開発教材（分数）指導例：中学校

例 ○ × △ ＝ ○ － △ **上式が成り立つような○と△に入る数を考えてみよう。**

☆ 指導の流れ（例）☆

１．わからない数が２つあり、一度の両方を考えていくのは大変です。こういうときは、片方の数を決めて、もう一方の数を考えた方がわかりやすいものです。数にもいろいろな数がありますよね。そこで、○の中にいくつかの正の整数をあてはめて、△の数を見付け出したり、方程式を利用したりして調べてみよう。

① △に数をあてはめて考える

・○＝１のとき　$1\times\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$

・○＝２のとき　$2\times\frac{2}{3}=2-\frac{2}{3}$

・○＝３のとき　$3\times\frac{3}{4}=3-\frac{3}{4}$

② 方程式を利用する

・○＝１のとき　$1\times x=1-x$　$x=\frac{1}{2}$

・○＝２のとき　$2\times x=2-x$　$x=\frac{2}{3}$

・○＝３のとき　$3\times x=3-x$　$x=\frac{3}{4}$

２．どんなきまりがあるのだろうか。

・○と△の分子が同じ数
・△の分母と△の分子の差は１
・○と△の分母の差は１
・○の分母（＝１）と△の分母の差が△の分子
・○の分母（＝１）と△の分母の差が○
・$\square\times\frac{\square}{\square+1}=\square-\frac{\square}{\square+1}$

３．このことは、正の整数ならば、いつでもいえることなのだろうか？調べてみよう。

文字を用いた式を使って証明する。

＜中学１年生で取り扱う場合は、文字表現をするところまででとどめる。＞

$$x\times\frac{x}{x+1}=x-\frac{x}{x+1}$$

$$\begin{cases} \text{左辺} = x\times\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1} \\ \text{右辺} = x-\dfrac{x}{x+1} = x\times\dfrac{x+1}{x+1}-\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x(x+1)-x}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1} \end{cases}$$

よって、左辺＝右辺となるので、正の整数ならばいつでも成り立つことがいえる。

４．今は○が正の整数の場合について考えましたが、他の正の数のときも、このことはいえるのだろうか。

＜この後、どの発展を取り扱うかにより展開の仕方が変わってくるが、発展１と発展２を取り上げ、正の数の範囲において、この問題の本質が、**分母の差が分子になること**であることは理解させたいところである。**＞**

発展１　分子が１のときの分数（単位分数）を同様にして考えてみよう。

$$\frac{1}{1}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2} \cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} \cdots\cdots ②$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2} \cdots\cdots ③$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{4}-\frac{1}{5} \cdots\cdots ④$$

これらのことから

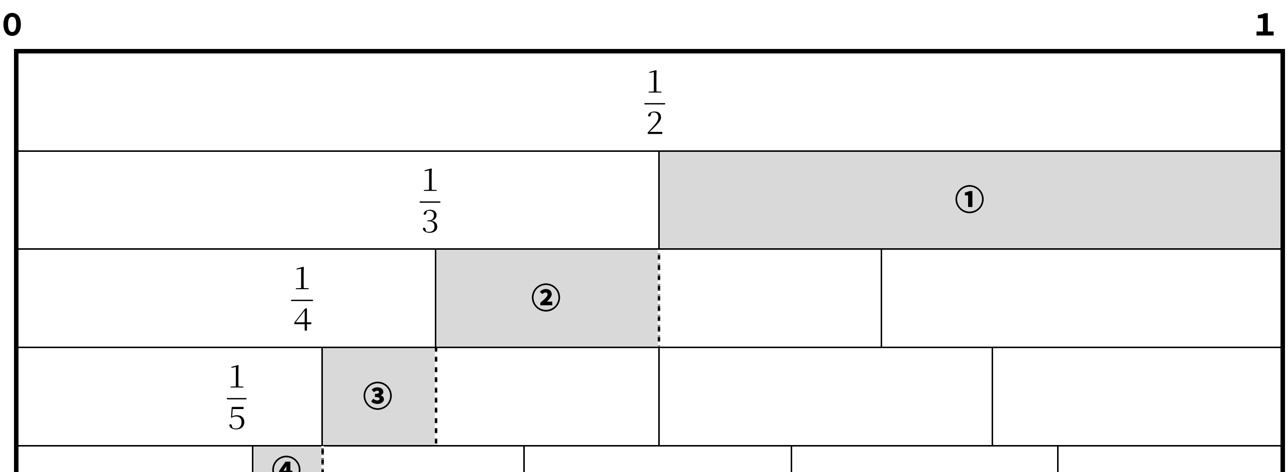
$$\frac{1}{x}\times\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$ **分母の差が１であり、分子の１になっている**

となり、次の命題が成り立つことがわかる。

「連続する２数を分母とする単位分数どうしの積と差は等しい」

発展１’

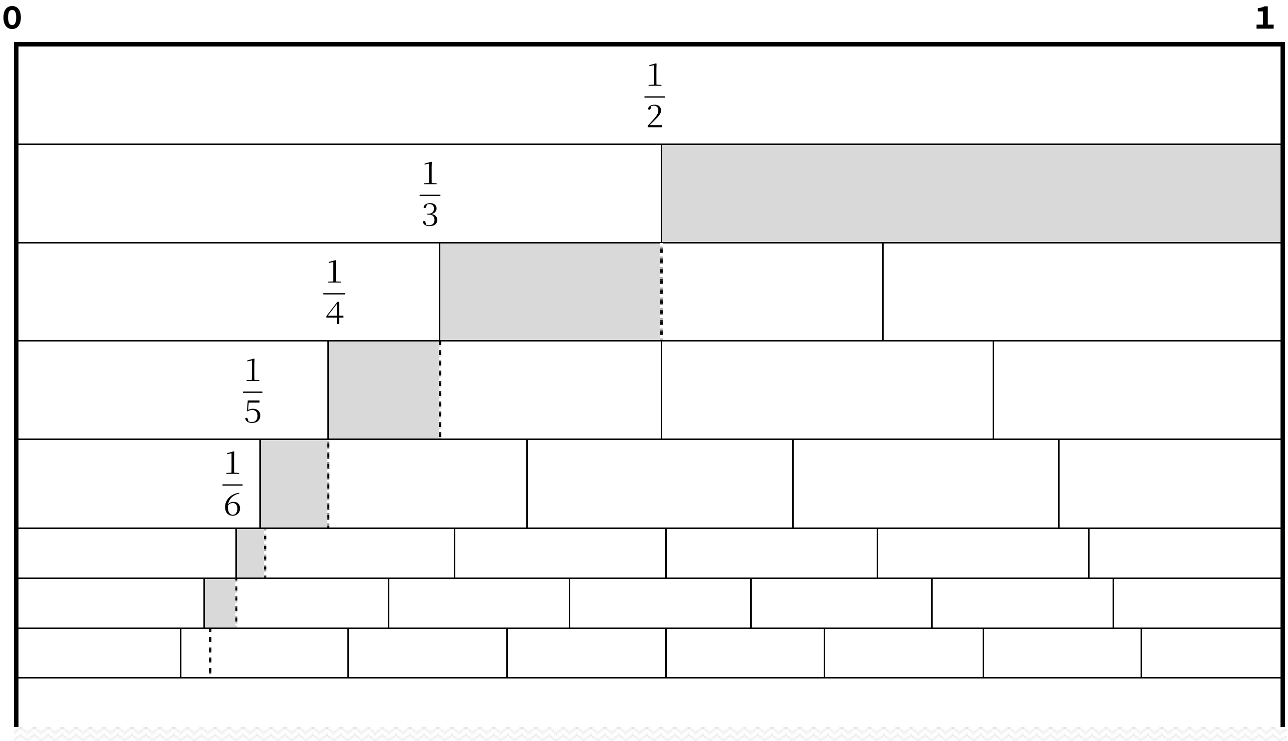
ここで、上記の①～④をそれぞれ図に表してみると、次のようになる。



　このように図に表してみると、図と与式を式変形することから、容易に、また直観的に次のような問題を解くことができる。

$\boxed{\text{問}}$　次の式のように、永遠に足し続けていくと、その答えはいくつになるだろうか？

$$\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\cdots$$



$$\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

　よって、この問題の答えは、「ほぼ１になること」「限りなく１に近づくこと」が直観的にわかる。

$\boxed{\text{発展２}}$　分子が１以外の分数のときを考えてみよう

$$\frac{2}{1}\times\frac{2}{3} \quad = \quad \frac{2}{1}-\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{5} \quad = \quad \frac{2}{3}-\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5}\times\frac{2}{7} \quad = \quad \frac{2}{5}-\frac{2}{7}$$

　これらのことから、次のことがわかる。

$$\frac{y}{x}\times\frac{y}{x+y} \quad = \quad \frac{y}{x}-\frac{y}{x+y}$$ **$\boxed{\text{分母の差が、分子になっている}}$**

発展３　負の数のときも考えてみよう　＜略＞

以上、**発展１**～**発展３**のことから、

この問題の本質（共通点）は、**分母の差が分子になること**であることがわかる。

発展４　○×△＝○＋△　が成り立つような○、△に入る数を考えてみよう

＜略＞

この問題の本質は、**分母の和が分子になること**であること　わかる。

$$\frac{x+y}{x}\times\frac{x+y}{y} \quad = \quad \frac{x+y}{x}+\frac{x+y}{y}$$

（例）$\frac{7}{5}\times\frac{7}{2} \quad = \quad \frac{7}{5}+\frac{7}{2}$