

(昭和55年11月 日本造船学会秋季講演会において講演)

# 波浪中の船体に誘起される非線形応力極大値 の確率分布

正員 福 田 淳 一\*    正員 新 開 明 二\*  
正員 佃    洋 孝\*\*

On the Statistical Distribution of the Maxima of Non-Linear  
Stress Induced on the Ship Hull in Sea Waves

by Jun-ichi Fukuda, *Member*    Akiji Shinkai, *Member*  
Hiroyuki Tsukuda, *Member*

## Summary

The useful method is proposed for calculation of the statistical distribution of the maxima of non-linear stress such as the von Mises' equivalent stress induced on the longitudinal member of a ship hull in sea waves. This method is based upon an assumption that the wave normal stress and the wave shearing stress which produce the equivalent stress would be regarded as completely dependent variables and upon another assumption that those stresses would be regarded as completely independent variables.

The application of this method is made for a gigantic oil tanker in a short-term seaway and the calculated results of the statistical distribution of the maxima of equivalent stress induced on the longitudinal member have been examined in comparison with the histograms obtained from the numerically simulated time histories of equivalent stress. Satisfactory agreement is found between both results and the validity of the proposed method is recognized.

## 1 緒 言

船体縦強度の安全性を検討してその設計基準を設定するためには、縦強度部材に誘起される波浪による合成全直応力と合成全剪断応力ならびに静水中の直応力と剪断応力の組合せ応力である相当応力の異常値を推定する必要がある。著者らは、先に、波浪による合成全直応力と合成全剪断応力間の相関が完全相関であると仮定した場合について von Mises の相当応力の短期および長期予測値を比較的簡単に計算する方法を提示した<sup>1)</sup>。

本論文では、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力間の相関が完全相関であると仮定した場合および無相関であると仮定した場合について von Mises の相当応力の極大値確率分布を理論的に計算する方法を提案している。このような非線形相当応力は、一般に2確率変数の2次関数として表わされる確率変数であるので、その

極大値の確率分布計算はかなり困難である。この方面の研究は少ないが、Lin<sup>2,3)</sup>が Rice<sup>4)</sup>の理論に基づいて、

1 確率変数の2次関数として表わされる非線形応答の極大値確率分布を計算しており、また、Vinjeら<sup>5,6,7)</sup>は確率密度関数の漸近級数展開に基づいて、多変数2次の非線形応答の極大値確率分布を計算している。本論文においては、Lin<sup>2,3)</sup>の方法を適用して、まず、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力間の相関が完全相関であると仮定した場合について相当応力極大値確率分布を示し、次に、この方法を拡張して、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力間の相関が無相関であると仮定した場合についても相当応力極大値確率分布計算法を導いている。これらの計算法を適用して、短期不規則波中の船体縦強度部材に誘起される相当応力の極大値確率分布計算例を示し、また、計算法の有効性と実用性を検証するために電算機によるシミュレーション数値実験を実施して検討した結果を示している。本論文で提案した相当応力極大値確率分布計算法を用いれば、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力間の相関が完全相関あるいは無

\* 九州大学工学部

\*\* 日本鋼管(株)船舶本部船舶設計部(研究当時 九州大学大学院工学研究科)

相関であると仮定した場合の相当応力の短期および長期予測が可能である。

## 2 非線形応答の極大値確率分布

船体縦強度部材に誘起される直応力と剪断応力を用いて、von Misesの降伏条件に基づいて定義される相当応力は次式によって与えられる。

$$Y = \{(\sigma_T + \sigma_0)^2 + 3(\tau_T + \tau_0)^2\}^{1/2} \quad (1)$$

ただし、

$Y$ : equivalent stress

$\sigma_T, \tau_T$ : total wave normal stress and total wave shearing stress

$\sigma_0, \tau_0$ : still water normal stress and still water shearing stress

(1) で与えられる相当応力は、合成全波浪直応力  $\sigma_T$  と合成全波浪剪断応力  $\tau_T$  の2確率変数を入力に持つ非線形応答であり、その自乗をとって一般に次のような形で書き表わすことができる。

$$Z = Y^2 = aX_1^2 + bX_2^2 + cX_1 + dX_2 + e \quad (2)$$

ここで、 $X_1$  および  $X_2$  は平均値零の定常ガウス過程であり、かつ狭帯域であると仮定する。係数  $a, b, c, d$  および  $e$  は任意定数である。以下、(2) で表わされる非線形応答の極大値を、 $X_1$  と  $X_2$  が完全相関の関係にある場合と無相関の関係にある場合について検討する。

### 2.1 2 確率変数間の相関が完全相関の場合

確率変数  $X_1$  と  $X_2$  が完全相関の関係にある場合には、 $X_1$  と  $X_2$  の相関の関係を用いて2変数を含む(2)を1変数の形に変形して、次式で与えられる非線形応答  $S$  の極大値確率分布を考えればよい。

$$S = AX_1^2 + BX_1 \quad (3)$$

ただし、

$$S = Z - e$$

$$A = a + b\rho^2, \quad B = c + d\rho$$

$$\rho = \pm R_{X_2}/R_{X_1} \text{ for } \rho = \pm 1$$

$R_{X_1}, R_{X_2}$ : standard deviations of  $X_1$  and  $X_2$

$\rho$ : correlation coefficient between  $X_1$  and  $X_2$

(3) で表わされる非線形応答の厳密な極大値確率分布が  $\text{Lin}^{2,3)}$  によって導かれている。以下に、 $\text{Lin}$  の方法に基づいてその計算法を説明する。

$A > 0$  かつ  $B \geq 0$  の場合について述べるが他の場合についても同様の結果が得られる。

ある正の一定値  $s$  よりも大きい  $S$  の極大値即ち正の極大値の単位時間あたりの期待数は、Rice<sup>4)</sup> によって示された方法で計算できる。即ち、レベル  $s$  よりも大きい極大値の単位時間の期待数は  $S$  が正 (または負) の傾きでレベル  $s$  を横切る単位時間の期待数に等しいと見なされ、次式によって与えられる。

$$M_+(s) = \int_0^\infty \dot{s} p_{S\dot{s}}(s, \dot{s}) d\dot{s} \quad s \geq 0 \quad (4)$$

ただし、

$M_+(s)$ : expected number of maxima which are larger than  $s$  (positive) during a unit time

$p_{S\dot{s}}(s, \dot{s})$ : joint probability density function of  $S$  and  $\dot{S}$  for ( $S=s, \dot{S}=\dot{s}$ )

$\dot{S} = dS/dt$ ,  $t$ : time

$p_{S\dot{s}}(s, \dot{s})$  は  $S$  とその1階時間導関数  $\dot{S}$  の同時確率密度関数であって、次式で与えられる。

$$p_{S\dot{s}}(s, \dot{s}) = (4As + B^2)^{-1} \times \left\{ p_{X_1\dot{X}_1}\left(\alpha_1, \frac{\dot{s}}{|2A\alpha_1 + B|}\right) + p_{X_1\dot{X}_1}\left(\alpha_2, \frac{\dot{s}}{|2A\alpha_2 + B|}\right) \right\} \quad (5)$$

ただし、

$p_{X_1\dot{X}_1}(x_1, \dot{x}_1)$ : joint probability density function of  $X_1$  and  $\dot{X}_1$  for ( $X_1=x_1, \dot{X}_1=\dot{x}_1$ )

$\dot{X}_1 = dX_1/dt$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{aligned} \right\} = (-B \mp \sqrt{B^2 + 4As})/2A$$

$X_1$  とその1階時間導関数  $\dot{X}_1$  は、仮定により平均値零の定常ガウス過程である。従って、その同時確率密度関数は次式で与えられる。

$$p_{X_1\dot{X}_1}(x_1, \dot{x}_1) = (2\pi R_{X_1} R_{\dot{X}_1})^{-1} \times \exp[-x_1^2/2R_{X_1}^2 - \dot{x}_1^2/2R_{\dot{X}_1}^2] \quad (6)$$

ただし、

$R_{\dot{X}_1}$ : standard deviation of  $\dot{X}_1$

従って、(4) より次の結果が得られる。

$$M_+(s) = (2\pi R_{X_1})^{-1} R_{\dot{X}_1} \{ \exp[-\alpha_1^2/2R_{X_1}^2] + \exp[-\alpha_2^2/2R_{X_1}^2] \} : s \geq 0 \quad (7)$$

次に、 $S$  の負の極大値について考える。負のある一定値  $s$  よりも大きい負の極大値の発生回数、 $-B/A$  よりも大きく  $\alpha_1$  よりも小さい  $X_1$  の極小値の発生回数に等しい。また、 $p_{X_1\dot{X}_1}(x_1, \dot{x}_1)$  は  $x_1$  の偶関数であって、 $X_1$  の正の値と負の値は等しく分布している。これらを考慮して、負のある一定値  $s$  よりも大きい  $S$  の負の極大値の単位時間の期待数は次式で与えられる。

$M_-(s) =$  区間  $[-B/A, \alpha_1]$  における  $X_1$  の極小値の期待数

$=$  区間  $[-\alpha_1, B/A]$  における  $X_1$  の極大値の期待数

$$= \int_0^\infty \dot{x}_1 p_{X_1\dot{X}_1}(-\alpha_1, \dot{x}_1) d\dot{x}_1$$

$$- \int_0^\infty \dot{x}_1 p_{X_1\dot{X}_1}(B/A, \dot{x}_1) d\dot{x}_1$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi R_{X_1})^{-1} R_{\dot{X}_1} \{ \exp[-\alpha_1^2/2R_{X_1}^2] \\
&\quad - \exp[-B^2/2A^2R_{X_1}^2] \} \\
&\quad : -B^2/4A \leq s < 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

さて、(7)において $s=0$ とすれば $S$ の正の極大値の単位時間の期待総数 $M_+(0)$ が求められる。また、(8)において $s$ が $S$ の最小限界値 $-B^2/4A$ に等しいとすれば、 $S$ の負の極大値の単位時間の期待総数 $M_-(-B^2/4A)$ が求められる。従って、 $S$ の正および負の極大値の単位時間の期待総数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
M_T &= M_+(0) + M_-(-B^2/4A) \\
&= (2\pi R_{X_1})^{-1} R_{\dot{X}_1} \{ 1 + \exp[-B^2/8A^2R_{X_1}^2] \} \quad (9)
\end{aligned}$$

以上のことから、 $S$ の極大値がある一定値 $s$ を超える確率が次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
q(S_{\max} > s) &= \begin{cases} M_+(s)/M_T & : s \geq 0 \\ \{M_+(0) + M_-(s)\}/M_T & : -B^2/4A \leq s < 0 \end{cases} \quad (10) \\
&= \begin{cases} M_+(s)/M_T & : s \geq 0 \\ \{M_+(0) + M_-(s)\}/M_T & : -B^2/4A \leq s < 0 \end{cases} \quad (11)
\end{aligned}$$

以上の結果は、著者ら<sup>1)</sup>が別の方法によって導いた結果と一致している。

また、 $S$ の極大値の確率密度関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
p_{S_{\max}}(s) &= \begin{cases} \frac{1}{M_T} \frac{\partial M_+(s)}{\partial s} & : s \geq 0 \\ -\frac{1}{M_T} \frac{\partial M_-(s)}{\partial s} & : -B^2/4A \leq s < 0 \end{cases} \quad (12) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{M_T} \frac{\partial M_+(s)}{\partial s} & : s \geq 0 \\ -\frac{1}{M_T} \frac{\partial M_-(s)}{\partial s} & : -B^2/4A \leq s < 0 \end{cases} \quad (13)
\end{aligned}$$

(12) および (13) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
p_{S_{\max}}(s) &= \begin{cases} \frac{\{\alpha_2 \exp[-\alpha_2^2/2R_{X_1}^2] - \alpha_1 \exp[-\alpha_1^2/2R_{X_1}^2]\}}{(4As + B^2)^{1/2} R_{X_1}^2 \{1 + \exp[-B^2/8A^2R_{X_1}^2]\}} & : s \geq 0 \\ -\frac{\alpha_1 \exp[-\alpha_1^2/2R_{X_1}^2]}{(4As + B^2)^{1/2} R_{X_1}^2 \{1 + \exp[-B^2/8A^2R_{X_1}^2]\}} & : -B^2/4A \leq s < 0 \end{cases} \quad (14) \\
&= \begin{cases} \frac{\{\alpha_2 \exp[-\alpha_2^2/2R_{X_1}^2] - \alpha_1 \exp[-\alpha_1^2/2R_{X_1}^2]\}}{(4As + B^2)^{1/2} R_{X_1}^2 \{1 + \exp[-B^2/8A^2R_{X_1}^2]\}} & : s \geq 0 \\ -\frac{\alpha_1 \exp[-\alpha_1^2/2R_{X_1}^2]}{(4As + B^2)^{1/2} R_{X_1}^2 \{1 + \exp[-B^2/8A^2R_{X_1}^2]\}} & : -B^2/4A \leq s < 0 \end{cases} \quad (15)
\end{aligned}$$

(15)の $S$ の極大値の確率密度関数は、 $S$ の最小限界値 $-B^2/4A$ に近づくにつれて無限に大きくなる。これは、最小限界値の付近で極大値の数が急増することを意味する。ただし、最小限界値に等しい $S$ の極大値は存在せず、最小限界値に等しい $S$ の極小値が発生する。このことについては後に説明する。

(14)と(15)は、 $S$ の負の極大値をも考慮した厳密な式である。負の極大値の発生回数を無視して正の極大値の期待数を極大値の期待総数とみなすと、 $S$ の極大値の近似的な確率密度関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
p_{S_{\max}}(s) &= \frac{1}{M_+(0)} \frac{\partial M_+(s)}{\partial s} \\
&= \frac{\{\alpha_2 \exp[-\alpha_2^2/2R_{X_1}^2] - \alpha_1 \exp[-\alpha_1^2/2R_{X_1}^2]\}}{(4As + B^2)^{1/2} R_{X_1}^2 \{1 + \exp[-B^2/2A^2R_{X_1}^2]\}} \\
&\quad : s \geq 0 \quad (16)
\end{aligned}$$

以上に説明した極大値確率分布計算法と同様な考え方に基づいて、極小値の厳密な確率密度関数は次式によって与えられる。

$$\begin{aligned}
p_{S_{\min}}(s) &= -\alpha_2 \exp[-\alpha_2^2/2R_{X_1}^2] / \\
&\quad (4As + B^2)^{1/2} R_{X_1}^2 \{1 + \exp[-B^2/8A^2R_{X_1}^2]\} \\
&\quad : -B^2/4A \leq s < 0 \quad (17)
\end{aligned}$$

(17)の $S$ の極小値の確率密度関数は、 $S$ の最小限界値 $-B^2/4A$ に近づくにつれて無限に大きくなる。これは $S$ の最小限界値に近づくにつれて極小値の数が急増することを意味している。最小限界値に等しい $S$ の極小値が数多く発生することは、(3)による $S$ の定義より明白である。従って、 $S$ の最小限界値における極小値の確率密度関数は無限大となりディラックのデルタ関数を用いれば次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
p_{S_{\min}}(s) &= \{\delta(s + B^2/4A)\} \{2 \exp[-B^2/8A^2R_{X_1}^2] / \\
&\quad \{1 + \exp[-B^2/8A^2R_{X_1}^2]\} \} \\
&\quad : s = -B^2/4A \quad (18)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\{\delta(s + B^2/4A)\} : \text{Dirac's delta function}$$

## 2.2 2 確率変数間の相関が無相関の場合

確率変数 $X_1$ と $X_2$ が無相関の関係にある場合には、(2)を変形して次式で与えられる非線形応答 $S$ の極大値確率分布を考えればよい。

$$S = Y_1^2 + Y_2^2 \quad (19)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
S &= Z - (e - c^2/4a - d^2/4b) \\
Y_1 &= \sqrt{a}(X_1 + c/2a) \\
Y_2 &= \sqrt{b}(X_2 + d/2b) \quad : a > 0 \text{ and } b > 0
\end{aligned}$$

また、 $S$ の1階時間導関数は次式で与えられる。

$$\dot{S} = 2(Y_1\dot{Y}_1 + Y_2\dot{Y}_2) \quad (20)$$

ただし、

$$\dot{Y}_1 = dY_1/dt, \quad \dot{Y}_2 = dY_2/dt$$

ここで、確率変数 $Y_1$ および $Y_2$ とこれらの1階時間導関数 $\dot{Y}_1$ および $\dot{Y}_2$ はお互いに独立な定常ガウス過程であることが、仮定により証明できるので、4確率変数の同時確率密度関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
p_{Y_1 Y_2 \dot{Y}_1 \dot{Y}_2}(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2 R_{Y_1} R_{Y_2} R_{\dot{Y}_1} R_{\dot{Y}_2}} \\
&\times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{(y_1 - \bar{Y}_1)^2}{R_{Y_1}^2} + \frac{(y_2 - \bar{Y}_2)^2}{R_{Y_2}^2} + \frac{\dot{y}_1^2}{R_{\dot{Y}_1}^2} + \frac{\dot{y}_2^2}{R_{\dot{Y}_2}^2} \right\} \right] \quad (21)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
p_{Y_1 Y_2 \dot{Y}_1 \dot{Y}_2}(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) &: \text{joint probability density} \\
&\text{function of } Y_1, Y_2, \dot{Y}_1 \text{ and } \dot{Y}_2 \text{ for } (Y_1 \\
&= y_1, Y_2 = y_2, \dot{Y}_1 = \dot{y}_1, \dot{Y}_2 = \dot{y}_2)
\end{aligned}$$

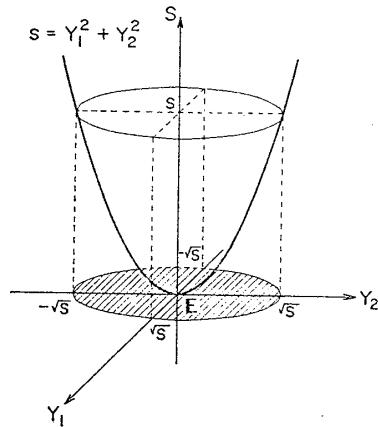


Fig. 1 Domain  $E$  for  $S=Y_1^2+Y_2^2\leq s$

$R_{Y_1}, R_{Y_2}, R_{\dot{Y}_1}$  and  $R_{\dot{Y}_2}$ : standard deviations of  $Y_1, Y_2, \dot{Y}_1$  and  $\dot{Y}_2$

$\bar{Y}_1, \bar{Y}_2$ : mean values of  $Y_1$  and  $Y_2$

まず、 $Y_1, Y_2, \dot{Y}_1$  および  $\dot{Y}_2$  の同時確率密度関数を用いて、 $S$  と  $\dot{S}$  の同時分布関数を表わすことを考える。今、 $S$  がある一定値  $s$  よりも小さいという条件を満足する  $Y_1$  と  $Y_2$  の領域を  $E$  (Fig. 1) また、 $\dot{S}$  がある一定値  $\dot{s}$  よりも小さいという条件を満足する  $\dot{Y}_1$  および  $\dot{Y}_2$  の領域を  $G$  (Fig. 2) とすれば、 $p_{Y_1 Y_2 \dot{Y}_1 \dot{Y}_2}(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$  を領域  $E$  と領域  $G$  において積分することによって、 $S$  と  $\dot{S}$  の同時分布関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 F_{S\dot{S}}(s, \dot{s}) &= \int_0^s ds \int_{-\infty}^{\dot{s}} p_{S\dot{S}}(s, \dot{s}) d\dot{s} \\
 &= \iint_E dy_1 dy_2 \iint_G p_{Y_1 Y_2 \dot{Y}_1 \dot{Y}_2}(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) d\dot{y}_1 d\dot{y}_2 \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\alpha(s)}^{\alpha(s)} dy_1 \int_{-\gamma(s)}^{-\delta} dy_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{y}_1 \int_{-\infty}^{\kappa(\dot{s})} \\
 &\quad \frac{1}{(2\pi)^2 R_{Y_1} R_{Y_2} R_{\dot{Y}_1} R_{\dot{Y}_2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{(y_1 - \bar{Y}_1)^2}{R_{Y_1}^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(y_2 - \bar{Y}_2)^2}{R_{Y_2}^2} + \frac{\dot{y}_1^2}{R_{\dot{Y}_1}^2} + \frac{\dot{y}_2^2}{R_{\dot{Y}_2}^2} \right\} \right] d\dot{y}_2 \\
 &+ \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\alpha(s)}^{\alpha(s)} dy_1 \int_{\delta}^{\gamma(s)} dy_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{y}_1 \int_{-\infty}^{\kappa(\dot{s})} \\
 &\quad \frac{1}{(2\pi)^2 R_{Y_1} R_{Y_2} R_{\dot{Y}_1} R_{\dot{Y}_2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{(y_1 - \bar{Y}_1)^2}{R_{Y_1}^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(y_2 - \bar{Y}_2)^2}{R_{Y_2}^2} + \frac{\dot{y}_1^2}{R_{\dot{Y}_1}^2} + \frac{\dot{y}_2^2}{R_{\dot{Y}_2}^2} \right\} \right] d\dot{y}_2 \quad (22)
 \end{aligned}$$

ただし、

$p_{S\dot{S}}(s, \dot{s})$ : joint probability density function of  $S$  and  $\dot{S}$  for  $(S=s, \dot{S}=\dot{s})$

$$E = [(Y_1, Y_2) | -\sqrt{s} \leq Y_1 \leq \sqrt{s}, -\sqrt{s - Y_1^2}$$

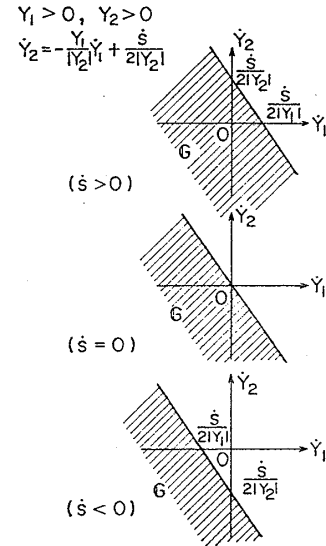


Fig. 2 Domain  $G$  for  $\dot{S}=2(Y_1\dot{Y}_1+Y_2\dot{Y}_2)\leq \dot{s}$

$$\leq Y_2 \leq \sqrt{s - Y_1^2}]$$

$$G = [(\dot{Y}_1, \dot{Y}_2) | -\infty < \dot{Y}_1 < \infty, -\infty < \dot{Y}_2 \leq -\frac{Y_1}{|Y_2|} \dot{Y}_1 + \frac{\dot{s}}{2|Y_2|}]$$

$$\alpha(s) = \sqrt{s - \delta^2}, \quad \gamma(s) = \sqrt{s - y_1^2}$$

$$\kappa(\dot{s}) = -\frac{y_1}{|y_2|} \dot{y}_1 + \frac{\dot{s}}{2|y_2|}, \quad Y_2 \neq 0$$

ここで、領域  $G$  においては  $Y_2 \neq 0$  なる条件が必要であるが、 $Y_2 = 0$  即ち  $Y_1$  軸上も領域  $E$  に含まれている。このことを計算上考慮するために、(22) では微量  $\delta$  を導入して積分を行なう。

(22) を  $s$  および  $\dot{s}$  で微分して、 $S$  と  $\dot{S}$  の同時確率密度関数を求めることができる。ここで、(22) における領域  $E$  に関する積分を  $(Y_1, Y_2)$  の直交座標系を  $(r, \theta)$  の極座標系に変換することによって実行すれば、 $S$  と  $\dot{S}$  の同時確率密度関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 p_{S\dot{S}}(s, \dot{s}) &= \partial^2 F_{S\dot{S}}(s, \dot{s}) / \partial s \partial \dot{s} \\
 &= \int_0^{2\pi} (2\pi)^{-3/2} (4R_{Y_1} R_{Y_2})^{-1} \{s(R_{\dot{Y}_1}^2 \cos^2 \theta \\
 &\quad + R_{\dot{Y}_2}^2 \sin^2 \theta)\}^{-1/2} \\
 &\quad \times \exp \left[ -(\sqrt{s} \cos \theta - \bar{Y}_1)^2 / 2R_{Y_1}^2 \right. \\
 &\quad \left. - (\sqrt{s} \sin \theta - \bar{Y}_2)^2 / 2R_{Y_2}^2 \right. \\
 &\quad \left. - \dot{s}^2 / 8s (R_{\dot{Y}_1}^2 \cos^2 \theta + R_{\dot{Y}_2}^2 \sin^2 \theta) \right] d\theta \quad (23)
 \end{aligned}$$

ここで、2.1 の場合と同様な考え方をして、レベル  $s$  よりも大きい極大値の単位時間の期待数は  $S$  が正（または負）の傾きでレベル  $s$  を横切る単位時間の期待数に等しいと仮定すれば、 $S$  の極大値がある一定値  $s$  を超える単位時間の期待数は次式で与えられる。

$$M(s) \doteq \int_0^{\infty} \dot{s} p_{S\dot{S}}(s, \dot{s}) d\dot{s} \quad (24)$$

また、 $S$  の極大値の単位時間の期待総数は、 $Y_1$  と  $Y_2$  の

平均値の自乗和である  $s^*(=\bar{Y}_1^2+\bar{Y}_2^2)$  のレベルを  $S$  が正 (または負) の傾きで横切る単位時間の期待数に等しいと仮定すれば, 次式で与えられる。

$$M_T \equiv M(s^*) \quad (25)$$

従って, (24) と (25) を用いて,  $S$  の極大値がある一定値  $s$  を超える確率は次式で与えられる。

$$q(S_{\max} > s) = M(s)/M_T : s \geq s^* \quad (26)$$

また,  $S$  の極大値の確率密度関数が次式で与えられる。

$$p_{S_{\max}}(s) = -\frac{1}{M_T} \frac{\partial M(s)}{\partial s} : s \geq s^* \quad (27)$$

(27) は次のようになる。

$$\begin{aligned} p_{S_{\max}}(s) &= \int_0^{2\pi} (R_{Y_1}^2 \cos^2 \theta + R_{Y_2}^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \\ &\times \{-1/2\sqrt{s} + (\sqrt{s} \cos \theta - \bar{Y}_1) \cos \theta / 2R_{Y_1}^2 \\ &+ (\sqrt{s} \sin \theta - \bar{Y}_2) \sin \theta / 2R_{Y_2}^2\} \\ &\times \exp[-(\sqrt{s} \cos \theta - \bar{Y}_1)^2 / 2R_{Y_1}^2 \\ &- (\sqrt{s} \sin \theta - \bar{Y}_2)^2 / 2R_{Y_2}^2] d\theta / \\ &\int_0^{2\pi} \{s^*(R_{Y_1}^2 \cos^2 \theta + R_{Y_2}^2 \sin^2 \theta)\}^{1/2} \\ &\times \exp[-(\sqrt{s^*} \cos \theta - \bar{Y}_1)^2 / 2R_{Y_1}^2 \\ &- (\sqrt{s^*} \sin \theta - \bar{Y}_2)^2 / 2R_{Y_2}^2] d\theta : s \geq s^* \quad (28) \end{aligned}$$

以上に説明した極大値確率分布計算法と同様な考え方に基づいて, 極小値の確率密度関数は次式によって与えられる。

$$p_{S_{\min}}(s) = |p_{S_{\max}}(s)| : 0 \leq s < s^* \quad (29)$$

### 3 船体縦強度部材に誘起される相当応力 極大値確率分布

前節に示した方法を適用すれば, 船体縦強度部材に誘起される波浪による合成全直応力と合成全剪断応力ならびに静水中の直応力と剪断応力を用いて定義される von Mises の相当応力の極大値確率分布を求めることができる。即ち, (3) あるいは (19) の  $X_1$  と  $X_2$  に (1) の合成全波浪直応力  $\sigma_T$  と合成全波浪剪断応力  $\tau_T$  が対応している。以下に相当応力の極大値および極小値の確率密度関数を示す。

(a) 合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力の間に関連が完全相関であると仮定した場合

厳密な相当応力極大値 ( $y$ ) の確率密度関数は, (14) および (15) より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} p_{Y_{\max}}(y) &= 2y p_{S_{\max}}(s) \equiv 2y p_{S_{\max}}(y^2 - y^{*2}) \\ &= \begin{cases} y \{ \alpha_2 \exp[-\alpha_2^2 / 2R_{\sigma_T}^2] - \alpha_1 \exp[-\alpha_1^2 / 2R_{\sigma_T}^2] \} / \\ R_{\sigma_T}^2 \{ (1+3\mu^2)(y^2 - y^{*2}) + (\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 \}^{1/2} \\ \times \{ 1 + \exp[-(\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 / 2(1+3\mu^2)^2 R_{\sigma_T}^2] \} \\ : y \geq y^* \quad (30) \\ -y \alpha_1 \exp[-\alpha_1^2 / 2R_{\sigma_T}^2] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} R_{\sigma_T}^2 \{ (1+3\mu^2)(y^2 - y^{*2}) + (\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 \}^{1/2} \\ \times \{ 1 + \exp[-(\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 / 2(1+3\mu^2)^2 R_{\sigma_T}^2] \} \\ : y_L \leq y < y^* \quad (31) \end{cases}$$

ただし,

$$y : \text{max. of } \{ (\sigma_T + \sigma_0)^2 + 3(\tau_T + \tau_0)^2 \}^{1/2}$$

$$s = y^2 - y^{*2}$$

$$y^* = \sqrt{\sigma_0^2 + 3\tau_0^2}$$

$$y_L = \sqrt{y^{*2} - (\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 / (1+3\mu^2)}$$

$$\alpha_1 \} = [ -(\sigma_0 + 3\tau_0\mu)$$

$$\mp \sqrt{(\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 + (1+3\mu^2)(y^2 - y^{*2})} / (1+3\mu^2)$$

$$\mu = \pm R_{\tau_T} / R_{\sigma_T} \quad \text{for } \rho = \pm 1$$

$R_{\sigma_T}, R_{\tau_T}$  : standard deviations of  $\sigma_T$  and  $\tau_T$

$\rho$  : correlation coefficient between  $\sigma_T$  and  $\tau_T$

また, 静水中相当応力  $y^*$  より小さい極大値を無視できると仮定すれば, 相当応力極大値 ( $y$ ) の確率密度関数は (16) より近似的に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} p_{Y_{\max}}(y) &= y \{ \alpha_2 \exp[-\alpha_2^2 / 2R_{\sigma_T}^2] - \alpha_1 \exp[-\alpha_1^2 / 2R_{\sigma_T}^2] \} / \\ &R_{\sigma_T}^2 \{ (1+3\mu^2)(y^2 - y^{*2}) + (\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 \}^{1/2} \\ &\times \{ 1 + \exp[-2(\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 / (1+3\mu^2)^2 R_{\sigma_T}^2] \} \\ &: y \geq y^* \quad (32) \end{aligned}$$

同様にして, 厳密な相当応力極小値 ( $y$ ) の確率密度関数は (17) および (18) より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} p_{Y_{\min}}(y) &= \begin{cases} -y \alpha_2 \exp[-\alpha_2^2 / 2R_{\sigma_T}^2] / \\ R_{\sigma_T}^2 \{ (1+3\mu^2)(y^2 - y^{*2}) + (\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 \}^{1/2} \\ \times \{ 1 + \exp[-(\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 / 2(1+3\mu^2)^2 R_{\sigma_T}^2] \} \\ : y_L \leq y < y^* \quad (33) \\ \{ \delta(y - y_L) \} \{ 2 \exp[-(\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 / 2(1+3\mu^2)^2 R_{\sigma_T}^2] / \\ \{ 1 + \exp[-(\sigma_0 + 3\tau_0\mu)^2 / 2(1+3\mu^2)^2 R_{\sigma_T}^2] \} \} \\ : y = y_L \quad (34) \end{cases} \end{aligned}$$

ただし,

$$\{ \delta(y - y_L) \} : \text{Dirac's delta function}$$

なお, (30)~(34) は (3) における  $B$  に相当する  $(2\sigma_0 + 6\tau_0\mu)$  が正の場合の式である。 $(2\sigma_0 + 6\tau_0\mu)$  が負の場合には, (31) の  $\alpha_1$  を  $-\alpha_2$  に, (33) の  $\alpha_2$  を  $-\alpha_1$  に置きかえればよく, その他の式は正の場合と同じである。

(b) 合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力の間に関連が無相関であると仮定した場合

静水中相当応力  $y^*$  より小さい極大値を無視できると仮定すれば相当応力極大値 ( $y$ ) の確率密度関数は (28) より近似的に次式で与えられる。

$$p_{Y_{\max}}(y) = 2y p_{S_{\max}}(s) \equiv 2y p_{S_{\max}}(y^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} y (R_i^2 \cos^2 \theta + 3R_i^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \\
&\quad \{-y^{-1} + (y \cos \theta - \sigma_0)/R_{\sigma T}^2 + (y \sin \theta - \sqrt{3}\tau_0) \sin \theta / 3R_{\tau T}^2\} \\
&\quad \exp[-(y \cos \theta - \sigma_0)^2 / 2R_{\sigma T}^2 - (y \sin \theta - \sqrt{3}\tau_0)^2 / 6R_{\tau T}^2] d\theta / \\
&\quad \int_0^{2\pi} y^* (R_i^2 \cos^2 \theta + 3R_i^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \\
&\quad \exp[-(y^* \cos \theta - \sigma_0)^2 / 2R_{\sigma T}^2 - (y^* \sin \theta - \sqrt{3}\tau_0)^2 / 6R_{\tau T}^2] d\theta \\
&\quad : y \geq y^* \quad (35)
\end{aligned}$$

また、相当応力極小値 ( $y$ ) の確率密度関数は (29) より次式で与えられる。

$$p_{y \min}(y) = |p_{y \max}(y)| \quad : 0 \leq y < y^* \quad (36)$$

#### 4 シミュレーション数値実験による検証

##### 4.1 数値実験の方法

2 および 3 で説明した非線形相当応力の極大値確率分布計算法の有効性と実用性を検証するために、長波頂不規則波中の船体縦強度部材に誘起される相当応力時系列のシミュレーション数値実験を行なった。

相当応力を誘起させる入力となる長波頂不規則波の時系列は波スペクトルを用いて次式によって与えられる。

$$\begin{aligned}
h(t) &= \sum_{i=1}^m h_{0i} \cos(\omega_{ei} t + \varepsilon_i) \\
&= \sum_{i=1}^m \sqrt{2[f(\omega_{ei})]^2 \Delta \omega_e} \cos(\omega_{ei} t + \varepsilon_i) \\
&= \sum_{i=1}^m \sqrt{2[f(\omega_i)]^2 \Delta \omega} \cos(\omega_{ei} t + \varepsilon_i) \quad (37)
\end{aligned}$$

ただし、

- $h_{0i}$  : amplitude of the  $i$ -th component wave
- $\omega_i$  : circular frequency of the  $i$ -th component wave
- $\omega_{ei} = \omega_i - \omega_i^2 V \cos \delta / g$  : circular frequency of the  $i$ -th component wave encounter

$[f(\omega_i)]^2$  : wave spectrum as function of  $\omega$

$[f(\omega_{ei})]^2$  : wave spectrum as function of  $\omega_e$

$\Delta \omega_e = \Delta \omega (1 - 2\omega_i V \cos \delta / g)$ ,

$\Delta \omega = \omega_{i+1} - \omega_i (= 0.05 \sqrt{2\pi g/L})$

$\varepsilon_i$  : random phase angle of the  $i$ -th component wave

$V$  : ship speed,  $g$  : acceleration of gravity

$\delta$  : heading angle against the wave direction

$L$  : ship length

ただし、素成波の円周波数は、 $\omega_i = 0.05(i+5)\sqrt{2\pi g/L}$ ,  $i=1 \sim 31$  とし、素成波の位相角  $\varepsilon_i$  は  $0 \sim 2\pi$  の間に一様に分布する確率変数としている。

次に、船体縦強度部材に誘起される合成全波浪直応力  $\sigma_T$  と合成全波浪剪断応力  $\tau_T$  の時系列は次式で与えられる。

$$\sigma_T(t) = \sum_{i=1}^m \sigma_{T0i} h_{0i} \cos(\omega_{ei} t + \varepsilon_i - \varepsilon_{\sigma T i}) \quad (38)$$

$$\tau_T(t) = \sum_{i=1}^m \tau_{T0i} h_{0i} \cos(\omega_{ei} t + \varepsilon_i - \varepsilon_{\tau T i}) \quad (39)$$

ただし、

$\sigma_{T0i}, \tau_{T0i}$  : amplitudes of response function of total wave normal stress and total wave shearing stress

$\varepsilon_{\sigma T i}, \varepsilon_{\tau T i}$  : phase angles of response function of total wave normal stress and total wave shearing stress

相当応力の時系列は、(38) で与えられる合成全波浪直応力および (39) で与えられる合成全波浪剪断応力の任意の時刻の値を次式に代入して与えられる。

$$Y(t) = [ \{ \sigma_T(t) + \sigma_0 \}^2 + 3 \{ \tau_T(t) + \tau_0 \}^2 ]^{1/2} \quad (40)$$

なお、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力が完全相関の関係にあると仮定した場合の数値実験では、単一の長波頂不規則波を発生させて、その不規則波から (38) によって合成全波浪直応力を発生させ、これに  $\pm R_{\tau T} / R_{\sigma T}$  ( $= \pm$  [剪断応力の標準偏差] / [直応力の標準偏差]) を乗じて合成全波浪剪断応力を発生させており、また、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力の相関関係が無相関であると仮定した場合の数値実験では、便宜上互いに独立な 2 種類の長波頂不規則波を発生させて、その一方の不規則波から (38) によって合成全波浪直応力を発生させ、他の不規則波から (39) によって合成全波浪剪断応力を発生させている。

##### 4.2 数値実験結果および考察

船長 310 メートルの大型油送船について電算機による相当応力のシミュレーション数値計算を行なった。設定した条件は以下の通りである。

###### (a) 不規則波

北大西洋の長期波浪発現頻度資料<sup>8)</sup>に基づく風力階級ビューフォート 10 の平均海象条件に相当する長波頂不規則波

平均波高 (有義波高) : 7.4 メートル

平均波周期 : 9.5 秒

波スペクトル : I. S. S. C. スペクトル<sup>9)</sup>

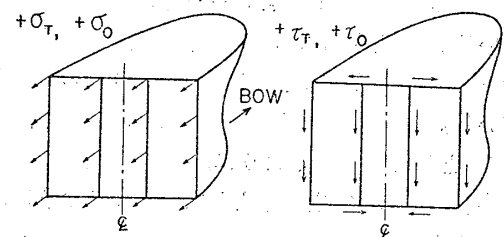


Fig. 3 Sign conventions for normal stress and shearing stress

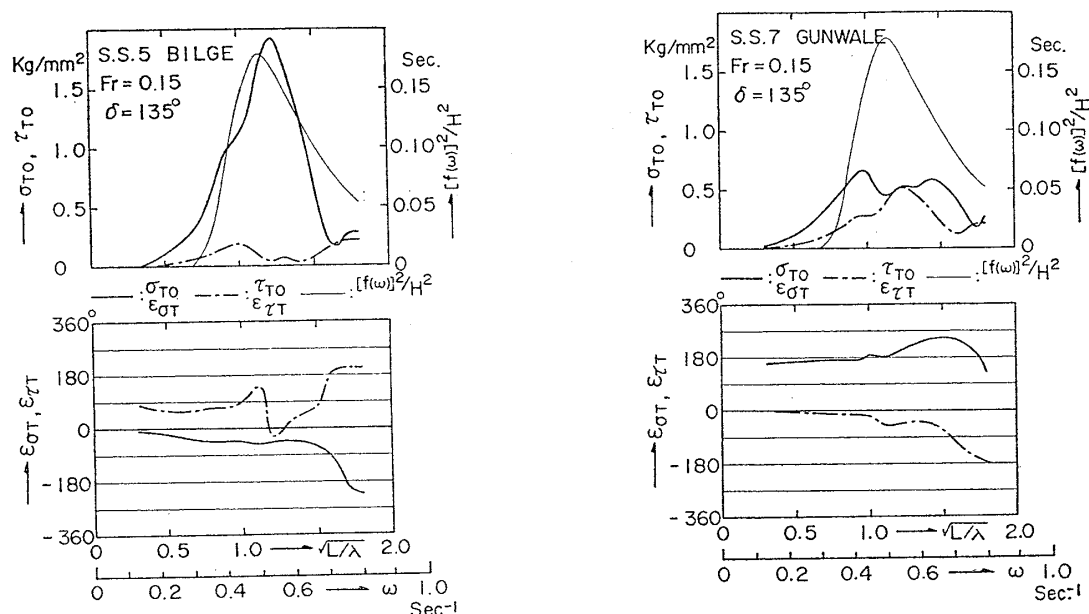


Fig. 4 Response functions of total wave normal stress and total wave shearing stress and I. S. S. C. spectrum ( $T=9.5$  sec.,  $H=7.4$  m)

(b) 船と不規則波の出会い角

$\delta=135^\circ$ : 斜迎波状態

(c) 船速

フルード数:  $Fr=V/\sqrt{gL}=0.15$

(d) 縦強度部材位置

S. S. 5 の風上側ビルジ部:

静水中直応力  $\sigma_0 = -1.29$  kg/mm<sup>2</sup>

静水中剪断応力  $\tau_0 = -0.38$  kg/mm<sup>2</sup>

S. S. 7 の風上側ガンネル部:

静水中直応力  $\sigma_0 = -2.68$  kg/mm<sup>2</sup>

静水中剪断応力  $\tau_0 = -0.69$  kg/mm<sup>2</sup>

Fig. 3 に直応力および剪断応力の正負の符号定義を示している。Fig. 4 には、上記の部材位置における合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力の規則波中応答振幅および位相角を $\sqrt{L}/\lambda$ ( $=\sqrt{\text{船長}/\text{波長}}$ )の関数として示し、(a)に説明した波スペクトルをもあわせ示している。

次に、Fig. 5 に、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力間の相関が正の完全相関( $\rho=1$ )、負の完全相関( $\rho=-1$ )および無相関( $\rho=0$ )の各場合について、相当応力、合成全波浪直応力、合成全波浪剪断応力および長波頂不規則波の時系列のシミュレーション数値実験結果を示している。各時系列は、0.5秒間隔で2,000秒間発生させており、図の時系列はその1部の約600秒の期間を表わしている。合成全波浪直応力の時系列は静水中直応力 $\sigma_0$ を基準として変動するように、合成全波浪剪断応力は静水中剪断応力 $\tau_0$ を基準として変動するように、また、相当応力は静水中相当応力 $y^*(=\sqrt{\sigma_0^2+3\tau_0^2})$ を基準として変動するように表わしている。

次に、Fig. 6 に、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断

応力間の相関が正の完全相関( $\rho=1$ )、負の完全相関( $\rho=-1$ )および無相関( $\rho=0$ )の各場合について、相当応力極大値の確率密度関数理論計算値を示している。図において $\rho=\pm 1$ の場合にEXACTと記したのは厳密計算法(30)および(31)によって計算されたものであり、 $\rho=\pm 1$ および $\rho=0$ の場合にAPPROX.と記したのは近似計算法(32)および(35)によって計算されたものである。

また、Fig. 7 に、時系列のシミュレーション数値実験結果より得られた相当応力の極大値および極小値のヒストグラムをそれぞれの確率密度関数の理論計算値と比較して示している。

Fig. 5およびFig. 6に示した結果によれば、S. S. 5のビルジ部において合成全波浪直応力の変動レベルは合成全波浪剪断応力の変動レベルよりはるかに大きく、 $\rho=1$ 、 $\rho=-1$ および $\rho=0$ の各場合の相当応力極大値分布の傾向は比較的よく似ているが、S. S. 7のガンネル部においては合成全波浪直応力の変動レベルは合成全波浪剪断応力の変動レベルとほぼ同程度であって、 $\rho=1$ 、 $\rho=-1$ および $\rho=0$ の各場合の相当応力極大値分布の傾向は大きく異なっている。なお、 $\rho=\pm 1$ の場合の厳密な相当応力極大値確率密度関数は相当応力の最小限界値に近づくにつれて無限大に発散している。これは、最小限界値の付近で値の小さい極大値の数が急増することを意味している。また、この厳密な相当応力極大値確率密度関数は静水中相当応力 $y^*$ の値において連続であるが、その曲線勾配は不連続となっている。また、 $\rho=\pm 1$ の場合の近似的な相当応力極大値確率密度関数は、静水中相当応力よりかなり大きい値をとる領域においては厳密

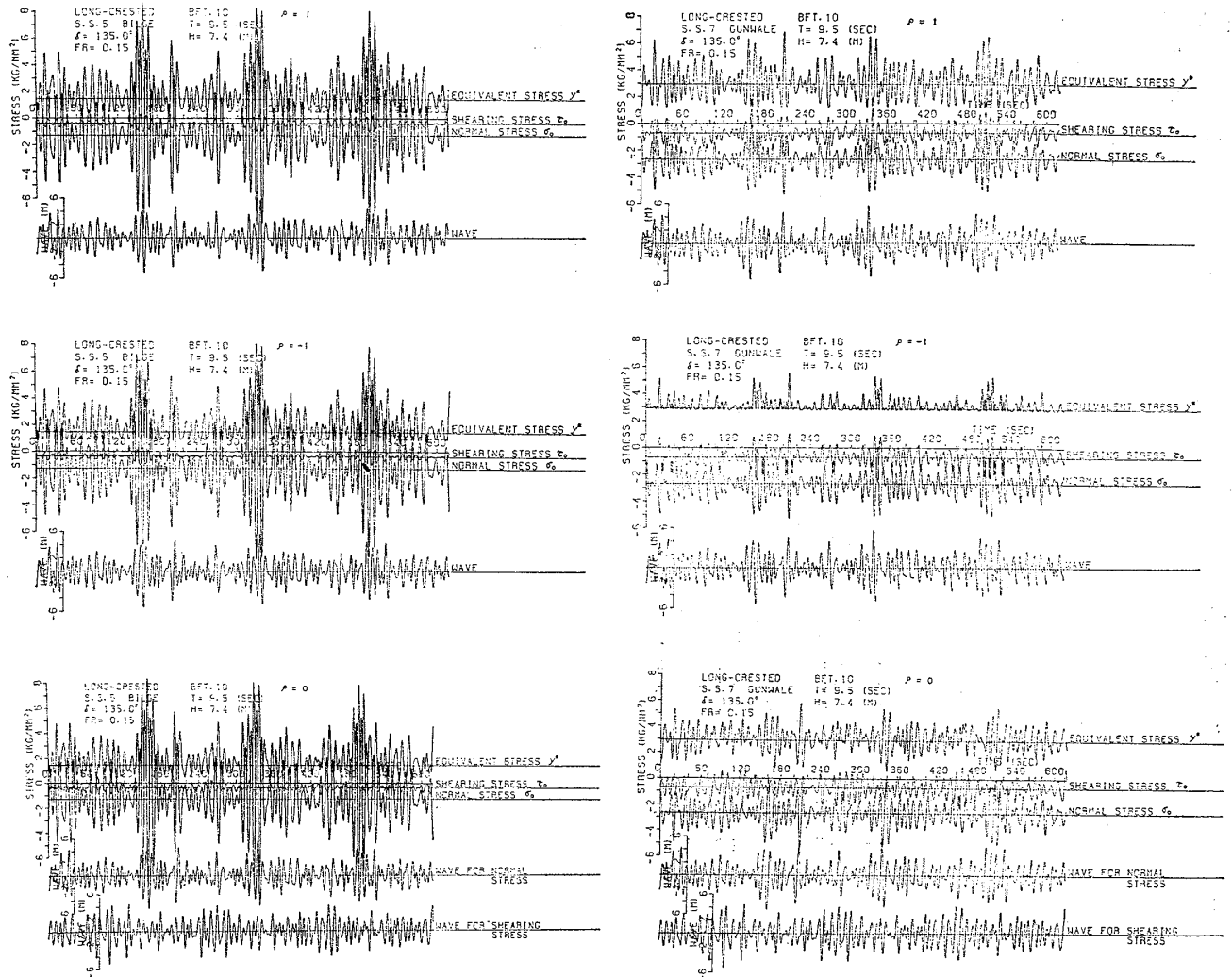


Fig. 5 Time histories of equivalent stress, total wave normal stress, total wave shearing stress and long-crested irregular waves

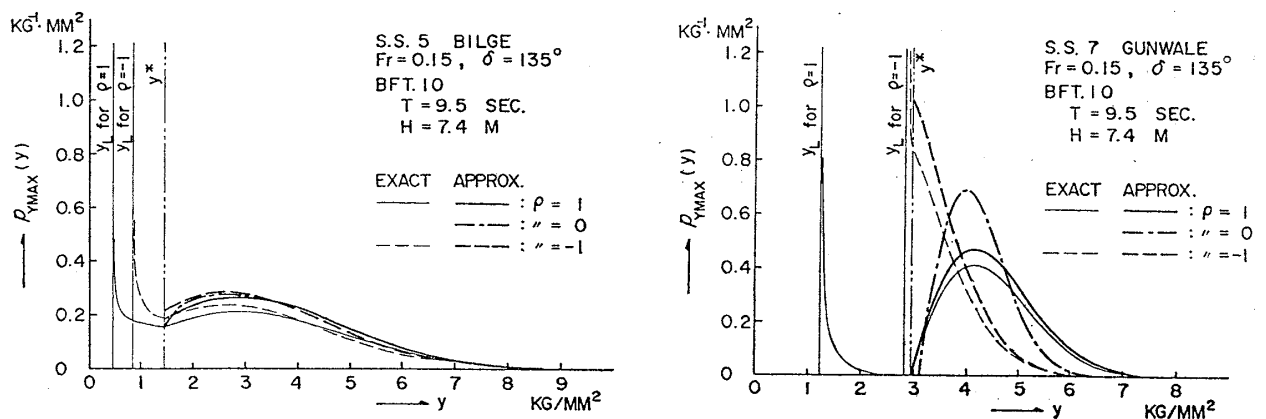


Fig. 6 Probability density functions of the maximum equivalent stress

計算値とよく一致しており、相当応力の異常値を推定する場合には近似計算法が十分に有効であることを示している。また、Fig. 7 に示した結果によれば、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力との相関が正の完全相関、負の完全相関および無相関のいずれの場合にも、相

当応力の極大値の確率密度関数の厳密法および近似法による理論計算値は数値実験によるヒストグラムとよく一致しており、相当応力極小値の確率密度関数理論計算値と数値実験によるヒストグラムも比較的よく一致している。

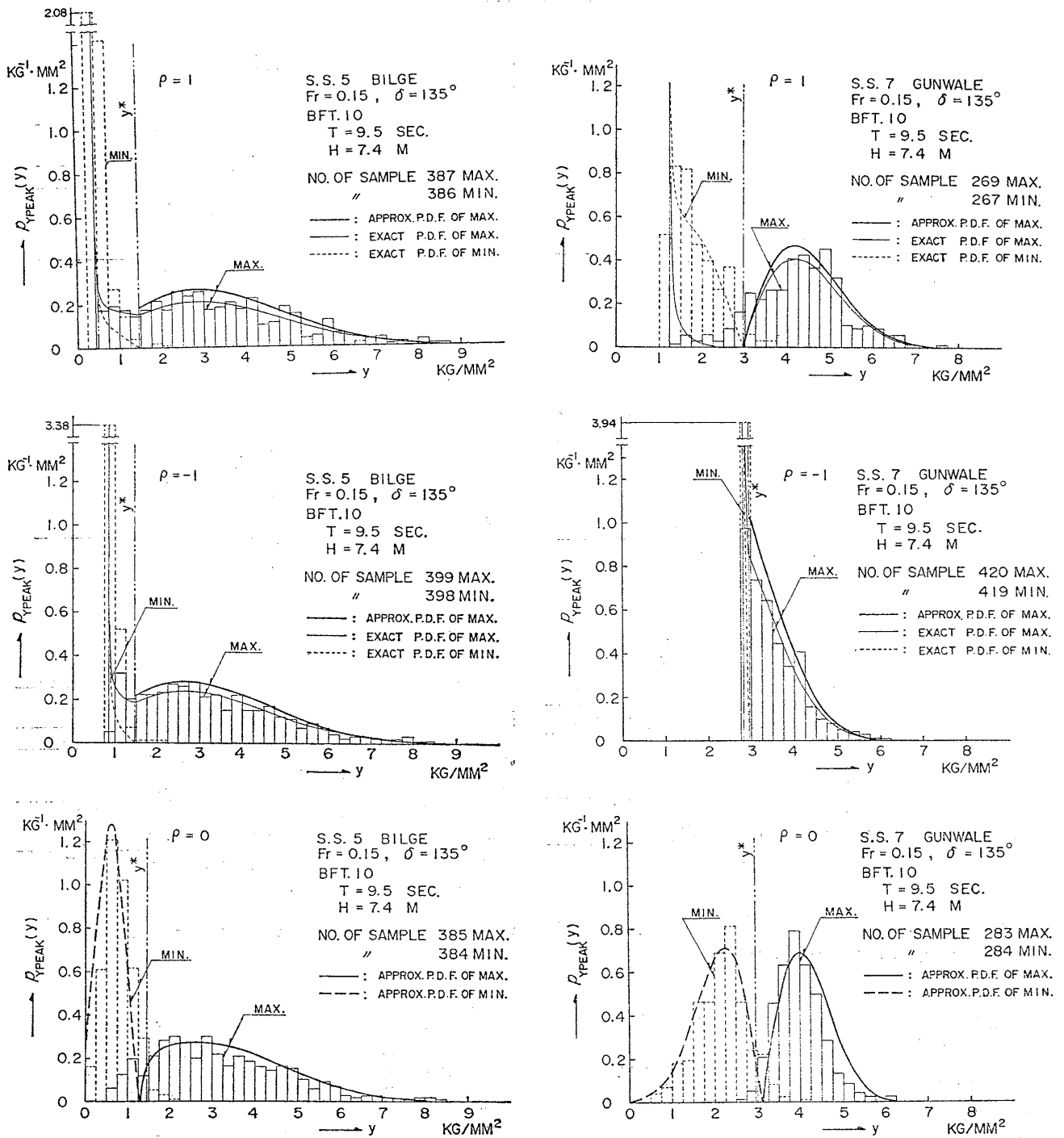


Fig.7 Probability density functions (P. D. F.) and histograms of the peak equivalent stress

以上のように、2および3において説明した非線形相当応力の極大値確率分布計算法の有効性と実用性は十分に検証されたものと考えられる。これらの計算法を用いれば、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力との間の相関が完全相関あるいは無相関であると仮定した場合の相当応力の短期および長期予測が可能であるが、このような相当応力の短期および長期予測結果の詳細については別の機会に報告する。

### 5 結 言

船体縦強度部材に誘起される合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力ならびに静水中直応力と静水中剪断応力の組合せ応力である von Mises の相当応力について、まず、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力との相関関係が完全相関であると仮定した場合の相当応力極大値確率分布の厳密計算法と近似計算法を示し、また、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力との相関関係が無相関であると仮定した場合の相当応力極大値確率分布

の近似計算法を提示した。さらに、これらの方法を適用して短期不規則波中の大型油送船の縦強度部材に誘起される相当応力極大値確率分布計算を行なうとともに、相当応力時系列のシミュレーション数値実験を行なって、極大値確率分布計算法の有効性と実用性を検証した。得られた結論は次の通りである。

a) 完全相関の仮定に基づく厳密な相当応力極大値確率分布は、著者らが前論文で別の観点から導いた結果と一致する。

b) 完全相関の仮定に基づく相当応力極大値確率分布近似計算法による計算結果は厳密計算法による計算結果と比較的よく一致し、相当応力異常値の推定法として近似計算法は十分に有効である。

c) 正の完全相関、負の完全相関および無相関のいずれの場合においても、本論文で提案した相当応力極大値確率分布近似計算法による計算結果は時系列シミュレーション数値実験結果より得られた相当応力極大値のヒストグラムとよく一致しており、本論文で提案した方法の有効性と実用性が検証されている。

d) 本論文で示した相当応力極大値確率分布計算法を用いれば、合成全波浪直応力と合成全波浪剪断応力との相関関係が完全相関あるいは無相関であると仮定した場合の相当応力の短期および長期予測が可能である。

本研究の数値計算に協力された九州大学大学院学生野津康生氏、浜本尚俊氏ならびに計算結果の整理、図面作成に当たった木下真弓嬢、西尾千賀子嬢に謝意を表す。なお、本研究の計算は九州大学大型計算機センターの電算機FACOM M-200 OSV/F 4 によって行なわれた。

#### 参 考 文 献

- 1) 福田淳一, 新開明二, 田中徳実: 波浪中の船体に誘起される非線形応力の長期予測——大型油送船

に誘起される非線形応力——, 日本造船学会論文集, 第 146 号 (1979).

- 2) Y. K. Lin: Probability Distributions of Stress Peaks in Linear and Nonlinear Structures, A. I. A. A. J., Vol. 1 (1963).
- 3) Y. K. Lin: Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill (1967).
- 4) S. O. Rice: Mathematical Analysis of Random Noise, The Bell System Technical Journal, Vol. 24 (1945).
- 5) T. Vinje: On the Statistical Distribution of Maxima of Slightly Non-Linear Stochastic Variables, Report SK/M 27, Division of Ship Structures, The University of Trondheim, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway (1974).
- 6) S. O. Skjørdal and T. Vinje: A Computer Program for Calculation of the Statistical Distribution of Maxima of Slightly Non-Linear Stochastic Variables, User's Manual, Report No. 75-1, Division of Ship Hydrodynamics, The University of Trondheim, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway (1975).
- 7) T. Vinje and S. O. Skjørdal: On the Calculation of the Statistical Distribution of Maxima of Slightly Non-Linear, Quadratic, Stationary Stochastic Variables, International Shipbuilding Progress Vol. 22, No. 252 (1975).
- 8) H. U. Roll: Height, Length and Steepness of Seawaves in the North Atlantic Ocean and Dimensions of Seawaves as Functions of Wind Force, Technical and Research Bulletin No. 1-19, S. N. A. M. E. (1958).
- 9) W. H. Warnsinck: Report of Committee 1 on Environmental Conditions, Proceedings of I. S. S. C., Delft (1964).