

三元多項式型変位関数による構造設計・強度解析

— 初期構造設計のためのツール —

正員 大 高 慎 自

Three Variable Polynomial Displacement Function Method for Structure Strength Analysis
— A Tool for Primary Structure Strength Design of Ships —

by Shinji Otaka, Member

Summary

This paper proposes Polynomial Displacement Function Method where elements are assumed to strain by a system of displacement functions of polynomial form in 3 variables with enough degrees of freedom to satisfy both equilibrium equations and connect conditions that are required to form a structure model as a ship hull.

This method can calculate strength of structures contain panels, beams, frames, and pillars. It is also applicable to evaluation of elastic buckling stability and to vibration analysis by using the same model. The way of forming structure models is quite intuitive and easy to understand the relations between elements, substructures and their total structure.

In this method, the element-model is developed in three steps. The first step is to enumerate all independent polynomials in 3 variables of 6th order that satisfy local equilibrium equations. A solid elastic body is assumed to deform in the way expressed by linear combination of these polynomial displacement functions. At second, the body is degenerated to a plate, to two-dimensions, with full degrees of freedom in deformation. Lastly, the shape of the elements and connect conditions are determined so as to three-dimensional structures can be built with the elements. In section 2, the calculation of degree-of-freedom and the requirements for structural elements are explained briefly.

In section 3~8, the procedure of strength analysis by this method is shown. As local equilibrium condition is already satisfied in element displacement function, only total energy balance is considered. In section 9, some results by this method are compared with theoretical ones. One three dimensional structure example, a box-beam case, is illustrated and one actual case, a deck-vibration analysis, is presented.

1. 概 要

鋼船は板材から構成される骨とパネルの混交構造である。その設計の初期段階では、構造規則が最も一般に用いられている。FEMも普及してきているが、入力データ作成に手間がかかり設計の初期段階では適当な手法とは言えない。

一方、構造設計者には、部材・部分構造・全体構造へと、これらを互に関連付けて船体構造を理解したいという強い欲求がある。より直感的で手軽に扱える船体構造解析法があれば、設計の合理化、構造様式の多様化に役立つだろう。

そのような構造強度解析手法として、三次元弾性体の平衡条件に基づく多項式型の変位関数を用いた板要素モデルによる構造解析法を提案する。目指したのはラーメン・トラスの自然な発展形である。ラーメン・トラスでは、典型的な荷

重条件について、部材内の平衡条件と接合条件(境界条件)を同時に満たす一般的な解が得られおり、強度的に連続な部材を分割する必要がない。一方、連続体の離散化処理として発達したFEMでは、要素間の接合関係を通じて局所的な平衡条件を扱うため、計算精度が要素分割に依存する。この点で所謂FEMとラーメン・トラスは大きく異なる。

板材の変位を位置座標の多項式で表すとき、二次元弾性体の平衡条件を基礎にすると、構造体を構成するに足る接合自由度、境界における変形自由度、を要素に付与することはできない。ここにFEMの存在理由がある。しかし、三次元弾性体の平衡条件を基礎とすれば、内部平衡条件を満たし、構造化に十分な接合自由度のある板モデルを作ることができる。

一般に、変位の多項式近似が保証されるためには、要素内の任意の点についてテイラー展開された変位が、点の選択に依存せず一意に定まらなければならない。また、低い次数で高い近似精度を得るためには、強度的に異なる要素との接続線の頂点を排除する必要がある。そこで、凸 n 多角形を一辺

について一個の三角要素が対応するように n 個の要素に分け、それぞれに多項式型の変位関数を定義する。ラーメン・トラスでは接合点と要素の端部が一致するが、本手法では平板パネルを辺の数(境界条件の数)の要素に分割することになる。このとき、接続部で充分滑らかに接合するためには変位関数は6次以上でなければならない(2章に記す。)

3~8章では、エネルギーの平衡を中心にして、部材のモデル化、合成および構造化と変位・応力解析、弾性座屈解析、固有振動解析の手続きを示す。9章で、理論値が得られている簡単な計算例について本手法の計算結果と比較し、実用上6次近似で十分なことを示す。さらに、立体構造への適用例として箱型梁の計算結果を、また、実船への応用例として、補強材つき甲板の振動解析結果を記した。

2. 自由度計算と要素モデル

2.1 同次多項式の表現自由度

多項式の表現自由度とは、その式に含まれる独立な係数の数とする。 (x, y) 二元の n 次同次多項式の自由度を $D_2(n)$ 、 (x, y, z) 三元のそれを $D_3(n)$ とする。 $D_2(n)$ および $D_3(n)$ はそれぞれ式(1-a)、式(1-b)のようになる。

$$D_2(n) = n + 1 \quad (1-a)$$

$$D_3(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \sum_{i=0}^n D_2(i) \quad (1-b)$$

2.2 平衡条件式の拘束条件の数

直交座標系 (x, y, z) の各軸方向の変位を (U_i, V_i, W_i) とする。 $i=2$ は二元、 $i=3$ は三元表示の場合を表す。厚さが一様な平板の板厚中央(基準面)に $x-y$ 平面をとる。

二次元弾性体の平衡条件は、面内変位に関する条件の式(2-a)と面外変位に関する条件の式(2-a')の二つに分かれる。

$$\Delta_2 U_2 + \kappa_2 \partial \Theta_2 / \partial x = 0 \quad (2-a)$$

$$\Delta_2 V_2 + \kappa_2 \partial \Theta_2 / \partial y = 0$$

$$\Delta_2^2 W_2 = q / D \quad (2-a')$$

ここで、 $\Delta_2: \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 、 $\Theta_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$ 、 $\kappa_2 = \frac{1+\nu}{1-\nu}$ で q は

基準面に垂直な荷重分布、 D は板の曲げ剛性を表す。

三次元弾性体では式(2-b)が成り立つ。

$$\Delta_3 U_3 + \kappa_3 \partial \Theta_3 / \partial x = 0$$

$$\Delta_3 V_3 + \kappa_3 \partial \Theta_3 / \partial y = 0 \quad (2-b)$$

$$\Delta_3 W_3 + \kappa_3 \partial \Theta_3 / \partial z = 0$$

$$\Delta_3: \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Theta_3 = \frac{\partial U_3}{\partial x} + \frac{\partial V_3}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z}, \quad \kappa_3 = \frac{1}{1-2\nu}$$

これらの条件は、同次の項の係数について閉じた関係となっている。式(2-a)から U_2 と V_2 の n 次項の係数について、 $C_{2-a}(n)$ 個(式(3-a))の独立な拘束式が得られる。

$$C_{2-a}(n) = 2 \times D_2(n-2) \quad (n \geq 2) \quad (3-a)$$

式(2-a')から、 W_2 の n 次項の係数についての独立な拘束式の数は、式(3-a')のように $C_{2-a'}(n)$ 個となる。

$$C_{2-a'}(n) = D_2(n-4) \quad (n \geq 4) \quad (3-a')$$

式(2-b)について、同様に、係数に関する独立な拘束式の個数は $C_3(n)$ 個(式(3-b))となる。

$$C_3(n) = 3 \times D_3(n-2) \quad (n \geq 2) \quad (3-b)$$

2.3 変形自由度

表現自由度から、平衡条件の拘束式の数を引いたものを変形自由度と呼ぶ。 U_2 と V_2 の n 次の項についての変形自由度の和 $F_{2-a}(n)$ は式(4-a)のように、 W_2 の n 次の項についての変形自由度 $F_{2-a'}(n)$ は式(4-a')のようになる。

$$F_{2-a}(n) = 2 \times D_2(n) - C_{2-a}(n) = 4 \quad (4-a)$$

$$F_{2-a'}(n) = D_2(n) - C_{2-a'}(n) = 4 \quad (4-a')$$

U_3 、 V_3 および W_3 の変形自由度 $F_3(n)$ は式(4-b)のようになる。

$$F_3(n) = 3 \times D_3(n) - C_3(n) \\ = 3 \times (D_2(n) + D_2(n-1)) \quad (4-b)$$

これらの変形自由度内で、構造体を構成するための接合条件を定義することができるかを検討する。

2.4 直線境界と要素形状

二元の多項式で変数間に1次の関係があるとき、表現自由度は各次数について1である。つまり、直線を想定し、長さをパラメータとして、多項式を変換すると、各次数の項に係数を一つ設定することができる。三角形の辺では、頂点における連続の(拘束)条件が加わるため、全体として、0次について1、1次で2、2次以上の各次数の項について表現自由度は3となる。この三角形の辺における表現自由度は、多項式の表現自由度に含まれる。四角形以上の多角形について、各辺に表現自由度を与えると、全体として多項式の表現自由度を超えてしまう。従って、多項式型変位関数を用いる場合、要素形状は、一般には、四角形以上の多角形とはなり得ない。

2.5 三次元モデルの二次元化

式(4-a)のとおり、 U_2 と V_2 の変形自由度 $F_{2-a}(n)$ は2次以上の一つの次数について合計4しかない。式(4-a')から、 W_2 の変形自由度 $F_{2-a'}(n)$ も4だが、面外変位量と変位面の傾斜の両方を設定する必要がある。いずれの場合も、二次元弾性体モデルでは、三角板要素に要素内の平衡条件と境界条件(接合条件)とを同時に自由に設定することはできない。

一方、式(4-b)に示すように、三次元弾性体モデルの変位関数 (U_3, V_3, W_3) には、二元 n 次多項式の表現自由度と $n-1$ 次のその合計の変形自由度がある。この変形自由度を三元 n 次多項式における z の0次項の係数と z の1次項の係数へ割り当て、これら以外の項の係数を、これらの項の係数に從属させることができる。ここに、基準面における変位と基準面に垂直方向の変位の一階偏微分が x, y 二元の多項式で表

される板要素モデルが可能となる。

2.6 最低次数と外部境界

n 次の二元多項式で三角要素の変位を表したとする。そのとき変位が隣接要素と弾性体として柔軟に接合するためには、三辺の変位が隣接要素と一致したうに、基準面上で辺と垂直方向の変位の偏微分が自由に設定できる変形自由度がなければならない。あるモードの変位の偏微分は $n-1$ の自由度があるが、三角形の頂点では接続辺の変位が互いに辺と垂直方向の変位の偏微分を拘束しあうため、自由度は $n-3$ となる。 $n=4$ で三辺の自由度は 3 であるが、二辺の条件が決まると他の一辺の状態が決まり、弾性体としての挙動が期待できない。 $n \geq 5$ で三辺における変位の連続性と独立性が得られる。この条件を基準面における変位の z 偏微分に当てはめると、 (U_3, V_3, W_3) は 6 次以上の多項式となる。

変位関数の次数は小さい方が計算上都合良い。一般に、強度が不連続な境界の交点(頂点)での変位は特異性があり、低次多項式近似では精度が望めない。そこで、一つの要素で強度的に不連続な境界線(外部境界)は一本のみとし、そのような点付近の変位を複数の要素で表現することにより変位の特異性を緩和する。以下、最低次数の 6 次で考察する。

2.7 要素モデルと接合条件

接合部の変位条件で、 y についても 0 次と 1 次の項のみを考慮ことにすると、点接合と呼ぶ骨組のための接合形式が定義できる。点接合では接合点の変位について 3、接合点における接合面の傾斜の変化について 2、接合面の法線を軸とする回転について 1 の合計 6 の自由度が拘束される。二次元要素の接合を線接合と呼ぶ。6 次の変位関数の場合、接合線上の全ての点の変位について 21、接合面の接合線を軸とした回転について 6、合計 27 個の拘束式で表現される。接合面の剪断変形についての連続性は要求しない。要素モデルとして、接合点が 2 つの棒要素、長辺 2 本が接合線の板要素(2 短辺の影響は無視する。)、接合線 3 本を持つ三角パネル要素の 3 種類を考える。式(4-b)から 6 次の (U_3, V_3, W_3) の変形自由度は 147 であり、これらの要素モデルの接合条件を設定するのに十分な自由度がある。

3. 変位表現と c 空間

3.1 基本変位関数系と一般変位

互いに独立した 147 個の変位関数の組 (U_3, V_3, W_3) を予め次のように整理しておく。

a) 剛体変位を表す変位関数の組 (6 個) について、

$$\mathbf{F}_a = ((U_{a_i}, V_{a_i}, W_{a_i})_{i=1-6}) \quad (5)$$

b) 歪みを伴う変位関数の組 (141 個) について、

$$\mathbf{F}_b = ((U_{b_i}, V_{b_i}, W_{b_i})_{i=1-141}) \quad (6)$$

$\mathbf{F}_a, \mathbf{F}_b$ は変位関数を要素とする、3 行 6 列および 3 行 141 列のマトリックスである。6 次の係数(列)ベクトル $\mathbf{a}$ と 141 次の係数(列)ベクトル $\mathbf{b}$ を用い、6 次の多項式型変位関数の一般形 $\mathbf{g} = (U, V, W)$ は式(7)のように表現される。

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}_a \mathbf{a} + \mathbf{F}_b \mathbf{b} \quad (7)$$

変位状態は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ により、歪み状態は $\mathbf{b}$ のみにより決まる。

3.2 歪みエネルギーと c 空間

ある要素に対し、 $\mathbf{b}$ が与えられたとき、その要素の歪みエネルギー E_s を式(8)のように表す対称行列 $\mathbf{S}$ が一意に決まる。

$$E_s = \mathbf{b}^T \mathbf{S} \mathbf{b} \quad (8)$$

$\mathbf{S}$ は正值で、その固有値を r_i 、対応する正規固有ベクトルを $\mathbf{v}_i$ とする。 i 行が $(r_i^{1/2})\mathbf{v}_i$ の行列 $\mathbf{M}_b$ を用いて、式(9)のように係数ベクトル $\mathbf{b}$ を $\mathbf{c}$ に変換する。

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}_b \mathbf{b} \quad (9)$$

$\mathbf{c}$ を用いると歪みエネルギー E_s は式(10)のようになる。

$$E_s = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \quad (10)$$

このようにして導かれる $\mathbf{c}$ 空間において、この要素の歪みエネルギーは原点からの距離の二乗に等しくなる。

4. 拡大空間と構造空間

4.1 拡大空間

ある構造体が m 個の要素から構成され、各要素の $\mathbf{c}$ 空間が得られているとする。要素に番号をつけ、その順番の $\mathbf{c}$ 空間の直積を拡大 $\mathbf{c}$ 空間と呼び、その元を $\mathbf{C}$ とする。 $\mathbf{C}$ に対する要素の歪みエネルギーの総和は式(11)のように表される。

$$E_s = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} \quad (11)$$

4.2 構造空間

係数ベクトル $\mathbf{a}$ についても同じ順番で直積をとり拡大 $\mathbf{a}$ 空間を作り、その元を $\mathbf{A}$ とする。固定条件や要素間の接合条件は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ を用い式(12)のように表される。

$$\mathbf{P}_A \cdot \mathbf{A} + \mathbf{P}_C \cdot \mathbf{C} = 0 \quad (12)$$

式(12)の形をした、構造体を構成するための条件全てを満たす空間がこの構造体が成立する空間となる。条件式の中から $\mathbf{P}_A$ が互いに独立な式 $6 \times m$ 個を選ぶ。その $\mathbf{P}_A$ を行とする行列 $\mathbf{M}_A$ と、対応する $\mathbf{P}_C$ を行とする $\mathbf{M}_C$ から、式(13)のように $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ の関係を導くことができる。

$$\mathbf{A} = -\mathbf{M}_A^{-1} \mathbf{M}_C \mathbf{C} = \mathbf{M}_{AC} \mathbf{C} \quad (13)$$

式(13)を残りの式(12)の条件に代入して式(14)の形にする。

$$\mathbf{P}_C^* \cdot \mathbf{C} = 0 \quad (14)$$

このようにして得られた $\mathbf{P}_C^*$ の中から互いに独立なものを選び、それらを行とする行列 $\mathbf{M}$ を作る。すると、構造体が成立する変位の条件を式(15)のように表すことができる。

$$\mathbf{M} \mathbf{C} = 0 \quad (15)$$

式(15)で定義される $\mathbf{C}$ の部分空間を構造空間と呼ぶ。

5. 構造空間への射影マトリックス

5.1 定荷重のする仕事

構造体に定荷重が作用し、構造体に変位($\mathbf{A}, \mathbf{C}$)が生じたとする。その荷重がした仕事 Ω は式(16)のように表される。

$$\Omega = \mathbf{H}_A \cdot \mathbf{A} + \mathbf{H}_C \cdot \mathbf{C} \quad (16)$$

式(16)から式(13)により $\mathbf{A}$ を消去すると式(17)が得られる。

$$\Omega = \mathbf{H}_C^* \cdot \mathbf{C} \quad (17)$$

この構造体に蓄えられている歪みエネルギー $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$ と荷重のした仕事 Ω の差 E_Ω をとると、式(18)のようになる。

$$E_\Omega = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{H}_C^* \cdot \mathbf{C} \quad (18)$$

5.2 平衡点と射影マトリックス

式(18)の E_Ω を $\mathbf{C}$ について微分すると、式(19)が得られる。

$$dE_\Omega = 2(\mathbf{C} - \mathbf{H}_C^*/2) \cdot d\mathbf{C} \quad (19)$$

$\mathbf{C}$ も $d\mathbf{C}$ も構造空間に含まれなければならないから、 $dE_\Omega = 0$ となる平衡点 $\mathbf{C}_e$ は $\mathbf{H}_C^*/2$ から構造空間へ下ろした垂線の足となり、平衡点 $\mathbf{C}_e$ は式(20)のように表される。

$$\mathbf{C}_e = (\mathbf{I} - \mathbf{M}^T(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{M}) \mathbf{H}_C^*/2 \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は拡大 $\mathbf{c}$ 空間の単位行列を表す。構造空間への射影マトリックス $\mathbf{L}$ を式(21)のように定義する。

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^T(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{M} \quad (21)$$

$\mathbf{L}$ は、要素の接合関係と構造の固定条件を表す $\mathbf{M}$ (式(15)参照)のみに依存する行列である。

6. 要素の合成

要素1、要素2があり、それぞれの $\mathbf{c}$ 空間の元を $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ とする。接合条件が式(22)のように整理され、 $\mathbf{m}_2$ の行は互いに独立とする。要素2に変位0の条件を設定するときは $\mathbf{m}_1$ 内の対応する行は零ベクトルとなる。

$$\mathbf{m}_2 \mathbf{c}_2 = \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_1 \quad (22)$$

式(22)を変形して、 $\mathbf{c}_1$ から $\mathbf{c}_2$ を求める式(23)が得られる。

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{m}_2^{-T}(\mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2^T)^{-1} \mathbf{m}_1 \mathbf{c}_1 = \mathbf{m}_{21} \mathbf{c}_1 \quad (23)$$

要素1、2の歪みエネルギーの和 E_{12} は式(24)のようになる。

$$\begin{aligned} E_{12} &= \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 \\ &= \mathbf{c}_1^T (\mathbf{I}_c + \mathbf{m}_{21}^T \mathbf{m}_{21}) \mathbf{c}_1 \end{aligned} \quad (24)$$

$\mathbf{I}_c$ は $\mathbf{c}$ 空間の単位行列を表す。このようにして、要素2を要素1に従属させ単一要素として扱うことができる。

構造体の接合関係がツリー構造をしているとする。このとき、接合線の位置や本数に関する制限を緩和した簡略モデルを作り、枝から順次この合成を行うと、この構造体全体の構造強度性能を、幹となる部材にまとめることができる。

例えば、甲板、隔壁、船体外板等の補強材付きのパネルのような多数の補強部材を持つ構造を、この合成により、単一要素として扱え、計算手順が見通しのよいものとなる。

7. 弾性座屈

ある構造体に荷重が加わり、その平衡状態($\mathbf{A}_e, \mathbf{C}_e$)が既知とする。そのとき要素ごとに基準面(線)にそった平面応力(軸力) $\mathbf{f}(\mathbf{f})$ は $\mathbf{C}_e$ を用いて式(25)の形に書くことができる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}_e \cdot \mathbf{C}_e \quad (\mathbf{f} = \mathbf{P}_e \cdot \mathbf{C}_e) \quad (25)$$

変位状態の微小変化($\mathbf{A}_e + \delta\mathbf{A}, \mathbf{C}_e + \delta\mathbf{C}$)を考える。このとき $\delta\mathbf{A} = \mathbf{M}_{AC} \delta\mathbf{C}$ が成り立ち(式(13)参照)、基準面(線)上の点の面(軸)と垂直方向の変位の変化分 $d(\mathbf{d})$ は $\delta\mathbf{C}$ を用いて式(26)の形に書ける係数ベクトル $\mathbf{P}_{\delta C}$ が定まる。

$$\mathbf{d} = \mathbf{P}_{\delta C} \cdot \delta\mathbf{C} \quad (\mathbf{d} = \mathbf{P}_{\delta C} \cdot \delta\mathbf{C}) \quad (26)$$

式(25)の力と式(26)のレバーから定義されるモーメント $d\mathbf{f}$ も $\delta\mathbf{C}$ の1次式として式(27)が得られる。

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P}_{\delta C} \cdot \delta\mathbf{C} \quad (27)$$

基準面(線)の曲げ変形の変化分 $\delta\mathbf{r}$ もやはり $\delta\mathbf{C}$ の1次式として式(28)のように表される。

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{Q}_{\delta C} \cdot \delta\mathbf{C} \quad (28)$$

式(28)の変形 $\delta\mathbf{r}$ が生じたとき、 $d\mathbf{f}$ のした仕事 Ω_{df} は対称の行列 $\mathbf{M}_{\delta C}$ を用いて式(29)のように表される。

$$\Omega_{df} = \delta\mathbf{C}^T \mathbf{M}_{\delta C} \delta\mathbf{C} \quad (29)$$

このとき歪みエネルギーの増分と Ω_{df} の差 δE は式(30)となる。

$$\delta E = \delta\mathbf{C} \cdot \delta\mathbf{C} - \delta\mathbf{C}^T \mathbf{M}_{\delta C} \delta\mathbf{C} \quad (30)$$

$\delta\mathbf{C}$ も構造体が成立するための条件の式(15)を満足しなければならないから、構造空間への射影マトリックス $\mathbf{L}$ を用いて式(31)により $\mathbf{M}_{L\delta C}$ を作る。

$$\mathbf{M}_{L\delta C} = \mathbf{L}^T \mathbf{M}_{\delta C} \mathbf{L} \quad (31)$$

対称行列 $\mathbf{M}_{L\delta C}$ の固有値は必ずしも正とは限らない。この固有値が1以上のとき座屈が生じ、その座屈パターンは固有ベクトルで表現される。固有値が負の場合は安定となる。正の最大の固有値の逆数が弾性座屈の安全率である。この方法は座屈パターンを事前に指定する必要がなく、解析された面内応力条件についての座屈が扱えるという利点がある。

8. 固有振動

ある構造体について($\mathbf{A}, \mathbf{C}$)が時間変化すると考える。その時間微分を($\mathbf{A}', \mathbf{C}'$)とする。このとき、構造体の任意の点の速度 $\mathbf{V}_s$ は式(32)の形に表現できる。

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{P}_A \cdot \mathbf{A}' + \mathbf{P}_C \cdot \mathbf{C}' \quad (32)$$

各点の速度の二乗に密度をかけ、構造体について積分し1/2倍すると運動エネルギー E_k が式(33)の形で求められる。

$$\begin{aligned} E_k &= \mathbf{A}'^T \mathbf{M}_A \mathbf{A}' + \mathbf{A}'^T \mathbf{M}_{AC} \mathbf{C}' \\ &\quad + \mathbf{C}'^T \mathbf{M}_C \mathbf{C}' \end{aligned} \quad (33)$$

($\mathbf{A}', \mathbf{C}'$)についても式(13)から $\mathbf{A}' = \mathbf{M}_{AC} \mathbf{C}'$ が成り立ち、運動エネルギー E_k は対称行列 $\mathbf{M}_k$ を用いて式(34)のように表せる。

$$E_k = C'^T M_k C' \tag{34}$$

自由振動について歪みエネルギーと運動エネルギーの和について式(35)が成立する。

$$E_s + E_k = C \cdot C + C'^T M_k C' = \text{一定} \tag{35}$$

C'にも式(15)の制約があるので、 M_k に構造空間への射影マトリックス L をほどこし M_{LK} を作る。

$$M_{LK} = L^T M_k L \tag{36}$$

M_{LK} の固有値を $R_{(Kj)}$ から固有振動数 f_{nj} は式(37)となる。

$$f_{nj} = 1 / \left(2\pi R_{(Kj)}^{1/2} \right) \tag{37}$$

振動の変位パターンは固有ベクトルで表現される。また、「7. 弾性座屈」の M_{sc} を考慮すれば、面内応力の固有振動への影響を求めることができる。

9. 計算例

以下の本手法による計算例を示す。部材は鋼とし、ヤング率 2.1×10^{11} [Pa]、ポアソン比 0.3、密度 7.9 [g/cm³]とした。

9.1 矩形断面梁

A材: 0.01 [m] $\times$ 0.01 [m]、B材: 0.05 [m] $\times$ 0.005 [m] (縦 $\times$ 横)の断面を持つ長さ 1.00 [m]の梁に下記荷重を加えたとき、本手法で計算した最大変位を表1のイに示す。

荷重(a)：片端固定梁の自由端にモーメント 1.00 [Nm]

荷重(b)：片端固定梁の自由端、両端固定梁の長さ中央に単位荷重 1.00 [N]

荷重(c)：全長にわたって一様分布荷重 1.00 [N/m]

荷重(d)：固定端からの距離 x の点に x [N/m]の分布荷重
片端固定梁は単一要素、両端固定梁は二要素とした。

Table.1 Maximum Deflection of Beams

部材/支持/ 単位	荷 重	イ 本方法	ロ 梁理論	ハ 剪断修正	ニ イ+ロ	ホ:イ(ロ+ ハ)
A/ 片端 固定/ 100 μ m	(a)	28.5812	28.5714	0	1.00034	1.00034
	(b)	19.0484	19.0476	0.00124	1.00004	0.99998
	(c)	7.14251	7.14286	0.00062	0.99995	0.99986
	(d)	5.23811	5.23810	0.00041	1.00000	0.99992
B/ 片端/ 10 μ m	(a)	4.57146	4.57143	0	1.00001	1.00001
	(b)	3.05389	3.04762	0.00495	1.00206	1.00043
	(c)	1.14598	1.14286	0.00248	1.00273	1.00056
	(d)	0.88402	0.83810	0.00165	1.00249	1.00052
A/ 両固定/ 10 μ m	(b)	2.98154	2.97619	0.00310	1.00180	1.00076
	(c)	1.49086	1.48810	0.01548	1.00185	1.00081
	(d)	0.74914	0.74774	0.00671	1.00187	1.00097
B/ 両固定/ 0.1 μ m	(b)	4.89260	4.76190	0.12381	1.02745	1.00141
	(c)	2.44162	2.38095	0.06190	1.02548	0.99950
	(d)	1.22712	1.19638	0.02683	1.02569	1.00320

Table.1 中、ロは梁理論の値で、「ハ剪断修正」は剪断力が断面に一樣に作用したときの剪断変位量である。A材では

本方法の値と梁理論の値はよく一致し、剪断変位が影響するB材では剪断修正後の値に近くなっている。

つぎに、A材の座屈強度と横振動の固有振動数について、本方法の結果と理論値とを Table.2 に表す。

Table.2. Buckling Load [N] and Natural Frequency[1/s] of Beams

項目	A:本方法		B:理論値	A/B
片端固定梁座屈強度	431.760		431.795	0.999919
両端固定梁座屈強度	6901.34		6908.72	0.998932
片端固定梁 固有振動数	1 次	8.32781	8.32776	1.00001
	2 次	52.170	52.1929	0.99957
	3 次	149.604 (145.983)	146.156	1.02359 (0.99882)
両端固定梁 固有振動数	1 次	52.9508	52.9966	0.99914
	2 次	145.844	146.082	0.99837
	3 次	285.655	286.415	0.99735

片端固定梁の3次の振動では誤差が2.4%となったが、長さ中央で分割した二要素モデルを用いると、表中()内の値のように理論値との誤差が0.12%と改善される。

9.2 組立梁と合成梁

要素の合成の例として、複数要素の組立て梁の場合と合成単一部材とした場合を比較する。

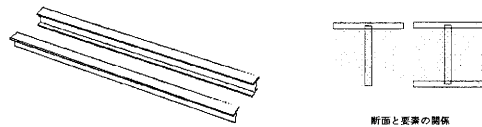


Fig.1 Assembled Beams(T-section, I-section)

Fig.1のように、 0.05 [m] $\times$ 0.005 [m] $\times$ 1.00 [m]の板材二枚を接続したT断面梁と、三枚を用いた工断面の片端固定梁について、全長にわたり 1.00 [N/m]の一樣な垂直荷重が作用したときの自由端の変位を求めた。Table.3 中 Aは複数板要素のまま、Bは合成して単一要素化した場合の計算結果である。両者とも梁理論と良い一致を見せている。

Table.3. Deflection of Assembled Beams

部材	A [μ m]	B [μ m]	C:梁理論	A/C	B/C
T断面梁	4.56381	4.55927	4.55322	1.0023	1.0013
工断面梁	1.62654	1.65203	1.63626	0.9941	1.0096

9.3 矩形板

0.001 [m] $\times$ 1.00 [m] (板厚 $\times$ 幅)で長さが 1.00 [m]、 1.50 [m]、 2.00 [m]の板材に一樣な垂直荷重 1.00 [Pa]が作用したとき、板中央の変位につき本方法の値と薄板理論の値を比較した。境界条件は四辺支持と四辺固定の二通りとした。それらの結果を Table.4 に示す。

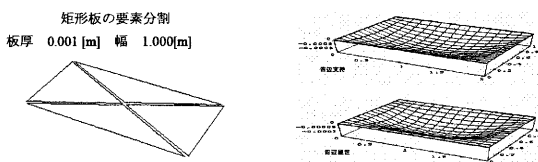


Fig.2. Elements for Rectangular Plate Fig.3. Deflection for Uniform Load

Fig. 2 はモデルの要素割りを、Fig. 3 上は四辺支持の場合の

変位パターンを、下は四辺固定の場合を表す。どの場合についても、両方法の計算結果はよく一致している。

Table.4. Deflection at center [$\times 10^{-4}$ m].

支持条件	長[m]	A:本方法	B:理論値	A/B
四辺支持	1.00	2.11291	2.11	1.001
	1.50	4.01865	4.018	1.000
	2.00	5.27225	5.268	1.001
四辺固定	1.00	0.65718	0.658	0.999
	1.50	1.14359	1.143	1.001
	2.00	1.32372	1.318	1.004

長さ 1.50[m] の場合について、Fig.4 分割パターンのように要素形状を変えて板中央部の変位を比較した。

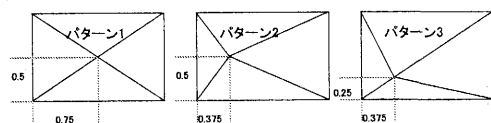


Fig.4. Patterns of Element Division

荷重はどの分割パターンも同じ 1.00[Pa] の一様荷重とした。

Table.5. Influence of Dividing Pattern

支持形式	A:パターン1	B:パターン2 (B/A)	C:パターン3 (C/A)
四辺支持	4.01865	4.01895 (1.00007)	4.01923 (1.00498)
四辺固定	1.14359	1.14928 (1.00014)	1.12962 (0.9878)

結果は Table.5 のとおり、本手法では異なる分割パターンでも安定した結果が得られることがわかる。

板の長手方向に様な圧縮力に対する座屈強度について、本手法と薄板理論との比較を Table.6 に示す。

Table.6 Buckling Load of Rectangular Plates [N/m]

支持条件	長[m]	A:本方法	B:理論値	A/B
四辺支持	1.00	759.170	759.2	1.000
	1.40	848.422	848.4	1.000
	1.60	797.825	795.3	1.003
	2.00	759.388	759.2	1.000
四辺固定	1.00	1918.70	1913	1.003
	1.50	1706.58 (1586.94)	1575	1.084 (1.008)
	2.00	1672.83 (1497.16)	1494	1.120 (1.002)

四辺固定、長さ 1.50[m] と 2.00[m] について誤差が 10% 前後になった。これは、一要素内での変位の高次成分が大きいため、矩形板を長さ中央で二分し、それぞれを 4 分割した要素にすると () 内の値のように理論値とよく一致した。

Table.7 Natural Frequency of Rectangular Plates (1st order) [Hz]

支持条件	長[m]	A:本方法	B:理論値	A/B
四辺支持	1.00	4.902	4.90156	1.000
	1.50	3.54001	3.54002	1.000
	2.00	3.06348	3.06348	1.000
四辺固定	1.00	8.9558	8.921	1.004
	1.50	6.71862	6.690	1.004
	2.00	6.11570	6.176	0.990

面外固有振動についての本方法 (4 要素分割) と薄板理論による計算結果は Table.7 のようによく一致している。

9.4 門型骨組構造

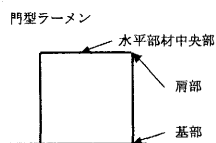


Fig.4. Portal-Rigid-Frame

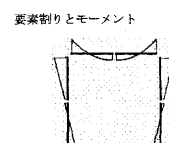


Fig.5. Elements of P.R.F

0.01[m] $\times$ 0.01[m] $\times$ 1.00[m] の角材 3 本を用いて Fig.4 のような門型骨組みをつくり、水平材に下方向に一様荷重 1.00[N/m] をくわえたとき、水平部材の中央、門の肩部および基部の曲げモーメントを Fig.5 の要素分割により求め、ラーメンによる値と比較した (Tabl.8)。

Tabl.8. Moment of P.R.F [$\times 10^{-2}$ Nm]

部位	A:本方法	B:理論値	A/B
水平部材中央部	7.01092	6.94444	1.00957
肩部	5.59146	5.55556	1.0065
基部	2.78379	2.77778	1.0022

本方法の値は、従来の方法と良い一致を示している。

9.5 箱型梁

長さ 2.00[m]、巾 1.00[m]、深さ 0.30[m]、板厚 0.01[m] の両端が開いている箱が一端で固定されている。この箱型梁の両垂直板の上下辺に 0.25[N/m] 一様荷重が加わっている場合をケース 1 とする。上下の水平部材に 0.50[Pa] の一様荷重がかかった場合をケース 2 とする。この荷重的に同等な二つの場合について Fig.6 のように要素分割をして点 A の変位を求め、有効幅を考慮した梁との比較をした (Table.9)。

Table.9 Deflection of Box Beam [10^{-7} m]

状態	ケース 1.	ケース 2.	有効巾付梁
変位	2.607	2.635	2.61

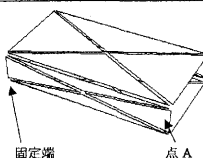


Fig.6. Elements of Box Beam

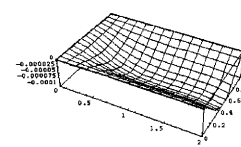


Fig.7. Deflection of Horizontal Member

次にケース 2 の荷重条件で、垂直材の巾を 0.3 から、0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8[m] としたときの、水平部材の中心線の変位と自由端の変位を Fig.8 と Fig.9 に示す。参考として、三辺支持と、一固定端と二辺支持そして三辺固定の条件で同じ荷重、寸法の板の変位を併記する。

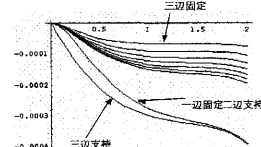


Fig.8 Deflection of Center Line

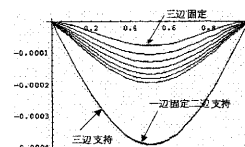


Fig.9 Deflection of free end side

垂直部材巾が増大すると梁全体の剛性が増すが、垂直部材の曲げ剛性が低下し、その結果、水平部材のたわみ量が増加するのが観察できる。

9.1～5 から、本方法は任意のパネル・骨の混交立体組立構造体に有効に適用できると考えられる。

9.6 実船への応用例（甲板振動）

試運転時に後部甲板に強度の振動が観測された例がある。甲板構造の概略を Fig.10 に示す。

振動は出力が 75% と 100% のとき記録され、そのときの翼周波数は、それぞれ 35.49Hz、39.05Hz であった。

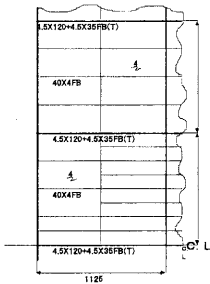


Fig.10. Deck Structure

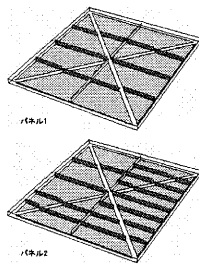


Fig.11. Elements for D.S.

40×4 (FB) の補強材で囲まれた小さなパネルの固有振動数は高く、共振しない。次にトランサム、特設梁、ガーダーで囲まれる補強パネル(1.000[m] × 1.125[m]) (Fig.11 上をパネル1、下をパネル2とする。)を Fig.11 のように4分割して最低次の固有振動数を求めた。補強材は甲板材と合成して扱い、次の二つの支持条件について計算を行った。

支持条件1：四辺支持(辺上では面外変位も面内変位も

拘束するが接合面の回転は自由)、

支持条件2：トランサムとの接合部で固定し(この辺のみ補強材がブラケットで固定されている。)

他の辺は支持

補強パネルの固有振動の下限は支持条件1で得られる。支持条件2でトランサムでの固定は高めの固有振動数、他の辺についての接合面回転自由という条件は低めの固有振動数となる条件だが、長辺固定はきつい条件であるため、実際の固有振動数は支持条件2の場合より小さいだろうと予想される。計算結果を Table.10 に示す。

Table.10. Natural Frequency of Deck Panel [Hz]

	パネル1	パネル2
支持条件1	61.05	65.80
支持条件2	81.42	88.13

この船舶の後部甲板の振動は、特設梁(トランサム)とガーダーに囲まれた補強パネルが二次の翼周波数(出力75%のとき70.98Hz、100%のときの78.09Hz)に共振したために起こったと考えられる。

この補強板の等間隔に設置されている縦補強材(3本)の板幅を40[mm]から70[mm]に増加し、他の補強材を廃したと

する。このときのパネルの固有振動数を四辺支持の条件で計算すると、補強材で囲まれた小さなパネルについて133.63Hz、補強パネル全体では87.76Hzとなった。実際の支持条件では固有振動数はこれらの値より高く、二次の翼周波数の共振領域をはずれるだろう。上記のように部材寸法を変更して、不要な部材を省略すると、鋼材使用量を変更することなく、プロペラ起振力との共振を避けることができるだけでなく、工数も減らすことができる。

9. まとめ

構造の本質的な部分は、要素の接合(結合)関係にあるという観点から、骨組み構造モデルの発展形としてパネルを含む構造体の強度解析の手法を考察した。このとき、変位が多項式で表される弾性体の変形自由度と構造体が構成されるための接合条件が整合性を持つよう要素モデルを設計した。

その過程で、多項式型変位関数を用いる場合の大域板要素モデルの限界および最少分割、あるいは最大要素モデル、の条件を明らかにした。

本手法では、構造体の変形を、平衡条件を満たす多項式型変位関数系に基づく空間の点として表現している。そのため、応力・変位の解析と同一の計算モデルを用いて弾性座屈や固有振動の解析もでき、構造設計を統一的に行うことができる。

「9. 計算例」では理論値と比較できる例をいくつか示した。その際、誤差を見やすくするため変則的な桁表記とした。最低次の6次多項式型変位関数で有効数字2桁程度の精度の解析結果が期待でき、実用上有効であることを確認した。

この手法が構造デザインの現場で用いられ、機能要件に基づく設計や、自由な構造様式の設計が行われるようになり、船体構造設計技術の進展に役立つことを期待する。

参考文献

- 1) 山本：「弾性・塑性」朝倉出版
- 2) 鷲津：「エネルギー原理入門」培風館
- 3) 風間、北山、川井：新しい離散化解析法の実用化に関する研究(I)～(IV)、計算工学会計算工学講演会論文集 Vol.4 pp147-152、Vol.5 pp431-434
- 4) 北山、藤井、風間、鈴木、大坪、川井：応力及び変位の連続性を考慮したノードレス法に関する研究、日本機械学会第14回計算力学講演会論文集 pp399-400
- 5) S.P.チモシェンコ：「材料力学史」鹿島研究出版会
- 6) A.ゾンマーフェルト：「変形体の力学」講談社
- 7) 関西造船協会：「造船設計便覧」海文堂