

1. 等式の変形の有用性について

【中学校での指導】

等式の性質から生じる移項の考えを確認しつつ、正しく等式の変形ができるように指導するとともに、等式の変形によって問題解決が容易になったり、グラフの外形が見やすくなったりする教材を通して、等式の変形をすることの有用性を実感させる必要がある。

(具体例 1)

扇形の面積を求める問題で、弧の長さと半径が与えられたときの公式

$S = \frac{1}{2} \ell r \quad \text{を既習の}$ $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360} \quad \text{と} \quad \ell = 2\pi r \times \frac{a}{360} \quad \text{から導く変形}$	
【等式の変形】	$S = \pi r^2 \times \frac{a}{360} \quad \text{両辺を 2 倍して、}$ $2S = 2\pi r^2 \times \frac{a}{360}$ $2S = \pi r \times \frac{a}{360} \times r \quad \ell = 2\pi r \times \frac{a}{360} \text{ を代入する}$ $2S = \ell r$ $S = \frac{1}{2} \ell r$
公式 1	$S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$
公式 2	$S = \frac{1}{2} \ell r$

問題例 半径が 6 cm、中心角が 45° であるおうぎ形の面積を求めなさい。

【解答】 公式 1 を活用して、

$$S = \pi \times 6^2 \times \frac{45}{360} \quad \text{よって} \quad S = \frac{9}{2} \pi$$

問題例 半径が 6 cm、弧の長さが 2π であるおうぎ形の面積を求めなさい。

【解答】 公式 2 を活用して、

$$S = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 6 \quad \text{よって、} \quad S = 6\pi$$

問題例 中心角が 30°、弧の長さが π であるおうぎ形の面積を求めなさい。

【解答】この円の円周は、 $\pi \times (360 \div 30) = 12\pi$

また、 $l = 2\pi r$ であることより、

$$12\pi = 2\pi r$$

$$r = 6$$

公式2を活用して、

$$S = \frac{1}{2} \times \pi \times 6 \quad \text{よって、} S = 3\pi$$

(具体例2)

2元1次方程式のグラフをかくときの変形

問題例 2元1次方程式 $2x - 3y = 6$ のグラフをかきなさい。

【解答】 2元1次方程式 $2x - 3y = 6$ を y について解くと

$$2x - 3y = 6 \quad 2x \text{ を移項して}$$

$$-3y = -2x + 6 \quad \text{両辺を} -3 \text{ で割って、}$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2 \quad (\text{傾きと切片が容易に分かる})$$

【別解】 2元1次方程式 $2x - 3y = 6$ が通過する2点を求める方法。

$$x = 0 \text{ を代入して、} -3y = 6$$

$$y = -2 \quad \text{よって、} (0, -2) \text{ を通る}$$

$$y = 0 \text{ を代入して、} 2x = 6$$

$$x = 3 \quad \text{よって、} (3, 0) \text{ を通る}$$

【高等学校での指導】

放物線のグラフについて

$y = ax^2 + bx + c$ における等式の変形の指導

- ・ x 軸との交点を求めたいとき
- ・ 対称軸を求めたいとき
- ・ グラフの頂点を求めたいとき など

質問の内容によって、適切な等式の変形が要求される。

問題例 関数 $y = 2x^2 + 5x - 3$ に次の問に答えなさい。

x 軸との交点を求めなさい。

【解答】 x 軸との交点より、与式に $y = 0$ を代入する。

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \quad \text{左辺を因数分解して、}$$

$$(2x - 1)(x + 3) = 0$$

$$\text{よって、} x = \frac{1}{2}, -3 \quad \text{交点は、} \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (-3, 0)$$

対称軸を求めなさい。

【解答】 $y = 2x^2 + 5x - 3$ を平方完成すると

$$y = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} - 3$$

$$y = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

よって、 $x = -\frac{5}{4}$ が対称軸となる。

【別解】 の結果を利用する。放物線は線対称であるので、 x 軸の交点の座標から、中点の x 座標を求めると、

$$\frac{1}{2} + (-3) = -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2} \div 2 = -\frac{5}{4} \quad \text{よって、} x = -\frac{5}{4} \text{ が対称軸となる。}$$

この関数の y の最小値とそのときの x の値を求めなさい。

【解答】 の結果を利用する。

$$y = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} \dots$$

実数の範囲では、2乗すると必ず正の数になるから、 A^2 の最小の値は、 $A = 0$ のとき、 $A^2 = 0$ となる。

ゆえに、 が最小となるのは、 $x = -\frac{5}{4}$ のとき、 $y = -\frac{49}{8}$ (最小値) となる。

2. 小数を分数で表現する方法

【小学校での指導】

- ・ 小数を分数に変換すること
有限小数の変換、約分の指導
- ・ 分数を小数に変換すること
割り切れる、小数が循環する

問題例 次の小数を分数で表しなさい。

0.3

0.25

0.125

【解答】 $0.3 = \frac{3}{10}$

$$0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

問題例 次の分数を小数に直しなさい。

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{6}$$

(分子が1である分数を小数に直す)

【解答】 $1 \div 2 = 0.5$ (有限小数)

$1 \div 3 = 0.3333 \dots$ (循環小数)

$1 \div 4 = 0.25$ (有限小数)

$1 \div 5 = 0.2$ (有限小数)

$1 \div 6 = 0.1666 \dots$ (循環小数)

小学校の段階では、割り切れる分数(有限小数)と割り切れない分数(循環小数)の存在が理解できればよい。)

発展学習として、有限小数になる分数の分母の特徴を調べる。

<発展> 分母が2または5だけで素因数分解ができること。

【中学校での指導】

- ・連立方程式の加減法による解き方の発展課題として、循環小数を分数に変換することを指導する。

問題例 $0.1212121212 \dots$ と続く循環小数を分数に変換しなさい。

【解答】 $x = 0.1212121212 \dots$ とする。

両辺を100倍すると

$$100x = 12.12121212 \dots$$

$$x = 0.1212121212 \dots$$

$$- \quad 99x = 12$$

$$x = \frac{4}{33} = 0.12121212 \dots$$

<ここでのポイント>

- ・ $A = B$ 、 $C = D$ ならば $A - C = B - D$ の加減法の原理の応用であること
- ・ $4 \div 33$ の結果が $0.121212 \dots$ となる検算が、小学校の指導とのつながりであること。

【高等学校での指導】

- ・循環小数を分数に変換すること(数列の考え:無限等比級数の和として)

問題例 $0.1212121212 \dots$ と続く循環小数を分数に変換しなさい。

【解答】

この循環小数を

$$0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \dots$$

と無限等比級数の和としてとらえる。

初項 $a = 0.12$ 公比 $r = 0.01$ とすると

$$\text{和} = \frac{a}{1-r} \quad \text{より} \quad \frac{0.12}{1-0.01} = \frac{4}{33} \quad \text{が導ける。}$$

3. 素因数分解の利用法について

【小学校での指導】

- ・整数と約数の指導のときに、素数の意味を紹介することが可能。
- ・整数は、いくつかの約数の積で表すことが可能。

すべての整数は、いくつかの素数の積で表すことが可能。

問題例 24の約数をすべて求めなさい。

【解答】 1、2、3、4、6、8、12、24

問題例 24をいくつかの約数の積で表しなさい。

【解答例】 $24 = 2 \times 12$ $24 = 3 \times 8$ $24 = 2 \times 3 \times 4$
 $24 = 6 \times 4$

問題例 24の約数で8個のうち、その数の約数が2個であるものを選びなさい。

【解答】 1・・・1個 不可
 2・・・2個(1、2)可
 3・・・2個(1、3)可
 4・・・3個(1、2、4)不可
 6・・・4個(1、2、3、6)不可
 8・・・4個(1、2、4、8)不可
 12・・・5個(1、2、3、6、12)不可
 24・・・8個(1、2、3、4、6、8、12、24)

2、3のように、約数が2つ(1と自分自身)の整数を素数という。

【現行：中学校の指導】

問題例 24を素数だけの積で表しなさい。

【解答】 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ (1通り：順不同
 $2 \times 3 \times 2 \times 2$ などは同一とみなす)

素数だけの積で表すことを素因数分解という。【現行：中学校の指導】

問題例 $\frac{42}{105}$ を約分しなさい。(素因数分解の利用)

【解答】

$42 = 2 \times 3 \times 7$ 、 $105 = 3 \times 5 \times 7$ であるから、

$$\frac{42}{105} = \frac{2 \times 3 \times 7}{3 \times 5 \times 7} = \frac{2}{5}$$

【中学校での指導】

- ・素数の定義
- ・素因数分解の意味、素因数分解ができること。
- ・素因数分解を利用して、いろんな問題が解けること。

問題例 素数とは何かを答えなさい。

【解答】1と自分自身以外に約数をもたない自然数。

問題例 1～50までの自然数のうち、素数をすべて求めなさい。

【解答】2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47

問題例 次の自然数を素因数分解しなさい。(累乗の表現の導入)

24 90 120

【解答】
 $24 = 2^3 \times 3$
 $90 = 2 \times 3^2 \times 5$
 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

問題例 90の約数の個数を求めなさい。(素因数分解の利用)

【解答】90を素因数分解すると、

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5 \quad (2^1 \times 3^2 \times 5^1)$$

よって、約数は、 $2^0 \times 3^0 \times 5^0 = 1$

$$2^1 \times 3^0 \times 5^0 = 2$$

$$2^0 \times 3^1 \times 5^0 = 3$$

$$2^0 \times 3^2 \times 5^0 = 9$$

$$2^1 \times 3^1 \times 5^0 = 6$$

$$2^1 \times 3^2 \times 5^0 = 18$$

$$2^0 \times 3^1 \times 5^1 = 15$$

$$2^0 \times 3^2 \times 5^1 = 45$$

$$2^1 \times 3^1 \times 5^1 = 30$$

$$2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 90$$

$$2^0 \times 3^0 \times 5^1 = 5$$

$$2^1 \times 3^0 \times 5^1 = 10$$

となり、全部で、12個

約数の個数だけを調べるには、一般に次の性質が知られている。

自然数が次のように素因数分解されるとき、

$$\text{自然数} = A^x \times B^y \times C^z \times \dots$$

(ただし、A、B、Cは素数指数 x 、 y 、 z 、 $\dots$ は自然数)

$$\text{約数の個数} = (x+1)(y+1)(z+1) \dots$$

例題 720の約数の個数を求めなさい。

【解答】720を素因数分解すると、 $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$ であるから、約数の個数は、

$$\begin{aligned} & (4+1) \times (2+1) \times (1+1) \\ &= 5 \times 3 \times 2 \\ &= 30 \end{aligned}$$

30個

問題例 縦の長さが60mm、横の長さが210mmの長方形のタイルで、ある土地を隙間なく敷き詰めることを考えます。できた土地の形が、最小の正方形であるとき、この土地の面積を求めなさい。

【解答】60と210の最小公倍数を求めれば、最小の正方形の1辺の長さとなる。それぞれを素因数分解すると、

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \dots$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \dots$$

よって、最小公倍数は、

$$(2 \times 3 \times 5) \times 2 \times 7 = 420$$

したがって、最小の正方形の1辺の長さは、420mmである。

上記の式で()内は の共通部分でこれが2つの数の最大公約数、 2×7 は、お互いに不足している部分でこれかけると最小公倍数が求められる。

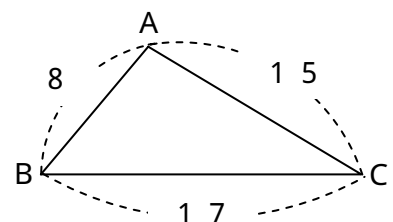
4. 三角形の面積を求めること

小学校では、底辺と高さが与えられたとき、面積を求めることが可能であるが、中学校では、三平方の定理を利用することで、3辺の長さが与えられたときでも、面積を求めることが可能である。また、これは高等学校ではヘロンの公式を利用することでの求めることが可能である。そのほか、角度が 30° 、 60° 、 120° のように特別な角度である場合は、それらの角をはさむ2辺の長さを与えることで面積が求められる。

問題例 【小学校】 底辺が6cm、高さが5cmである三角形の面積を求めなさい。

【解答】 $6 \times 5 \div 2 = 15$ 15 cm^2

問題例 ABCの3つの辺の長さが、 $AB = 8 \text{ cm}$ 、 $BC = 17 \text{ cm}$ 、 $CA = 15 \text{ cm}$ であるとき、この三角形の面積を求めなさい。



【中学生用解答例 1】

2 つの短い辺の 2 乗の和を計算すると、

$$\begin{aligned} & 8^2 + 15^2 \\ &= 64 + 225 \\ &= 289 \dots\dots\dots \end{aligned}$$

長い辺の 2 乗を計算すると

$$17^2 = 289 \dots\dots$$

、より、三平方の定理の逆により、 $\angle A = 90^\circ$ であることが分かる。

よって、三角形の面積は、

$$\begin{aligned} & \text{底辺} (AB) \times \text{高さ} (CA) \div 2 \\ &= 8 \times 15 \div 2 \\ &= 60 \end{aligned}$$

したがって、三角形の面積は、 60 cm^2

【中学生用解答例 2】

A から BC に垂線を下ろし、その交点を D とする。BD = x、AD = h とすると、三平方の定理より、次の式が成り立つ。

$$h^2 = 64 - x^2 \dots\dots\dots$$

$$h^2 = 225 - (17 - x)^2 \dots\dots$$

、より、 $64 = 34x - 64$

$$17x = 64$$

$$x = \frac{64}{17}$$

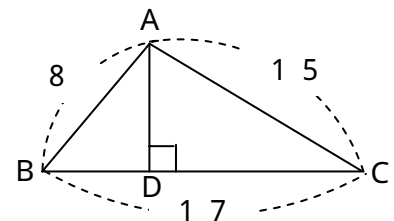
これを に代入して、

$$h^2 = 64 - \left(\frac{64}{17}\right)^2 = \frac{64(17^2 - 8^2)}{17^2} = \frac{8^2 \cdot 15^2}{17^2}$$

$$h = \frac{8 \cdot 15}{17}$$

よって、 $17 \times \frac{8 \cdot 15}{17} \div 2 = 60$

したがって、三角形の面積は、 60 cm^2



【高校生解答例】

ヘロンの公式

三角形の 3 つの辺の長さを a 、 b 、 c とし、面積を S とするとき、次の式が成

り立つ。ただし、 $s = \frac{a+b+c}{2}$ とする。

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

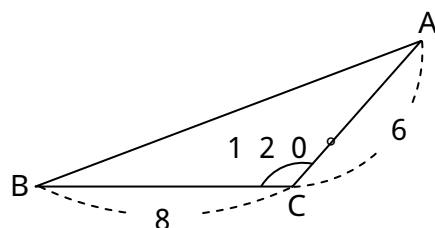
$$s = \frac{8 + 17 + 15}{2} = 20$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} S &= \sqrt{20(20-8)(20-17)(20-15)} \\ &= \sqrt{20 \times 12 \times 3 \times 5} \\ &= \sqrt{4^2 \times 3^2 \times 5^2} \\ &= 60 \end{aligned}$$

したがって、三角形の面積は、 60 cm^2

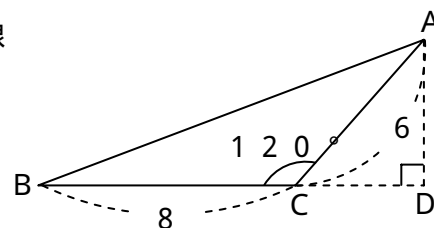
余弦定理及び次の三角形の面積の公式を使うことも考えられる。

問題例 $BC = 8 \text{ cm}$ 、 $CA = 6 \text{ cm}$ 、 $C = 120^\circ$ である三角形の面積を求めなさい。



【中学生解答例】

辺 BC を C の方向へ延長し、 A から下ろした垂線との交点を D とすると、三角形 ACD は、 30° 、 60° 、 90° である特別な三角形であるから、 $AD = 3\sqrt{3} \text{ cm}$ となる。
よって、 $8 \times 3\sqrt{3} \div 2 = 12\sqrt{3}$
したがって、三角形の面積は、 $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$



【高校生解答例】

三角形において、 $BC = a$ 、 $CA = b$ とするとき、面積 S は、次のように表される。

$$S = \frac{1}{2} a b \cdot \sin C$$

上記の公式より、

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 120^\circ = 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

よって、三角形の面積は、 $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

5 . 三平方の定理の応用として

<オリジナル問題>

1 辺の長さが 53 cm 、2 つの対角線の長さが共に偶数 cm であるひし形がある。
このひし形の面積を求めなさい。

[ピタゴラス数について]

補題 1

ピタゴラス数・・・直角三角形に関する定理で知られている

三平方の定理

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たす 3 つの自然数 a 、 b 、 c をピタゴラス数といいます。たとえば、 $a = 3$ 、 $b = 4$ 、 $c = 5$ は、有名です。

これ以外のものをいくつか見つけなさい。

補題 2

m 、 n を自然数 ($m > n$) とするとき、次の計算結果が必ず自然数になるものを記号で選びなさい。

ア	$m + n$	イ	m^2	ウ	$n - m$	エ	$m \div n$
オ	$2mn$	カ	$m^2 - n^2$	キ	$m^2 + n^2$		

補題 3 $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$ を因数分解しなさい。

補題 1 解答例	$a = 5$	$b = 12$	$c = 13$
	$a = 6$	$b = 8$	$c = 10$
	$a = 7$	$b = 24$	$c = 25$
	$a = 8$	$b = 15$	$c = 17$

補題 2 解答

必ず自然数になるものは、ア イ オ カ キ

(自然数は、加法、乗法について閉じている)

反例 ウ $3 - 4 = -1$ (負の数) 自然数ではない。

エ $5 \div 2 = 2.5$ (小数、分数) 自然数ではない。

補題 3 解答例

$$\begin{aligned}(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2\end{aligned}$$

ここで、 $a = m^2 - n^2$ 、 $b = 2mn$ 、 $c = m^2 + n^2$ として、上記の等式に代入すると、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

となる。

また、問題 2 より、 $m^2 - n^2$ 、 $2mn$ 、 $m^2 + n^2$ は、それぞれ自然数を表している。

以上をまとめると、

m 、 n を $m > n$ を満たす自然数とする。ここで、 $a = m^2 - n^2$ 、 $b = 2mn$ 、 $c = m^2 + n^2$ とすると、 a 、 b 、 c は

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たす。つまり、3つの自然数 a 、 b 、 c は、ピタゴラス数となる。

【オリジナル問題の解説】

図のように対角線の交点を M とする。

対角線の長さがともに偶数 cm なので、 AM 、 BM は自然数である。

また、ひし形であることより、 ABM は、直角三角形であるから、 $AM = x$ 、 $BM = y$ とすると、三平方の定理

$$x^2 + y^2 = 53^2$$

が成り立つ。

x 、 y 、 53 は、ピタゴラス数となるので、 $m^2 + n^2 = 53$ を満たす自然数 m 、 n ($m > n$) を求める。

$m = 2$ のとき、 $n^2 = 49$ で、 $n = 7$ 。 ($m > n$ なので不可)

$m = 3$ のとき、 $n^2 = 44$ で、 n は無理数。

$m = 4$ のとき、 $n^2 = 37$ で、 n は無理数。

$m = 5$ のとき、 $n^2 = 28$ で、 n は無理数。

$m = 6$ のとき、 $n^2 = 17$ で、 n は無理数。

$m = 7$ のとき、 $n^2 = 4$ で、 n は自然数だから 2 。

$m = 8$ 以上の場合、 n^2 は負の数となるので考えない。

よって、 $m = 7$ 、 $n = 2$

$$x = m^2 - n^2 = 49 - 4 = 45$$

$$y = 2mn = 2 \times 7 \times 2 = 28$$

となり、2つの対角線は、 90 cm 、 56 cm となる。

したがって、面積は、 $90 \times 56 \div 2 = 2520 \text{ cm}^2$

