Japan Concrete Institute

コンクリート工学年次論文報告集 11-2 1989

論 文

[2069] 鉄筋コンクリート床スラブの長期たわみ解析とその適合性について

正会員 杉野目 章（室蘭工業大学）
正会員 井 野 智（北海道大学工学部）
正会員 伊 藤 正 義（北海道工業大学）
正会員○吉 野 修 司（北海道大学大学院）

1 はじめに

筆者らは先に、曲げひび割れの生ずる床スラブを、柱列帯と柱間帯でブロック分けし、スパン方向の剛性がブロックごとに異なる直交異方性床板と考え、使用荷重下における初期たわみとコンクリートの時間依存性を考慮した長期たわみ解析を行った[1]。この解析法は、計算上ひび割れと配筋の実状を十分に表していないなどの難点があり、これらを補うためには、床スラブのスパン方向の剛性分布が不均一な、いわゆる変断面部材としての解析が必要である。本報告では、二方向床スラブをスパン方向に等分し、各節点の断面性能を修正しながら差分法による弾性解析を繰り返して初期たわみを求め、さらにコンクリートの材料性状を修正することにより任意材令における長期たわみを予測し得る方法を提案し、本解析法を既往の長期載荷実験および実在損傷床スラブに適用してその適合性を検証したのち、改定後たわみ障害発生の苦情が聞かれなくなったと言われている日本建築学会の現行ＲＣ規準（以下、学会ＲＣ規準という）のスラブ厚規定によって設計した床スラブの長期たわみ予測値から、床スラブのたわみ限度の設定を試みた。

2 床スラブの解析方法

2・1 基本式とその差分表示

床板の短辺方向をｘ、長辺方向をｙとする左手系直交座標ｘ、ｙ、ｚのｚ方向に等分布荷重ｐを受ける任意点（ｘ，ｙ）の力の釣合式は[2]、

$$\frac{\partial^2 Mx}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 Mxy}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 My}{\partial y^2}+P=0 \qquad (1)$$

ここで、Mx、My：ｘ、ｙ方向の曲げモーメント、
Mxy：捩りモーメント
ｘ、ｙ方向の板剛度をDx、Dyで表すと、直交異方性床板における上記モーメントとたわみＷの関係式は次のようになる。

$$Mx=-Dx\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

$$My=-Dy\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) \qquad (3)$$

$$Mxy=-(1-\nu)\,Dxy\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} \qquad (4)$$

ただし、$Dxy=\sqrt{DxDy}$、　ν：ポアソン比
床板のｘ、ｙ方向をそれぞれ幅 Δx、Δy（=rΔx）に等分し、節点番号を図１のように設定したとき、

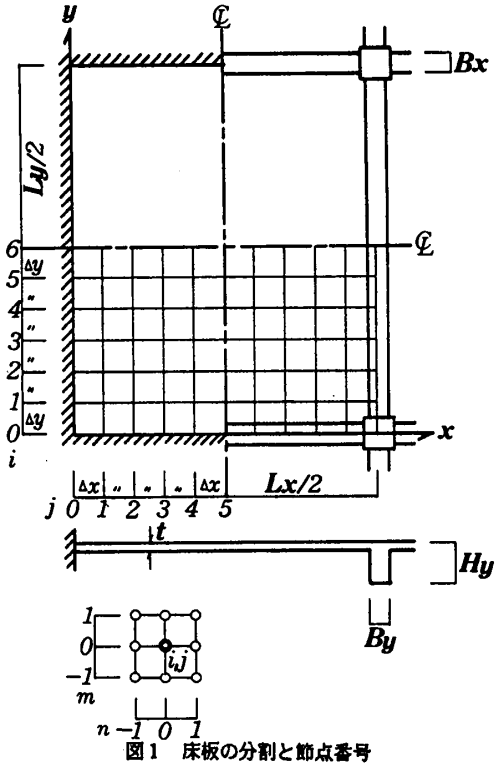


図1 床板の分割と節点番号

NII-Electronic Library Service

Japan Concrete Institute

$x=x_j$、$y=y_i$ を原点として、(1)式の各項を差分表示すると次のようになる。

$$\left(\frac{\Delta^2 Mx}{\Delta x^2}\right)_{0,0}=\frac{1}{\Delta x^2}\left(Mx_{0,1}-2Mx_{0,0}+Mx_{0,-1}\right) \tag{5}$$

$$\left(\frac{\Delta^2 My}{\Delta y^2}\right)_{0,0}=\frac{1}{r^2\Delta x^2}\left(My_{1,0}-2My_{0,0}+My_{-1,0}\right) \tag{6}$$

$$\left(\frac{\Delta^2 Mxy}{\Delta x\Delta y}\right)_{0,0}=\frac{1}{r\Delta x^2}\left(Mxy_{1/2,1/2}-Mxy_{1/2,-1/2}-Mxy_{-1/2,1/2}+Mxy_{-1/2,-1/2}\right) \tag{7}$$

上記差分式の各項は、(2)～(4)式を差分表示して、

$$Mx_{0,n}=-\frac{Dx_{0,n}}{\Delta x^2}\left(W_{0,n+1}-2W_{0,n}+W_{0,n-1}+\nu(W_{1,n}-2W_{0,n}+W_{-1,n})\right) \tag{8}$$

$$My_{m,0}=-\frac{Dy_{m,0}}{r^2\Delta x^2}\left(W_{m+1,0}-2W_{m,0}+W_{m-1,0}+\nu(W_{m,1}-2W_{m,0}+W_{m,-1})\right) \tag{9}$$

$$Mxy_{m/2,n/2}=-\frac{(1-\nu)}{4r\Delta x^2}\left(Dxy_{0,0}+Dxy_{0,n}+Dxy_{m,n}+Dxy_{m,0}\right)\left(W_{m,n}-W_{m,0}-W_{0,n}+W_{0,0}\right) \tag{10}$$

ただし、m：−1, 0, 1、　n：−1, 0, 1

したがって、式(8)～(10)を(5)～(7)に代入して合算することにより、式(11)を得る。

(5)式の右辺＋(6)式の右辺＋(7)式の右辺×2＋p＝0 (11)

周辺固定の境界条件は、$x=0$ で $w=0$、$dw/dx=0$、ゆえ、外点$x=x_{-1}$におけるたわみは、

$(W_{0,1}-W_{0,-1})/2\Delta x=0$　　$\therefore W_{0,-1}=W_{0,1}$

単純支持の境界条件は、$x=0$で　$w=0$、$M_x=0$、すなわち $d^2w/dx^2=0$　ゆえ、

$(W_{0,1}-2W_{0,0}+W_{0,-1})/2\Delta x=0$　　$\therefore W_{0,-1}=-W_{0,1}$

となり、y方向も同様となる。

(11)式における外点を境界条件を用いて消去することにより、各節点のたわみを未知数とする連立1次方程式を得る。この解が変断面床スラブの弾性たわみ Δeとなる。

2・2　曲げひび割れを考慮した初期たわみ

以下の要領で曲げひび割れ発生領域における板剛度の低減を行い、前項の計算を繰り返すことにより初期たわみΔiを得る。

ある節点のx方向曲げモーメントMaxがひび割れモーメントMcrを超過するか否かを吟味し、超過する場合には、次のBranson式により単位幅の帯板の有効断面2次モーメントを計算する[3)]。

$$Iex=(Mcr/Max)^4 Ig_0+[1-(Mcr/Max)^4]Icr \tag{12}$$

$$Ig_0=bt^3/12 \tag{13}$$

$$Icr=b(cd)^3/3+nA_s(d-cd)^2+nA'_s(cd-d') \tag{14}$$

ここで、Ig_0：鉄筋を無視した健全断面の断面2次モーメント、Icr：ひび割れ断面の断面2次モーメント、b：幅（=100cm）、t：スラブ厚、c：中立軸比、d：圧縮縁から引張鉄筋重心までの距離、d'：圧縮縁から圧縮鉄筋重心までの距離、n：鉄筋のヤング係数比、A_s：引張鉄筋断面積、A'_s：圧縮鉄筋断面積

したがって、Max≧Mcrとなる節点のx方向の有効板剛度Dexは、次式となる。

$$Dex=D_0(Iex/Ig_0) \tag{15}$$

ただし、D_0：基準板剛度　$D_0=Ect^3/12(1-\nu^2)$、Ec：コンクリートのヤング係数

また、Max＜Mcrとなる部分については、鉄筋を考慮した帯板の断面2次モーメントIgxを用いて、板剛度Dgxを求める。同じ要領で各節点のy方向の板剛度を計算する。

NII-Electronic Library Service

Japan Concrete Institute

$$Dgx = De(Igx / Ige) \quad (16)$$

$$Igx = bt^3/12 + bt(cd - t/2)^2 + nA_s(d - cd)^2 + nA'_s(cd - d') \quad (17)$$

2・3 スラブ定着筋の滑りを考慮した付加たわみ

スラブの端部上端鉄筋定着部の滑り量uによる固定端の回転角θは、ひび割れ断面の中立軸を回転中心と考えると、次式で計算できる。

$$\theta = u/(1-c)d \quad (18)$$

スラブ定着筋の滑りによる付加たわみΔsは、ひび割れ領域の支持辺に沿って節点ごとに算出したθを用い、境界条件を単純支持として床スラブを強制変形することによって求められる。すなわち、(11)式でp=0とし、ひび割れ領域では、

$$(W_{i,1} - W_{i,-1})/2\Delta x = \theta x_i, \quad (W_{1,j} - W_{-1,j})/2\Delta y = \theta y_j \quad (19)$$

ひび割れの生ぜぬ領域では、

$$W_{i,-1} = -W_{i,1}, \quad W_{-1,j} = -W_{1,j} \quad (20)$$

によって外点に関する項を消去することにより、付加たわみを算出する連立1次方程式を得る。

2・4 コンクリートの時間依存性たわみ

初期たわみΔiとクリープたわみΔcpと乾燥収縮たわみΔshの和$\Delta i+cp+sh$は、「ヤング係数比増大法」の一つである次のYu & Winterの式を用い[4]コンクリートの有効ヤング係数E'_{ct}と鉄筋のヤング係数比n'_tを求め、Δiと同じ要領で算出する。

$$E'_{ct} = Ec/(1 + 0.93\alpha Ec YT^{1/3}/a^{0.4}) \quad (21) \qquad n'_t = Es/E'_{ct} \quad (22)$$

ここで、Ec：（前出）、Y：載荷年数による倍率、T：載荷日数(但し、1年以上はT=365)、a：載荷開始材令(日数)、α：筆者が導入したスランプの影響係数（スランプが18cm内外では1.25）[5]、Es：鉄筋のヤング係数

(21)式の分母の2項目は、コンクリートのクリープと収縮ひずみに関するShankの実験式[6]であり、年単位のY値が与えられているが、これらを回帰分析すると、次の載荷年数Nに関する3次多項式が得られる。

$$Y = 1.2591 + 0.0592(N-3) - 0.0236(N-3)^2 + 0.0058(N-3)^3 \quad (23)$$

3 床スラブのたわみ解析の手順

コンクリートの曲げひび割れと時間依存性、並びに定着筋の滑りを考慮した床スラブのたわみ解析は、以下の手順による。

(1) スラブの短・長辺をそれぞれ等分割し、差分法により全節点を基準板剛度Deとする弾性解を求め、長期持続荷重時の弾性たわみをΔeとする。

(2) 前項の弾性解から荷重履歴として考えられる最大荷重時（通常は施工荷重時）の曲げモーメントを求め、コンクリートのヤング係数をEc、ヤング係数比をnとして、ひび割れ領域の有効板剛度Dex、Deyを決める。

(3) ひび割れ領域ではDex、Dey、ひび割れ領域以外では鉄筋を考慮したDgx、Dgyを板剛度とするスラブの差分法によるたわみ解析を行い、最大荷重下の曲げモーメントMx、Myを求める。

(4) 前項で得られるスラブの端モーメントを用いてひび割れ領域の定着筋の滑りによる付加たわみと曲げモーメントを求め、付加モーメントを前項のMx、Myに加算し、ひび割れ領域の板剛度を修正する。

(5) 各節点の板剛度が収斂するまで(3),(4)の手順を繰り返す。

(6) (3),(4)の解から初期たわみΔi、と定着筋の滑りによる付加たわみΔsを求める。

NII-Electronic Library Service

表1　計算に用いた既往長期載荷実験床スラブと実在損傷床スラブの諸元

	記号（建築用途）	T1,T2（正方形）	KN（長方形）	A（集合住宅）	B（事務所）	C（事務所）	D（官庁々舎）
概要	建物の構造	実験	実験	SRC9	RC3	RC2	RC5,B1
	文献・建設年/調査年	文献[9]	文献[10]	S48/S56	S35/S42	S34/S51	S35/S42
スラブの寸法	はり心スパン m	4.800x4.800	4.600x5.800	4.700x7.300	5.400x6.000	6.000x6.000	7.300x7.300
	有効スパン 〃	4.500x4.500	4.300x5.500	4.400x7.000	5.000x5.600	5.650x5.650	6.900x6.900
	実測スラブ厚 mm	120	130	119(90～160)	129(111～153)	156(141～164)	157(107～207)
	実測上端筋有効せい 〃	95	100	65(47～97)	57(39～87)	91(85～99)	97(66～125)
スラブの主筋	短辺 端部 上筋 mm	D10 @200	D10 @150	13,9φ @125	13,9φ @240	13φ @200	13,9φ @100
	短辺 中央 下筋 〃	D10 @200	D10 @150	9φ @250	9φ @235	13,9φ @200	9φ @100
	長辺 端部 上筋 〃			13,9φ @200	9φ @350		
	長辺 中央 下筋 〃			9φ @200	9φ @290		
はりの断面	短辺方向 mm	300x450	300x600		400x500	350x550	400x850
	長辺方向 〃	〃	〃		〃	〃	〃
はりの主筋	短辺 端部 上筋 mm	4-D19	4-D19		3-22φ	4-22φ	6-22φ
	短辺 中央 下筋 〃	〃	〃		2-22φ	3-22φ	4-22φ
	長辺 端部 上筋 〃	〃	〃		5-22φ		
	長辺 中央 下筋 〃	〃	〃		3-22φ		
コンクリート	圧縮強度 kg/cm²	69.4, 254	223, 251	180	150	180	180
	引張強度 〃	15.0	26.9	18.0	15.0	18.0	18.0
	平均付着強度 〃	6.9	22.3	10.8	9.0	10.8	10.8
	ヤング係数 〃	196000	222000	210000	182000	210000	210000
	有効ヤング係数 〃	9624	24660	16800	16600	16800	16800
	有効ヤング係数比	218	85	125	127	125	125
荷重	施工荷重 kg/m²	578	655	629	650	829	791
	仕上げ荷重 〃	-	-	40	56	66	88
	長期積載荷重 〃	144	117	60	100	100	200
材令	施工荷重載荷 日	2	14	14	14	14	14
	長期積載荷重載荷 〃	14	28				
	計測時 〃	560	245				

(7) コンクリートのヤング係数をE'_{ct}、鉄筋のヤング係数比をn'_tとして板剛度を修正し、再度(3)の解析を行ない$\Delta t = \Delta i + cp + sh$を得る。ただし、Dex、Deyは最大荷重時の曲げモーメントによる。

(8) 任意材令における長期たわみ$\Sigma\Delta = \Delta s + \Delta t$を計算する。

4　適合性の検討

一方向床スラブに関しては昨年度報告しており[7]、ここでは二方向床スラブを対象として、表1に掲げる既往の長期載荷実験2例と実在の損傷スラブ4例を取り上げ、本解法の適合性を検討する。たわみ実測値と本解法による予測値を表2に示す。縦軸に実測値、横軸に予測値をとり各床スラブのたわみをプロットすると図2のようになる。両者の間には比較的良い対応がみられる。ただし、実在損傷床スラブは平均実測値に対し計算した。いずれも端部上端筋の沈降が甚だしく、同鉄筋位置をわずかに変えるだけでたわみ値は著しく変動するが[1]、たとえば実測値と予測値の隔たりが大きい(A)の上端筋有効せい65mmを55、45mmとしたときの予測値は、27.9、41.1mm、実測値との比率$\Delta m/\Sigma\Delta$は1.25、0.85、となり実測値のばらつきの状況をある程度説明しているように思われる。なお、T1,Aは周辺固定、他はすべて周辺が大ばりに支持された長方形床スラブである。計算にあたっては、はりには参考文献[8]の方法を適用し本解法との連成解を求めた。周辺固定床スラブでは短辺有効スパンを、他は短辺はり心スパンをそれぞれ10等分し、差分分割網をできるだけ正方形に近づけた。

表2　検討床スラブのたわみ実測値と予測値　　単位：mm

記号	実測値	予測値					比率
	Δm	Δe	Δi	Δs	Δt	$\Sigma\Delta$	$\frac{\Delta m}{\Sigma\Delta}$
T1	14.5	0.9	1.5	2.5	13.0	15.5	0.94
T2	20.0	1.5	1.8	1.3	21.5	22.8	0.89
KN	6.3	1.1	1.1	0.0	7.5	7.5	0.84
A	35(22～50)	1.2	3.5	6.6	15.0	21.6	1.62
B	49(34～64)	2.4	8.2	8.4	36.5	44.9	1.09
C	40.0	1.9	3.1	5.2	23.8	29.0	1.38
D	55(34～71)	4.1	8.4	5.6	51.0	56.6	0.97

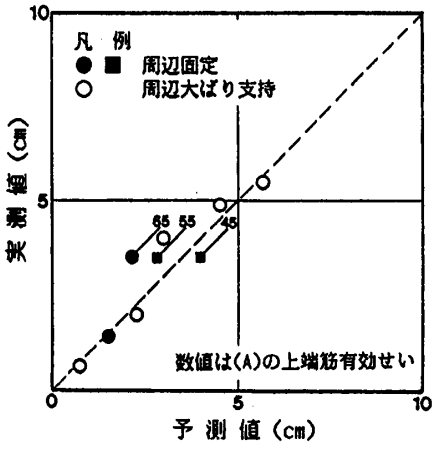


図2　たわみ実測値と予測値の対応

NII-Electronic Library Service

Japan Concrete Institute

5　床スラブの長期たわみ計算例

5・1　計算の概要

計算対象は、周辺固定または周辺が無限均等架構の大ばりに支持される長方形床スラブとし、形状、寸法、材料性状、荷重を表３のように設定した。スラブ厚は、学会ＲＣ規準値を用いるが、常用値である12,15,18cmの場合も検討対象とした。また配筋は、設計荷重およびＲＣ規準９条の応力を用い同13条の制限条項を満たしかつD10,13による組合せが最小重量となるようにし、スラブ主筋のかぶり厚さを３cm、短辺方向の端部上端鉄筋の上限をD13@100までとした。

5・2　計算結果とその考察

(1) 長期たわみ倍率　　計算の結果、弾性たわみを基準とした長期たわみ増大率（以下、長期たわみ倍率という）の分布は、図３のようになる。周辺固定床スラブ、無限均等架構の大ばりに支持される床スラブの長期たわみ倍率の最大値と平均値は、前者で13.8,9.3、後者で10.5,7.3となる。前者はＲＣ規準に示されている長期たわみ倍率16よりかなり小さくなっている。また、後者は長期たわみ倍率の小さい大ばり連成の影響が顕著に見らる。

(2) 許容たわみの設定　　学会ＲＣ規準のスラブ厚規定が現行のものに変わって以来たわみ障害発生の苦情が聞かれなくなったと言われている。ここでは、同規準にしたっがて設計した周辺固定の床スラブのうち、短辺スパンに対する長期たわみの比（以下、長期たわみ率という）が最大のものに着目し床スラブの許容たわみの設定を試みた。図４は、長期たわみ率の逆数、すなわちスラブの許容たわみを「短辺スパンの何分の１」と表すときの分母に当たるものを横軸にとり、計算結果を用途別に累積相対度数で表したものである。最小値は用途が住宅の居室、短辺スパン4.5m、辺長比1.6のときの360であるが、400以下となるのは住宅の居室の場合の１割程度に過ぎず、大半は420～560の範囲にある。解析誤差とある程度の施工誤差を見込んでも、学会ＲＣ規準にしたがった床スラブの長期たわみが短辺スパンLxの1/360以上となることはほとんどないと判断し、床スラブの許容たわみ率をLx/350、総量規制値を20mm（学会ＲＣ規準）として以下の検討を行う。

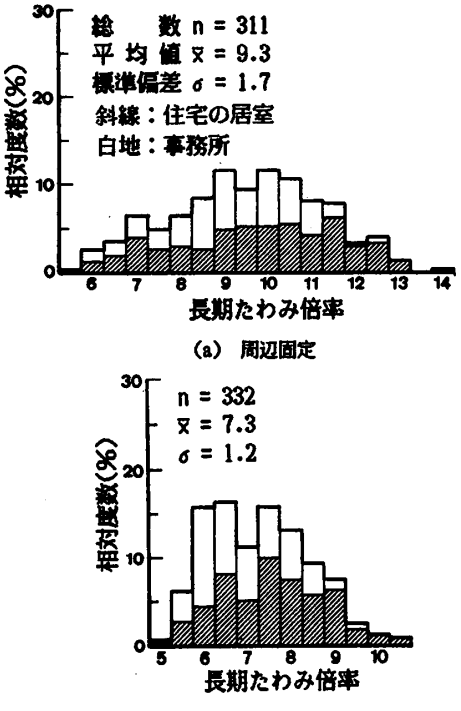


図３　床スラブの長期たわみ倍率

表３　計算モデルの諸元

			周辺固定	周辺大ばり支持	備考
スラブ厚 (cm)			学会RC規準,12,15,18	学会RC規準,12,15,18	
短辺スパン (cm)			450,500,550,…,900	450,500,550,…,900	
辺長比			1.0,1.2,1.4,…,2.0	1.0,1.2,1.4,…,2.0	
大ばり	幅(cm)		——	40+2.5(L-900)/150	L は材長（はり心スパン）
	せい(cm)		——	0.1L+5(600-L)/150	
材料性状	コンクリート	圧縮強度 Fc	210 kg/cm²		
		引張強度	26.1 〃		1.8√Fc
		付着強度	14 〃		異形鉄筋、上端筋:Fc/15
		ヤング係数 Ec	210000 〃		
		有効ヤング係数 E'ct	26600 〃		材令 t=∞
		ポアソン比	0.2		
	鉄筋	許容引張応力度	2000 kg/cm²		SD30使用
		ヤング係数	2100000 〃		ヤング係数比 n=10
荷重		設計用積載荷重	300,180 kg/m²		事務所,住宅の居室
		仕上げ荷重	80 〃		
		長期持続積載荷重	100, 60 〃		設計用積載荷重の 1/3
		施工荷重	備考参照		コンクリート自重の2.1倍

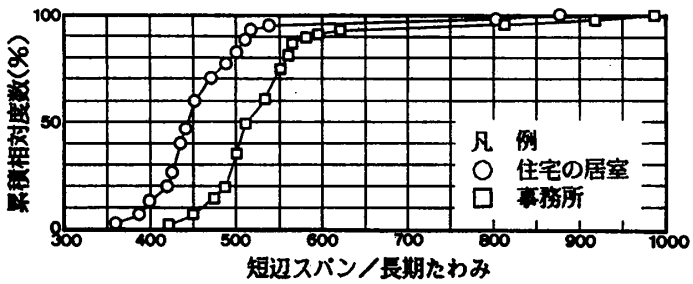


図４　スラブ厚が学会ＲＣ規準値の周辺固定長方形床スラブの（短辺スパン／長期たわみ）比

NII-Electronic Library Service

(3) 設計可能なスラブ厚下限値　辺長比が同じで、短辺スパンと厚さの異なる周辺が固定または大ばりに支持される長方形床スラブの長期たわみ予測値を、図5、6のように表し、これらに前項で設定した使用限界を描き入れると、設計可能なスラブ厚の下限値を容易に知ることができる。　図5、6から、スラブ厚ごとの長期たわみ曲線と使用限界線の交点を読み取ると、長期たわみがほぼ許容値となる長方形スラブの形状・寸法の限度が、図7のように与えられる。長方形床スラブの短辺有効スパンと短辺はり心スパンと辺長比を定めると、図7(a)からは許容たわみを越えないスラブ厚が、同(b)からは総量規制を満足するスラブ厚が決まり長期たわみの検討を要するか否かを判断できる。

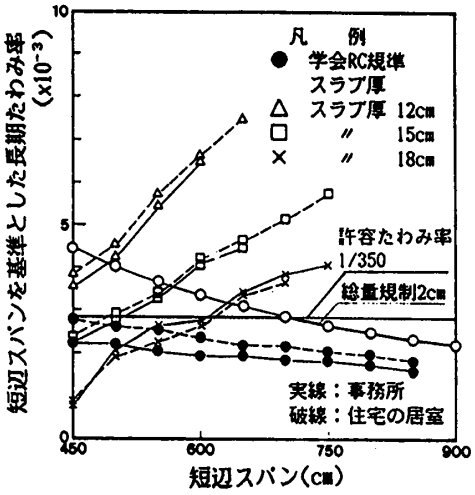


図5　周辺固定長方形床スラブの短辺スパンを基準とした長期たわみ率（辺長比1.6）

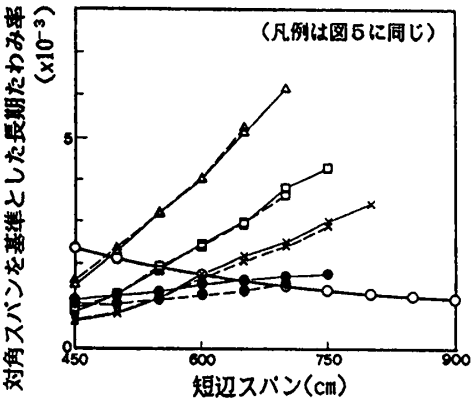
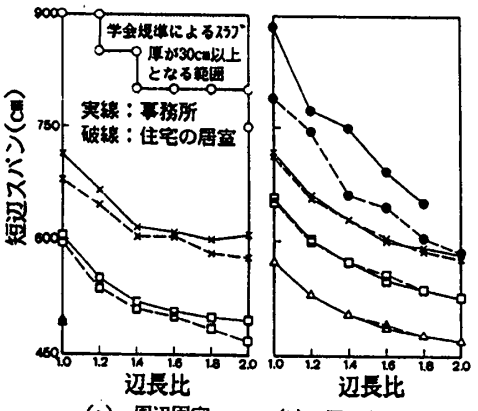


図6　大ばり支持長方形床スラブの対角スパンを基準とした長期たわみ率（辺長比1.6）



(a) 周辺固定　(b) 周辺大ばり支持

図7　長期たわみの検討を要しない長方形スラブの形状と限界寸法（凡例は図5に同じ）

6　おわりに

以上は、曲げひび割れの発生によって剛性分布が不均一となる二方向床スラブの初期および長期たわみ解析法を新たに提案し、既往の長期載荷実験等と比較してその適合性を検証したもので、本解法による多数の長方形床スラブのたわみ計算の結果から以下の事柄が明かとなった。

①弾性たわみを基準とした長期たわみ倍率は6～12の範囲に幅広く分布し、②同倍率を16と仮定して導いた現行の学会RC規準スラブ厚規定は十分安全であり、③これによって設計した床スラブの使用荷重下の長期たわみが短辺スパンの1／360以上となることはほとんどない。規準改定後たわみ障害の苦情が聞かれなくなったことから、④スラブの許容たわみ率を1／350と設定すると、⑤スラブ厚が規準値以下でも設計可能である。⑥スラブ厚が規準値以上ならば長期たわみの検討は不要であるが、⑦大規模な床スラブでは規準の所要厚が過大となるため大ばりの変形を含む長期たわみが総量規制値20㎜を越えることがある。

参考文献

1) 杉野目章、井野智、土橋由造、山村明義：使用荷重下における鉄筋コンクリート床スラブたわみ予測計算、日本建築学会構造系論文報告集、No.372、昭62.2、pp.103～113
2) S.P.Timoshenko & S.Woinousky-krieger：Theory of Plate and Shells,McGraw-Hill(2nd Edition),1959,pp.364～367
3) D.E.Branson：Deformation of Concrete Structures,McGraw-Hill,1977,pp.118～120
4) W.W.Yu & G.Winter：Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams Under Working Loads,Journal of American Concrete Institute,No.57.2,July 1960, pp.29～50
5) H.RUsch,D.Jungwirth,H.K.Hilsdorf：Creep and Shrinkage,Springer-Verlag,1983,pp.70
6) Vasha,G.W.,Fluck,P.G.：Effect of Compressive Reinforcement on Plastic Flow of Reinforced Concrete Beams,ACI Journal,V.24,2,Oct.1952, pp.89～108
7) 吉野修司、井野智、杉野目章：使用荷重下における鉄筋コンクリート床板の長期たわみ解析（その1、2）、日本建築学会大会学術講演便概集、昭63.10、pp.157～160
8) 杉野目章、井野智、伊藤正義、駒込理：鉄筋コンクリートばりの長期たわみ解析とその適合性について、コンクリート工学年次論文報告集、10-3巻、昭63.6、pp.307～312
9) 山本俊彦、白都滋：鉄筋コンクリート造二方向床スラブの長期たわみ性状に関する実験、日本建築学会大会学術講演便概集、昭58.9、pp.1957,1958
10) 日本建築業協会：型わく支保工存置期間の算定および施工要領（案）、昭59.1、pp.60～63

NII-Electronic Library Service