

(昭和 41 年 5 月造船協会春季講演会において講演)

船用推進器の見掛けの慣性 モーメントについて

正員 高以良 一二男*
矢野 巍*

Virtual Moment of Inertia of Marine Propellers

By Fujio Takaira, *Member*
Takasi Yano

Summary

In order to calculate the critical speed of propeller shaft, the accurate value of virtual moment of inertia of marine propeller should be estimated.

Virtual moment of inertia consists of the mass moment of inertia of propeller I and the additional moment of inertia by entrained water ΔI .

It is usual to estimate ΔI by making a percentage addition to I , varying from some 20 percent to 30 percent, but this estimate is sometimes accompanied by risk,

The author introduced the theoretical formula by application of two dimensional, and three dimensional potential flow theory, and by the test results for series model propeller the coefficient of the theoretical formula were added some correction the simple practical formula for ΔI were obtained. The availability of this practical formula was also proved by the test results of torsional vibration of propulsion at sea trial,

1 緒 言

軸系の危険回転数の計算に当つては、推進器の見掛けの慣性モーメントの正確な値が必要である。見掛けの慣性モーメントは推進器自体の慣性モーメント I と水による付加慣性モーメント ΔI との和として与えられるが、従来 ΔI は I の 20 ないし 30% として計算されるのが普通である。しかし危険回転数の予測に当り安全率を考へることは無意味であるので、 ΔI の推定は正確さが要求される。

L. C. Burrill および W. Robson (1962) の論文⁽¹⁾ はこの意味で参考となるが、模型実験をもとにした実験式であるので、一般性にかげうらみがある。

筆者は、ポテンシャル理論により理論式を導き、系統的模型実験によつて係数を修正した一般性のある簡単な計算式を得た。実船試験の結果によつても本計算式の有用性が証明されている。

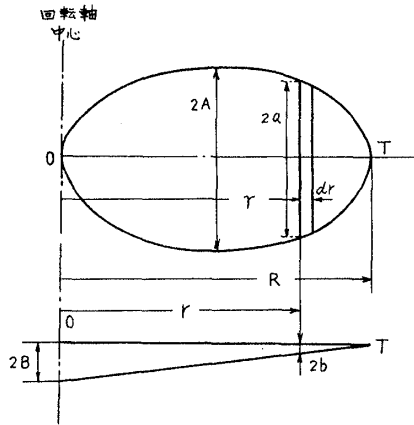
2 2次元理論による基本式の誘導

推進器の形状を簡単のため第1図のごとく仮定する。

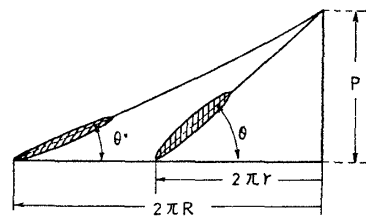
- (1) 翼展開面の形状は長軸 $R/2$, 短軸 A の楕円とし、長軸の一端 O において推進器軸心に切する。
- (2) 翼厚 $2b$ は推進器の半径方向に直線的に変化し、先端 T においては $2b=0$, 軸心 O においては $2b=2B$ である。
- (3) 軸心より半径 r で翼を切つた断面は長軸 a , 短軸 b の楕円である。
- (4) 翼のピッチを P とすれば、軸心より r の距離にある翼断面の傾き θ は次式で与えられる。

原稿受付 昭和 40 年 12 月 16 日

* 三菱重工長崎研究所



第1図 推進器形状の仮定



$$\tan \theta = P/2\pi r \quad (1)$$

以上の仮定はかなり大胆なものであるが、実用面では一応十分と考える。

一般に流れの方向と θ だけ傾いた楕円柱の2次元ポテンシャル流れに対して、その単位長さの付加質量 m は、流体の密度を ρ とすれば次式で与えられる。(証明後記)

$$m = \rho\pi(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \quad (2)$$

第1図において軸心より r なる距離にある微小幅 dr について(2)式が成立するものとすれば、幅 dr の翼素に対する付加質量 dm は次式で与えられる。

$$dm = \rho\pi(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) dr \quad (3)$$

したがって、付加質量 dm が軸心 O に対して有する慣性モーメントは

$$di = r^2 dm = \rho\pi(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) r^2 dr \quad (4)$$

翼1枚についての付加慣性モーメントは

$$i = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R \rho\pi(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) r^2 dr \quad (5)$$

(1)式のピッチ P の代りにピッチ比 $p = P/D$ を用うれば、

$$\tan \theta = P/2\pi r = p \cdot R/\pi r \quad (6)$$

ゆえに

$$\sin^2 \theta = \tan^2 \theta / (1 + \tan^2 \theta) = p^2 R^2 / (\pi^2 r^2 + p^2 R^2) \quad (7)$$

$$\cos^2 \theta = 1 / (1 + \tan^2 \theta) = \pi^2 r^2 / (\pi^2 r^2 + p^2 R^2) \quad (8)$$

また上述の仮定により、

$$a = \frac{2A}{R} \sqrt{Rr - r^2} \quad (9)$$

$$b = \left(1 - \frac{r}{R}\right) B \quad (10)$$

(7), (8), (9), (10) を (5) に代入すれば、次式を得

$$\frac{i}{\rho D^5} = f_1(p) \alpha^2 + f_2(p) \beta^2 \quad (11)$$

ここに

$$\alpha = 2A/D, \quad \beta = 2B/D \quad (12)$$

$f_1(p)$, $f_2(p)$ はピッチ比 p のみの関数で次式で与えられる。

$$f_1(p) = \frac{\pi}{32} \eta^2 \left\{ \frac{2}{3} + 4\eta^2 - 2\eta^2 \log \left(1 + \frac{1}{\eta^2} \right) - 4\eta^3 \tan^{-1} \frac{1}{\eta} \right\} \quad (13)$$

$$f_2(p) = \frac{\pi}{32} \left\{ \frac{1}{30} - \frac{\eta^2}{3} + \eta^4 + \eta^3 (1 - \eta^2) \tan^{-1} \frac{1}{\eta} - \eta^4 \log \left(1 + \frac{1}{\eta^2} \right) \right\} \quad (14)$$

$$\eta = p/\pi \quad (15)$$

船用推進器はピッチ比 p が 0.6 から 1.4 までの値をとるのが普通である。この値に対応する $f_1(p)$, $f_2(p)$ は第1表のごとく、ほぼ同じ order の値であるから、 $\alpha \gg \beta$ を考慮すれば (11) 式の第2項は省略して差支えない。

$$\frac{i}{\rho D^5} = f_1(p) \alpha^2 \quad (16)$$

推進器の翼数を z とし、水による付加慣性モーメントを ΔI で表わせば、(16)式より

$$\frac{\Delta I}{\rho D^5} = f_1(p) \cdot z \cdot \alpha^2 \quad (17)$$

第1表 $f_1(p)f_2(p)$ の値

p	$f_1(p)$	$f_2(p)$
0.6	0.00190	0.00268
0.8	0.00299	0.00254
1.0	0.00421	0.00217
1.2	0.00537	0.00189
1.4	0.00738	0.00171

3 3次元理論による補正

前節では翼を翼素に分解しておおのの翼素について2次元理論を適用したが、実際の場合は翼端における流

れの回り込み, その他3次元的な影響が現れるので, (17) 式で与えられる値よりは小さくなる。

3次元補正係数を K とすれば

$$\frac{\Delta I}{\rho D^5} = K f_1(p), z, \alpha^2 \quad (18)$$

となる。実験によれば K は単なる常数ではなく, p および α の関数となる。したがって本節では K について概略の検討を行なっておくこととする。

第1図のごとき形状のものについて3次元的に解を求めることは容易ではないから, 第2図のごとき長径 R , 短径 A' の楕円板の回転運動を考えることとする。

前節と同様に軸より r の半径の dr について, 2次元理論を適用すれば, (16) 式に対応する楕円板の付加慣性モーメントは次式で与えられる。

$$\frac{i}{\rho D^5} = \frac{\pi}{120} \left(\frac{A'}{R} \right)^2 \quad (19)$$

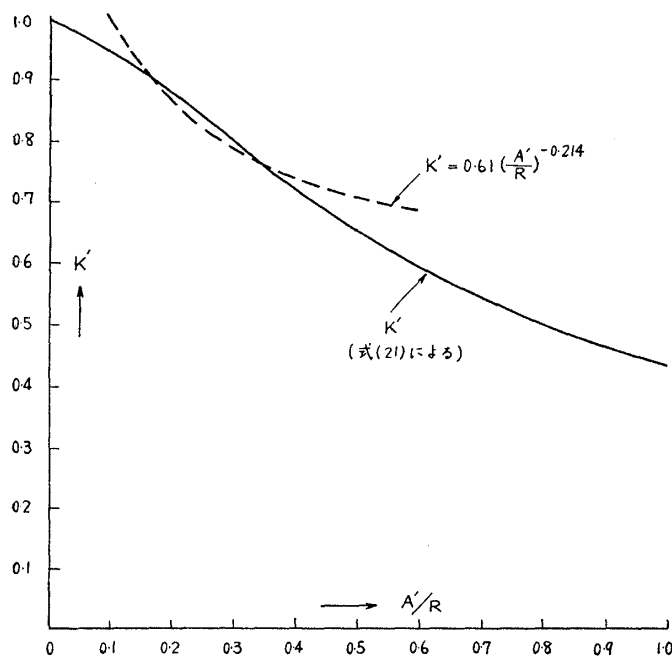
一方, 3つの主軸の長さ R, A, C , ($R > A > C$) なる楕円体が y 軸のまわりに回転するときの付加慣性モーメントは Lamb⁽²⁾ により与えられているが, ここで $C \rightarrow 0$ とすれば求める楕円板の値を定めることができる。

Lamb が与えた形のまま $C \rightarrow 0$ とすれば i が不定となるので, Durand⁽³⁾ が一部変形して解く方法を示している。これらを用いて, (19) に対応する形に整理すると,

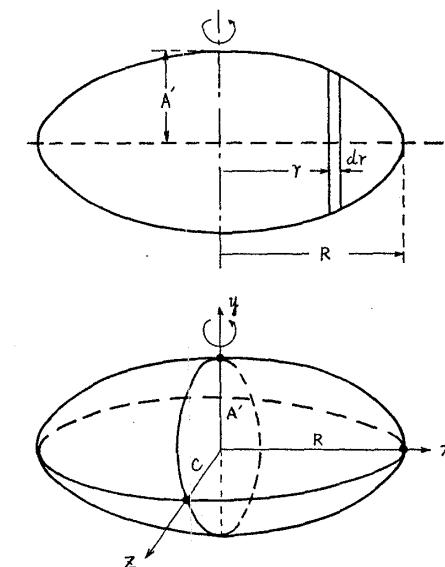
$$\frac{i}{\rho D^5} = \frac{R^2/A'^2 - 1}{(R^2/A'^2 - 2)E(k, \varphi) + F(k, \varphi)} \frac{\pi}{120} \left(\frac{A'}{R} \right)^2 \quad (20)$$

したがって, 3次元補正係数を K' とすれば

$$K' = \frac{R^2/A'^2 - 1}{(R^2/A'^2 - 2)E(k, \varphi) + F(k, \varphi)} \quad (21)$$



第3図 3次元補正係数 K' の値



第2図 次元の取扱い

A'/R	K' (正確)	K' (近似)
0.1	0.999	0.999
0.2	0.950	0.950
0.3	0.896	0.896
0.4	0.838	0.838
0.5	0.776	0.776
0.6	0.711	0.711
0.7	0.643	0.643
0.8	0.573	0.573
0.9	0.501	0.501
1.0	0.428	0.428

ただし

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (22)$$

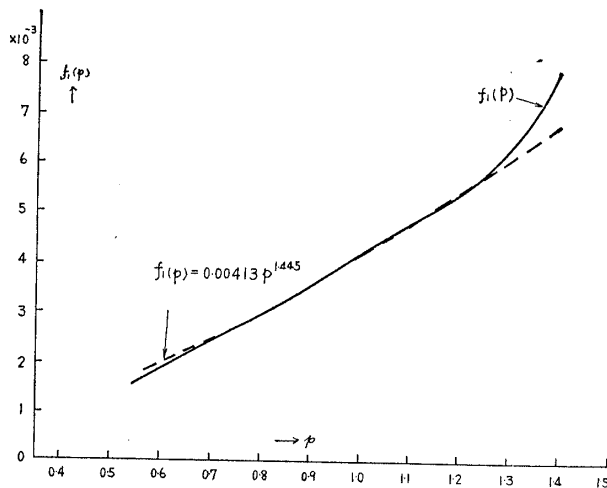
$$F(k, \varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (23)$$

$$k = \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{A'^2}{R^2}} \quad (24)$$

$E(k, \varphi)$ は第二種完全楕円積分, $F(k, \varphi)$ は第一種完全楕円積分である⁽⁴⁾。

高等関数表⁽⁵⁾により $A'/R = 0 \sim 1.0$ に対する K' の値を求めたものが第3図に示してある。推進器翼に対応する値として, $A'/R = 0.1 \sim 0.5$ の範囲で簡単な式で近似すれば

$$K' = 0.61 \left(\frac{A'}{R} \right)^{-0.214} \quad (24)$$

第4図 $f_1(P)$ の値

P	$f_1(P)$ 実験	$f_1(P)$ 理論
0.6	1.90	1.58×10^{-3}
0.8	2.99	3.00
1.0	4.21	4.13
1.2	5.37	5.49
1.4	7.58	6.71

を得る。

一方式 (13) の $f_1(p)$ を $p=0.6 \sim 1.4$ の間で近似すれば第4図に示すごとく、次式で近似される。

$$f_1(p) = 0.00413 p^{1.445} \quad (25)$$

したがって式 (18) は

$$\frac{\Delta I}{\rho D^4} = K \cdot 0.00413 z p^{1.445} \alpha^2 \quad (26)$$

第2図の楕円板の回転の場合の付加モーメントを考える場合軸に近いところの形状はほとんど影響しないので、第2図の短軸 A' を一応第1図の A に対応させて考える。この場合3次元補

正係数は式 (24) より

$$K = 0.61 \alpha^{-0.214} \quad (27)$$

(27) を (26) に代入すれば

$$\frac{\Delta I}{\rho D^5} = 0.00252 z p^{1.445} \alpha^{1.786} \quad (28)$$

を得る。これが理論的に求められた推進器の付加慣性モーメントである。

4 模型実験による確認

式 (28) によつて求められた理論式は、種々の仮定を含んでいるので、これを実際に適用するためには実験によつて確認を行なう必要がある。

(1) α および β についての実験

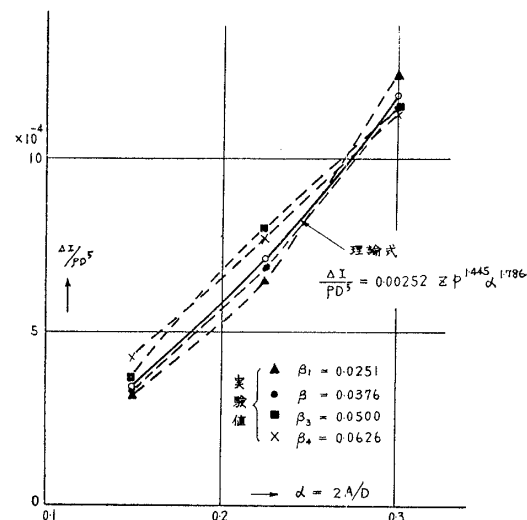
第2表 供試模型推進器 (B 系列)

propeller Series	202 A	202 B	202 C
直径 D (cm)	24.38	24.38	24.38
ピッチ p (cm)	24.38	24.38	24.38
ピッチ比 p/D	1.000	1.000	1.000
最大翼弦 2A (cm)	3.66	5.49	7.32
$\alpha = 2A/D$	0.150	0.225	0.300
根厚 t_r (cm)	113.4	171.4	230.5
根径 d (cm)	97.0	148.2	200.3
ホス直径 d (cm)	6.10	6.10	6.10

Root Thickness の表

propeller Series	Root Thickness 2B (cm)	$\beta = 2B/D$
202 A1, B1, C1	0.610	0.0251
202 A, B, C	0.914	0.0376
202 A3, B3, C3	1.219	0.0500
202 A6, B6, C6	1.524	0.0626

Suffix のない A, B, C は標準系列で、
妥目は上の表に示した。
Suffix 1.3.5 は翼厚のみ変化して他
の妥目は標準系列に同じ。
以上の系列はすべて翼数 $Z=4$ 断面円弧翼



α	理論式 (実験)	β_1	β_2	β_3	β_4
0.150	342	3.24	3.35	3.59	4.39
0.225	710	6.13	6.94	7.75	7.40
0.300	1172	12.1	11.2	11.4	11.3
0.450	—	—	—	—	—

第5図 実験結果 (α の影響)

供試模型推進器の要目は第2表に示すごとく、いずれも直径 24.38 cm ピッチ比 $p=1.000$ のもので α および β が系統的に変化しているもの 12 個である。

実験方法は直径 6 mm 長さ 605 mm の軟鋼棒の上端を固定し、下端に供試推進器をとりつけて振振動数により推進器の慣性モーメントを計測した。

水中における慣性モーメント計測値 I_w より、空気中における慣性モーメント I_a のを引いて付加慣性モーメント ΔI を求める方法をとつたため、有効数字が一桁減じて、多少誤差が大きくなっている。

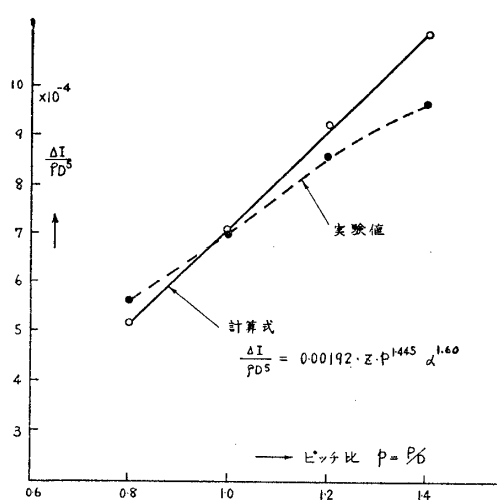
第5図は実験結果を示したものである。理論で推定した通り、翼厚による影響はほとんどなく実験誤差の範囲内であることがわかる。理論式 (28) で計算した結果と比較してみると、よく合っていることがわかる。

実験値をもとに係数、指数を修正して次式を得る。

$$\frac{\Delta I}{\rho D^5} = 0.00192 z p^{1.445} \alpha^{1.60} \quad (29)$$

(2) p についての実験

供試模型推進器の要目は第3表に示すごとくで、 $\alpha=0.225$ 一定で、ピッチ比 p のみ 0.8 から 1.4 に変化した系列のものである。実験結果は第6図に示すごとくである。



第6図 実験結果 (p の影響)

p	実験値	計算値
0.8	5.54 ¹⁰⁻⁴	5.11 ¹⁰⁻⁴
1.0	6.94	7.06
1.2	8.52	9.21
1.4	9.59	11.50

(● 実験) (○ 計算)

第3表 供試模型推進器 (B 系列)

propeller Series	$p = \beta/\alpha$
201 B	0.800
202 B	1.000
203 B	1.200
204 B	1.400

本系列推進器はその要目は 202 B と同じ。ピッチのみ異なるもの。

る。式 (29) に

よる計算結果を図示してあるが、 p の指数は実験結果がかなり理論を下回っていることがわかる。実験結果により p に関する補正を式 (29) に行なえば次式を得る。

$$\frac{\Delta I}{\rho D^5} = 0.00192 z, p, \alpha^{1.60} \quad (30)$$

式 (30) が最終的な付加質量を与える計算式であるが、実際の計算に便ように、 ρ として海水の密度をとつて、 $\rho = \gamma/g = 1026/9.8 = 104.7 \text{ kg/m}^{-4} \text{ sec}^2$ を代入すれば次式を得る。

$$\Delta I = 0.20 z \cdot p \cdot \alpha^{1.60} D^5 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2 \quad (31)$$

$$\text{または } \Delta I = 20 z \cdot p \cdot \alpha^{1.60} D^5 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^2 \quad (32)$$

ただし (32) 式において D は m を用いるものとする。

5 推進器の見掛けの慣性モーメント

軸系の振振動による危険回転数を算出するに当り、推進器部分は見掛けの慣性モーメントを使用する必要がある。推進器自体の慣性モーメントを I とすれば、見掛けの慣性モーメントは (31) 式で算出される付加慣性モーメント ΔI を I に加えて求められる。

$$\text{見掛けの慣性モーメント} = I + \Delta I$$

一般に ΔI は I の 20%~30% として計算されるが、これは非常に危険である。その理由は次の通りである。

(1) ΔI は翼厚の影響をほとんど受けないが、 I は翼厚の影響を直接受ける。したがって翼厚の大きいものほど $\Delta I/I$ は小さくなる。

(2) ΔI はピッチによつて大きく変化するが、 I は翼厚が変らなければ、ピッチによつてそれほど影響を受けない。したがってピッチの大きいものほど $\Delta I/I$ は大きくなる。

今回実験に用いた推進器についての $\Delta I/I$ の値を第4表に示した。これによれば 202 A₄ の 12.3% から 202 C₁ の 44.4% におよんでいる。ピッチの影響が顕著であることも明かである。極端な例として、展開面積、ピッチが大きく、翼厚の小さい場合は 60% を越えることもある。

第4表 $\Delta I/I$ の表 (翼厚の影響)

propeller	$\Delta I/I$ %	propeller	$\Delta I/I$ %	propeller	$\Delta I/I$ %
202 A ₁	23.0	202 B ₁	34.4	202 C ₁	44.4
202 A ₂	18.8	202 B ₂	27.6	202 C ₂	34.5
202 A ₃	15.7	202 B ₃	21.9	202 C ₃	27.8
202 A ₄	12.3	202 B ₄	18.8	202 C ₄	24.6

(ピッチの影響)

propeller	$\Delta I/I$ %
201 B	21.3
202 B	27.2
203 B	33.0
204 B	37.2

6 実船における計測結果

以上の模型による実験は推進器を静水中で小振動させた場合である。実際運転中には推進器に相対的に流れが当るので、静水とは考えられぬが、微小振動については流れの有無は関係しないことが理論的に証明される。この確認のため実船で正確な計測を行なった。

中川海運第一照国丸について計算の結果、推進器の慣性モーメントは $I=1428 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^2$ であり式 (32) で計算した $\Delta I=213 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^2$ であつた。 $\Delta I/I$ は 14.9% と比較的に小さいがこれはピッチが小さいためである。

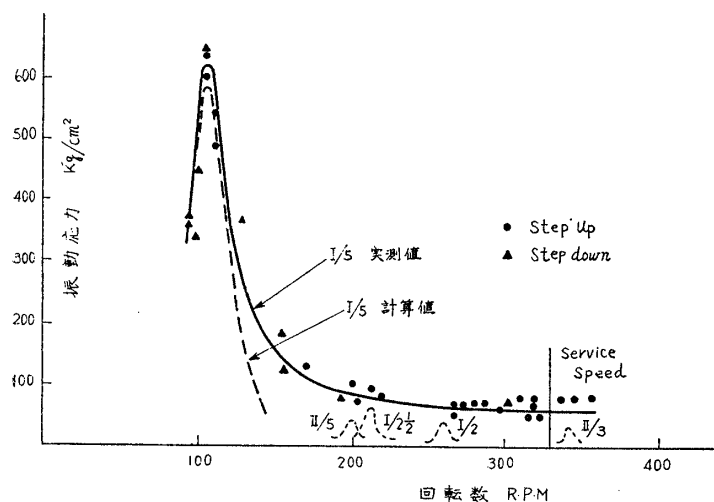
($D=2.00\text{m}$ $\alpha=0.261$ $p=0.71$ $z=4$)

これによる1節5山の危険回転数の計算値が 106.1 r, p, m であつたが実船計測の結果は完全に一致した。計算結果および実測値を第7図に示す。

以降、三菱重工ではこの計算式を用いているが現在までなんら問題を起こしていない。

7 結 言

本研究を進めるに当たり、当時船型試験場におられた現研究所長谷口中博士に懇切なご指導を受けたことを深く感謝する。



第7図 第一照国丸振振動計測結果

引用文献

- (1) L.C.Burill & W.Robson "Virtual mass and moment of inertia of propellers" Trans. N-East coast Inst. Engrs. & Shipbuilders. Vol.78, No.6, 1962.
- (2) Lamb. "Hydrodynamics" Sixth Edd. p.155
- (3) Durand "Acro dynamic Theory" Vol.1 p.301
- (4) 佐々木達治郎「等角写像の応用」富山房, 昭 14.7.18
- (5) 林桂一「高等函数表」

補遺 1. (式) の証明

長軸 a , 短軸 b の楕円柱に長軸方向分速度 U , 短軸方向分速度 V なる流れがあたる場合の複素速度ポテンシャル w_a, w_b は次式で与えられる。(3)

$$w_a = -iUb \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\zeta} \quad (33)$$

$$w_b = -Va \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\zeta} \quad (34)$$

ここに $\zeta = \xi + i\eta$

で ξ, η は楕円座標である。

したがって、長軸 a と θ をなす方向よりの速度 q_0 に対してはその速度成分を U, V とすれば、複素速度ポテンシャル w は次式で与えられる。

$$w = w_a + w_b = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} (Va + iUb) e^{-\zeta} \quad (36)$$

今 ϕ を速度ポテンシャル, ψ を流れの関数とすれば

$$w = \phi + i\psi \quad (37)$$

で表され、

$$\begin{aligned} e^{-\zeta} &= e^{-(\xi + i\eta)} \\ &= e^{-\xi} (\cos \eta - i \sin \eta) \end{aligned} \quad (38)$$

で表されるから (36), (37), (38) より

$$\phi = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\xi} (V a \cos \eta + U b \sin \eta) \quad (39)$$

$$\psi = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\xi} (V a \sin \eta - U b \cos \eta) \quad (40)$$

流体に誘起される運動のエネルギーは一般に

$$T = \frac{1}{2} \rho \iint \phi d\psi \quad (41)$$

で与えられるから, これに ϕ, ψ の値を代入し, 楕円柱の境界 $\xi = \xi_0$ に沿って積分すれば

$$\begin{aligned} 2T &= -\rho \frac{a+b}{a-b} e^{-2\xi_0} \int_0^{2\pi} (V a \cos \eta + U b \sin \eta)^2 d\eta \\ &= \rho \frac{a+b}{a-b} e^{-2\xi_0} \pi (V^2 a^2 + U^2 b^2) \end{aligned} \quad (42)$$

しかるに

$$\begin{aligned} e^{-\xi_0} &= \cosh \xi_0 - \sinh \xi_0 \\ a &= c \cosh \xi_0, \quad a = c \sinh \xi_0, \quad c^2 = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

なる関係があるので

$$e^{-2\xi_0} = (\cosh \xi_0 - \sinh \xi_0)^2 = \frac{a-b}{a+b} \quad (43)$$

となり, (43) を (42) に代入すれば

$$\begin{aligned} 2T &= \rho \pi (b^2 U^2 + a^2 V^2) \\ U &= q_0 \cos \theta, \quad V = q_0 \sin \theta \end{aligned} \quad (44)$$

なる関係を (44) に代入すれば

$$2T = \rho \pi (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) q_0^2 \quad (45)$$

したがって今

$$m = \rho \pi / (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \quad (46)$$

とおけばこれは質量の次元を有し, 流体による付加質量に対応する。

補遺 2. 式 (20) の証明

第2図のごとく3つの主軸長さ R, A', C ($R > A' > C$) なる楕円体の $C \rightarrow 0$ なる極限の場合を考える。

この楕円体が y 軸のまわりに回転するときの付加慣性モーメントは次式で与えられる。(2)

$$i = \frac{4}{15} \rho \pi R A' C \frac{(R^2 - C^2)^2 (r_0 - \alpha_0)}{2(R^2 - C^2) + (R^2 + C^2)(\alpha_0 - r_0)} \quad (47)$$

ただし, α_0, r_0 は次の式で定義される α, r において $\lambda = 0$ とおいた値である。

$$\alpha = R A' C \int_1^\infty \frac{d\lambda}{(R^2 + \lambda) \sqrt{(R^2 + \lambda)(A'^2 + \lambda)(C^2 + \lambda)}} \quad (48)$$

$$r = R A' C \int_1^\infty \frac{d\lambda}{(C^2 + \lambda) \sqrt{(R^2 + \lambda)(A'^2 + \lambda)(C^2 + \lambda)}} \quad (49)$$

このままで $C \rightarrow 0$ とすれば i は不定となるので α, r を次のごとく変形する。(3)

$$\alpha = \frac{2 R A' C}{\sqrt{(R^2 - C^2)^3}} \frac{1}{k^2} [F(k, \varphi) - E(k, \varphi)] \quad (50)$$

$$r = \frac{2 R A' C}{\sqrt{(R^2 - C^2)^3}} \frac{1}{1 - k^2} \left[\sqrt{\frac{(R^2 - C^2)(A'^2 + \lambda)}{(R^2 + \lambda)(C^2 + \lambda)}} - E(k, \varphi) \right] \quad (51)$$

$$k = \sin \alpha = \sqrt{\frac{R^2 - A'^2}{R^2 - C^2}} \quad (52)$$

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{第1種楕円積分} \quad (53)$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad \text{第2種楕円積分} \quad (54)$$

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{R^2 - C^2}{R^2 + \lambda}} \quad (55)$$

いま $C \rightarrow 0$, $\lambda = 0$ とすれば (55) 式により

$$\sin \varphi = 1, \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

したがって (53), (54) で与えられる $F(k, \varphi)$, $E(k, \varphi)$ はいずれも完全楕円積分となる。これをそれぞれ $F(k, \varphi)$, $E(k, \varphi)$ とする。 $C = C_0$ として C_0 を無限小とすれば

$$\alpha_0 = \frac{2A'C_0}{R^2 - A'^2} [F - E] \quad (56)$$

$$r_0 = 2 \left[1 - \frac{C_0}{A}, E \right] \quad (57)$$

また (47) 式は

$$i = \frac{4}{15} \rho \pi R A' C_0 \frac{R^4 (r_0 - \alpha_0)}{2R^2 + R^2 (\alpha_0 - r_0)}$$

となるからこれに (56), (57) を代入すれば

$$i = \frac{4}{15} \rho \pi R^3 A'^2 \left(1 - \frac{C_0}{A'} B \right) \frac{1}{B} \quad (58)$$

(58) 式において $C_0 \rightarrow 0$ とすれば

$$i = \frac{4}{15} \rho \frac{\pi R^3 A'^2}{B} \quad (59)$$

ただし

$$B = \frac{1}{\frac{R^2}{A'^2} - 1} \left[\left(\frac{R^2}{A'^2} - 2 \right) E + F \right] \quad (60)$$

(58) 式を書き直せば

$$\frac{i}{\rho D^5} = \frac{\pi}{120} \left(\frac{A'}{R} \right)^2 \frac{1}{B} \quad (61)$$

(61) 式と (19) 式を比較すれば 3 次元修正係数 K' は

$$K' = \frac{1}{B} = \frac{\frac{R^2}{A'^2} - 1}{\left(\frac{R^2}{A'^2} - 2 \right) E + F} \quad (62)$$