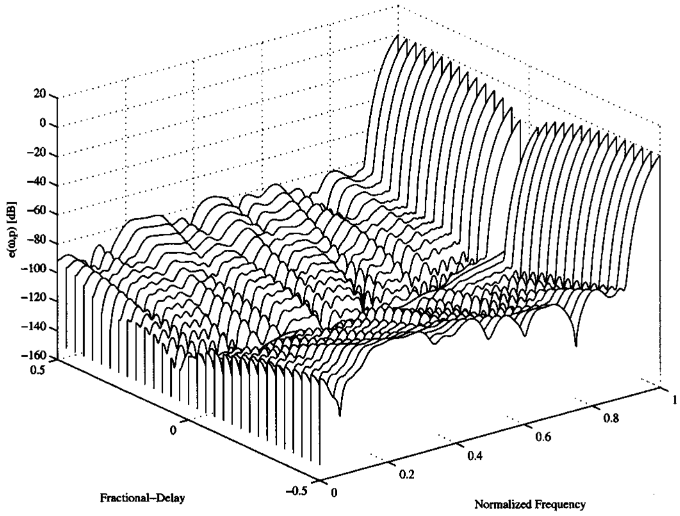

図4　式(53)の直接計算による可変周波数誤差

4　まとめ

本報告では、我々はVFDフィルタの設計において周波数と非整数遅延の離散化を必要としない最適設計法を提案し、設計例を用いて本設計法の有効性を実証した。本設計法は周波数 ω と非整数遅延 p の離散化を必要としないため、設計に要する計算量を大幅に減らすことができ、文献 [21] の設計法より高い精度の設計を実現できた。これからは1次元VFDフィルタの設計法を2次元に拡張して、画像の高精度補間への応用に関する研究を続けて行きたい。

謝辞
本研究は電気通信普及財団の研究助成によるものであり、心から感謝を申し上げたい。

参考文献

[1] P. Jarske, Y. Neuvo, and S. K. Mitra, ``A simple approach to the design of linear phase FIR digital filters with variable characteristics ,'' Signal Processing, vol. 14, no. 4, pp. 313-326, June 1988.
[2] L. J. Karam and J. H. McClellan, ``Efficient design of digital filters for 2-D and 3-D depth migration ','' em IEEE Trans. Signal Processing, vol. 45, no. 4, pp. 1036-1044, Apr. 1997.
[3] R. Zarour and M. M. Fahmy, ``A design technique for variable digital filters ,'' em IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 36, no. 11, pp. 1473-1478, Nov. 1989.
[4] T.-B. Deng, ``Design of recursive 1-D variable filters with guaranteed stability ,'' em IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol. 44, no. 9, pp. 689-695, Sept. 1997.
[5] R. Zarour and M. M. Fahmy, ``A design technique for variable two-dimensional recursive digital filters ,'' em Signal Processing, vol. 17, no. 2, pp. 175-182, June 1989.
[6] T.-B. Deng, ``Design of variable 2-D linear phase recursive digital filters with guaranteed stability ,'' em IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol. 45, no. 8, pp. 859-863, Aug. 1998.
[7] T.-B. Deng, ``Design of linear phase variable 2-D digital filters using real-complex decomposition ,'' em IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol. 45, no. 3, pp. 330-339, Mar. 1998.
[8] G. Stoyanov and M. Kawamata, ``Variable digital filters ,'' em J. Signal Processing, vol. 1, no. 4, pp. 275-289, July 1997.
[9] S.-C. Pei and C.-C. Tseng, ``A comb filter design using fractional-sample delay ,'' em Proc. 1997 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, pp. 2228-2231, Hong Kong, June 9-12, 1997.
[10] F. M. Gardner, ``Interpolation in digital modems-part I: fundamentals ,'' em IEEE Trans. Commun., vol. 41, no. 3, pp. 502-508, Mar. 1993.
[11] L. Erup, F. M. Gardner, and F. A. Harris, ``Interpolation in digital modems-part II: implementation and performance ,'' em IEEE Trans. Commun., vol. 41, no. 6, pp. 998-1008, June 1993.

[12] V. Valimaki, T. I. Laakso, and J. Mackenzie, ``Elimination of transients in time-varying allpass fractional delay filters with application to digital waveguide modeling ,'' em Proc. 1995 Int. Computer Music Conf.}, pp. 327-334, Banff, Canda, Sept. 3-7, 1995.
[13] V. Valimaki, ``Discrete-time modeling of acoustic tubes using fractional delay filters ,'' Doctoral Thesis, Lab. Acoust. and Audio Signal Processing, Faculty of Electrical Eng., Helsinki Univ. of Tech., Espoo, Finland, Dec. 1995.
[14] P. Kroon and B. S. Atal, ``Pitch prediction with high temporal resolution ,'' em IEEE Trans. Signal Processing, vol. 39, no. 3, pp. 733-735, Mar. 1991.
[15] J. S. Marques, I. M. Trancoso, J. M. Tribolet, and L. B. Almeida, ``Improved pitch prediction with fractional delays in CELP coding ,'' em Proc. 1990 IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signap Processing, vol. 2, pp. 665-668, Albuquerque, New Mexico, Apr. 3-6, 1990.
[16] Y. Medan, ``Using super resolution pitch in waveform speech coders ,'' em Proc. 1991 IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signap Processing, vol. 1, pp. 633-636, Toronto, Canada, May 2-5, 1991.
[17] C. O. Neill, B. Murray, and A. D. Fagan, ``An efficient algorithm for pitch prediction using fractional delays ,'' em Proc. sixth European Signap Processing Conf., vol. 1, pp. 319-322, Brussels, Belgium, Aug. 24-27, 1992.
[18] H.-W. Jin and E.-K. F. Lee, ``A digital-background calibration technique for minimizing timing-error effects in time-interleaved ADC $s ,'' em IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol. 47, no. 7, pp. 603-613, July 2000.
[19] T. I. Laakso, V. Valimaki, M. Karjalainen, and U. K. Laine, ``Splitting the unit delay: Tools for fractional delay filter design ,'' em IEEE Signal Processing Mag., vol. 13, no. 1, pp. 30-60, Jan. 1996.
[20] P. J. Kootsookos and R. C. Williamson, ``FIR approximation of fractional sample delay systems ,'' em IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol. 43, no. 3, pp. 269-271, Mar. 1996.
[21] A. Tarczynski, G. D. Cain, E. Hermanowicz, and M. Rojewski, ``WLS design of variable frequency response FIR filters ,'' em Proc. 1997 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, pp. 2244-2247, Hong Kong, June 9-12, 1997.
[22] C. W. Farrow, ``A continuously variable digital delay elements ,'' em Proc. 1988 IEEE Int. Symp. Ciruits and Systems, vol. 3, pp. 2641-2645, Espoo, Finland, June 6-9, 1988.
[23] J. Vesma and T. Saramaki, ``Optimization and efficient implementation of FIR filters with adjustable fractional delay ,'' em Proc. 1997 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, pp. 2256-2259, Hong Kong, June 9-12, 1997.
[24] J. Vesma, ``A frequency-domain approach to polynomial-based interpolation and the Farrow structure ,'' em IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol. 47, no. 3, pp. 206-209, Mar. 2000.
[25] R. A. Horn and C. R. Johnson, em Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1985.

＜発　表　資　料＞

題　　　名	掲載誌・学会名等	発表年月
Discretization-free design of Variable fractional-delay FIR filters	Technical Report of IEICE, CAS2000-107	2001年１月
Discretization-free design of Variable fractional-delay FIR filters	2001 IEEE International symposium on circuits and systems (ISCAS'01)	2001年５月