

(昭和 62 年 11 月 日本造船学会秋季講演会において講演)

翼状航行型潜水艇の姿勢制御方式に関する考察

正員 石 谷 久* 馬 場 康 子*

A Study on Attitude Control of a Streamlined Cruising Type Autonomous Vehicle

by Hisashi Ishitani, Member Yasuko Baba

Summary

A three dimensional attitude control system for a streamlined cruising type autonomous vehicle are studied. A streamlined vehicle are appropriate for deep sea investigation in a wide area for its high efficiency of energy consumption, converting potential energy to velocity energy. Authors studied a simple altitude control system for such autonomous vehicle, based on distance observation by four ultrasonic fan beams to differeat directions. The system is based on two dimensional pitch control, and if it is applied to this type of vehicle, it is shown that interference between yaw and pitch motion causes serious velocity decrease by large sideslip angles due to small lift in the side direction. In the paper, effective three dimensional attitude control method based on so-called Bank-to-turn control, which is named Roll-Pitch-Roll control in the paper, is proposed. And the system performance is investigated by simulation study for various cases, from which the following results are obtained.

(1) For large yaw angle rotation, RPR control improves rotating speed remarkably without decreasing cruising velocity, which can be hardly realized when each axis is controlled independently due to the motion interference.

(2) Improvement of speed decrease for large rotation angles both in yaw and pitch direction.

From these results, it is concluded that the proposed system is utilizing strong lift force in pitch direction effectively, and appropriate for attitude control for this energy saving type cruising vehicle with asymmetric shape.

1 緒 言

広域の海底面探査を目的とする翼状の航行型の深海潜水艇として、航行エネルギーを節約するため重力エネルギーを効率的に水平面内推進力に転換する方式が提案されている^{1),2)}。このような艇はその目的から大きな揚力が必要であり、航空機と同様な翼状の艇体で制御翼による姿勢制御によって航行探査を行うことが有効である。他方で海底面探査においては安全を保つ範囲で、一定の低高度を保持しつつ海底表面の情報を入手する必要があるが、適当なセンサと制御能力があれば2次元的には十分安定な高度維持が可能なが示された^{3),4)}。文献 4)ではさらに pitch, yaw 方向の相互干渉の少ない艇体においては各軸を独立に制御する、いわゆる skid-to-turn 制御⁵⁾により安定に方向制御が可能なが確認されている。

これに対して文献 1), 2) による翼形状の艇体は垂直面

内の揚力が大きく、pitch, yaw の制御性は非対称となり後者の安定性が低下する。本来高度維持は roll 角を 0(基準方向)に保ちつつ、pitch 角のみを変化する 2 次元航行を基本とするが、海底面の法線方向が航行面内でない場合、特に垂直壁面に対しても一定距離で探査航行するためには、yaw-roll 制御を含む 3 次元制御が必要となる。本研究においては、非対称な運動特性を持つ翼状航行型潜水艇を対象として、pitch-yaw-roll の相互干渉を考慮した上で、効率的な 3 次元姿勢制御方式を検討し、この妥当性をシミュレーションにより評価した結果について報告する。

2 各軸回りの制御特性

2.1 非対称モデルの概要

本論文で対象とするモデルは文献 1), 2) による翼状の断面を持つ航行型潜水艇であって、その概形と主要緒元は Fig. 1, Table 1 に、運動方程式は付録 1 に示される。Fig. 1 に示されるように、その形態から pitch 軸

* 東京大学工学部

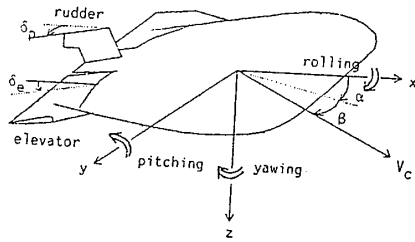


Fig. 1 Configuration of the vehicle

Table 1 Parameters of the cruising type vehicle model

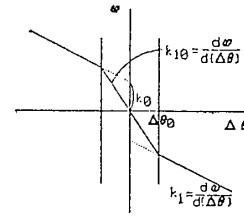
items	notation	value
mass	m	90 kg
moment of inertia	I_x	0.3 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
	I_y	27.38 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
	I_z	3 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
added mass	A_{11}	35 kg
	A_{22}	48.34 kg
	A_{33}	226.2 kg
	A_{44}	1.635 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
	$A_{35} = A_{53}$	-32.02 $\text{kg}\cdot\text{m}$
	$A_{26} = A_{62}$	-3.019 $\text{kg}\cdot\text{m}$
length	L	1 m
width	B	0.5 m
height	D	0.3 m

回わりの揚力と制御力が大きく、pitch 角に関して十分大きな制御性能を持つ。これに対して、yaw 方向の制御翼（方向舵）も大きな翼面積を持つので制御モーメントは十分大きい、艇本体の揚力が小さいため yaw 軸回わりの回転性能がやや劣り、横すべりを生じやすくなる。また roll 角回転は面積の大きな elevator を反転させることにより、速やかに回転可能である。

2.2 各軸回わりの制御系

Fig. 1 の艇においては、その制御翼として反転可能な elevator（昇降舵）と、これに独立な rudder（方向舵）を考慮するので、pitch, yaw, roll 各軸を独立に制御可能である。そこで、まず各軸単独にその安定性を考慮して独立な制御系を構成し、その上で複数軸を同時に回転する場合の相互干渉を検討する。基本的には、文献 3) に示される 2 段階の折線による切換え線を中心とした線形制御系を適用することとし、Fig. 2 に示される基本切換え線を各軸共通に用いるが、そのパラメータ、特に角速度上限は各軸回わりの安定性を考慮して定める。

ここで誤差角 $\Delta\theta$ は、目標方位と機体方位との差を機体座標系で表わしたオイラー角、すなわち yaw, pitch, roll 角を用い、機体座標系上の各軸回わりの角速度 ω とともに用いて制御する。Elevator 同方向回転 (pitch 角), rudder (yaw 角), elevator 反転 (roll 角) により各軸を制御し、実際の elevator 角は pitch, roll 角回転に必要な制御角を代数的に加えたものとする。3 次元モデルを用いたシミュレーションにより制御パラメータを種々変化した場合のステップ応答を求め、Fig. 2 の



(1) Switch line of the control system

(a) $|\Delta\theta_i| \leq \Delta\theta_0$
 $\delta = k_0 \Delta\theta + \omega$

(b) $|\Delta\theta_i| > \Delta\theta_0$
 $\delta = k_0 (\Delta\theta + k_1 \Delta\theta) + \omega$

(2) Control logic

Fig. 2 Basic attitude control logic

Table 2 Step responses of the basic attitude control for various parameters

control parameters			control axis	θ_0 (rad)	min. velocity	max. attack angle	time (sec)
k_1	k_0	k_2					
0	0.3	4	P	90°	0.625	12.09°	8
0.2	0.15	4	P	60°	0.807	7.21°	8
0.2	0.15	4	P	90°	0.624	10.50°	6 ?
-0.1	0.3	4	P	90°	0.719	9.74°	10
0	0.2	4	P	90°	0.743	7.12°	8
*-0.05	0.2	4	P	60°	0.861	5.86°	8
*-0.05	0.2	4	P	90°	0.794	6.31°	12
*-0.05	0.2	4	P	120°	0.750	6.63°	17
0.02	0.05	2	Y	60°	0.769	8.54°	15
0.02	0.05	2	Y	90°	0.567	12.92°	20
0.02	0.03	2	Y	60°	0.847	5.35°	22
0.02	0.03	2	Y	90°	0.730	6.95°	28
0.01	0.02	2	Y	90°	0.863	3.97°	45
0	0.03	2	Y	90°	0.839	4.67°	42
0	0.04	2	Y	90°	0.766	6.50°	32
* 0	0.035	2	Y	60°	0.868	4.984°	25
* 0	0.035	2	Y	90°	0.803	5.504°	38
* 0.3	0.5	5	R	90°	0.988	0	2.5

制御系により、各軸を独立に回転させる場合には十分安定に回転可能なることが確認された。これらのシミュレーションの結果は、Table 2 に要約して制御パラメータとともに示される。いずれの場合も $\Delta\theta_0 = 0.1$, $k_{10} = 1$ とし、 k_{00} は 1, 2, 3 (Y, P, R 制御) としている。Roll については迎え角を生じないので、安定限界内で高速化した。

上の結果から、翼状艇体の制御性は以下に要約される。

(1) 一般に pitch, yaw とともに十分な制御力を持つが、制御速度を上げるために回転角度を速く (k_0 を増加) すると、最大迎え角が大きくなって減速も大きくなる。特に回転速度が大きくなると、迎え角を生じた状態が持続するために減速は大きくなる。したがって減速を一定値以下に抑え、回転時間を短縮するためには、一般の制御系と逆に (安定性を失わない範囲で) 角度誤差が小さい時ほど、角速度を大きくすること ($k_1 < 0$) が有効である。

(2) Yaw 方向の揚力が小さく、yaw 軸回転を行う

場合は、速度 vector 回転に時間がかかり、また大きな横すべり角 (side slip) が長時間持続するため減速する。

(3) Pitch 方向は、その形状から揚力が大きく yaw に比べてかなり速く回転可能である。

(4) Roll 回転は慣性モーメントが小さく、最も速く回転可能である。また迎え角を生じないためほとんど減速しない (舵の抵抗増により 1% 程度は減速する)。

(5) 航行エネルギーを節約するため、抵抗力の形状を用いて僅かなエネルギーで航行するため、一度減速すると平衡速度に回復するまで、非常に時間がかかる。またこの減速により制御特性も低下するので、減速を極力避ける回転が望ましい。

3次元航行においては roll, yaw, pitch 3軸の制御はいずれにしても必要であり、上の特性を考慮して、本制御系では 1 rad 回転で減速 15% 以内、90° 回転で 20% 程度の減速を目標に各軸の制御パラメータを設定した。このパラメータ値は Table 2 に * をつけて示される。

Fig. 3 には、このパラメータによる制御系を用いて定速航行中に各軸方向に単独に 90° 回転させた場合のステップ応答を、各軸に対応する舵角、迎え角、速度変化並びに位相面軌跡とともに示している。

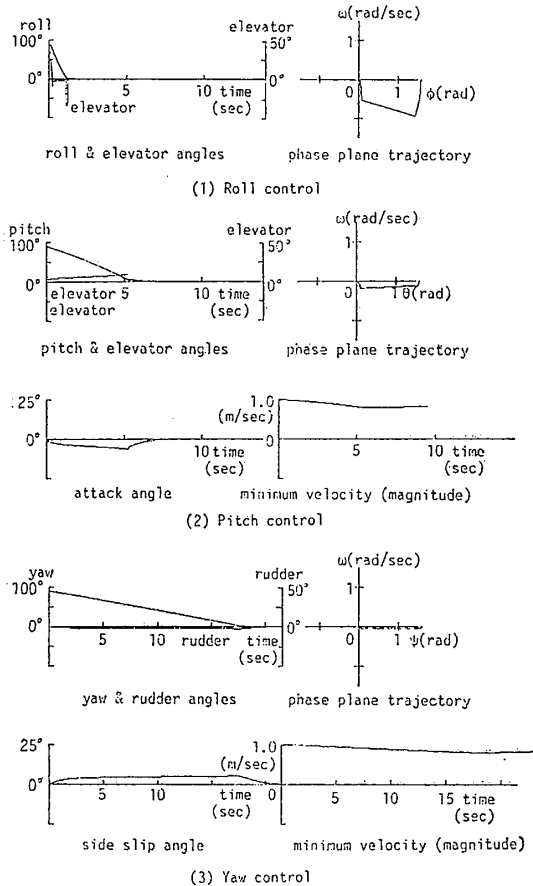


Fig. 3 Step responses of the basic control system

Fig. 4 は、この制御系により pitch, yaw 角を同時にステップ状に変化した場合の制御性の指向性を、roll 断面から示したものであって、(1) は同一時間内に回転可能 (残差角度 1° 以内) な軌跡 (間隔 1 秒)、(2) は最大減速度の等しい軌跡 (旋回中の最低速度 V_{min} を 1% 間隔で示す) を示している。同図の x 軸, y 軸はそれぞれ現在姿勢を基準とした目標方位を yaw-pitch 角で示したものであり、roll 回転のない場合を考える。

Table 2 から容易に想像されるように、pitch 軸の回転速度は yaw 軸の約 2.5 倍であって、Fig. 4 からも pitch 方向制御が有効なことがよく示される。

また、Fig. 4(2) に示される減速は各軸の断面形状が非対称なため、迎え角が生じた時に発生するので、同一の回転速度を得るために必要な迎え角に依存する。したがって艇が動的に不安定なほど減速は少なくなる。他方で回転速度は揚力によって抑えられるので、いずれにしても回転速度と減速は相反する特性を示し、安定性と操縦性も矛盾するので最終的には目的に応じた設定が必要となる。

現実には yaw-pitch 同時回転を行う場合は、その干渉のため roll 回転を派生して pitch 角の大きい範囲では yaw 軸回転は加速される。その反面で、yaw 軸回りの角速度が単独の制御速度より速くなるために減速も増加して、設定値の 80% に対して 73% 近くまで低下することが示される。

したがって、このような特性を持つ艇の 3 次元的な姿勢制御においては、pitch と yaw の大きい場合の相互干渉、および yaw 角の大きな場合の回転速度上昇を配

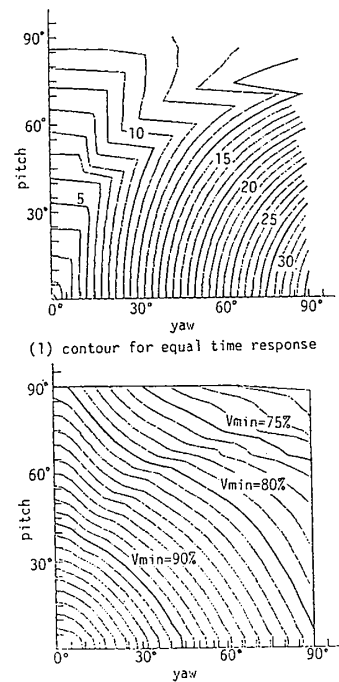


Fig. 4 Controllability configuration

慮する必要がある。他方で pitch 方向の姿勢変化が基本である海底面探査においては、pitch 方向制御性の優れた翼形状の艇が妥当であることが確認された。

3 非対称3次元モデルの姿勢制御

3.1 制御目標の表現と指示方法

基本的に3次元運動を考慮した機体の pitch(elevator), yaw(rudder), roll(elevator 反転) 制御においては、姿勢目標値はセンサが機体に固定されてその時点の機体系における相対姿勢を示す場合と、慣性系における絶対方位で与えられる場合がある。またある特定時点における機体姿勢に対する相対方位で与えられ、これを慣性系に固定して目標姿勢とする場合(simulatorの場合など)がある。制御翼は機体系に固定しているために、いずれの場合も目標姿勢をその時点の機体系における適当な姿勢角(たとえば Euler 角)で表わして、機体系上の誤差で制御する必要がある。

ある基準座標系における相対的な姿勢方向は一般に3個のパラメータで表現できるが、これは基準の座標系からの座標回転行列で表わされる。この場合、回転座標系上のベクトルは基準座標系上のベクトルに左側からその行列をかけたものとして示される(付録2参照)。したがって、 T の横ベクトルが回転座標系上の主軸を元の基準座標系上の成分で表わしたものとなる。具体的な制御目標値は、センサにより以下の方法で指示される。

3.1.1 姿勢目標の慣性系における表現

機体に固定されたセンサからの情報により、機体系の相対姿勢の方向へ制御する場合には姿勢目標を慣性系で固定する必要がある。Fig.5に示されるように現在姿勢 T_{A0} (慣性系座標系における姿勢)と機体系上の姿勢目標 T_D から

$$D_0 = T_{D0} T_{A0}$$

により慣性系における姿勢目標、 D_0 を求める必要がある。ただし慣性誘導装置などによって、直接慣性系にお

ける絶対方位 D_0 が与えられる場合は、この変換は不要である。 D_0 が求められて、これが固定されると、任意の時点の姿勢を T_A とすると

$$D_0 = T_D \cdot T_A \text{ より } T_D = D_0 T_A^{-1}$$

で与えられ、 T_D がその機体系における目標方向、すなわち制御誤差を示している。一般に制御系は制御翼に対応した制御軸上の誤差角、たとえば yaw, pitch, roll の修正角を必要とするので、 T_D からその Euler 角を求めれば、これが制御誤差となる。実際の制御ではこれらの誤差角 $\Delta Y, \Delta P, \Delta R$ および機体上の角速度 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ を用いて feedback control を行うことになる。

3.1.2 センサによる誘導の場合(センサにより常時相対的な目標方向(機体系)を与えられる場合)

センサにより現在姿勢 T_{A0} および機体上の目標姿勢 T_{D0} が与えられる。この場合は常に $T_A = T_{A0}$ と考えれば

$$T_D = D_0 T_A^{-1} = T_{D0} T_{A0} T_A^{-1} = T_{D0}$$

となって目標 Euler 角(azimuth-elevation)は T_D より直ちに計算できる。なお、機体姿勢が基準になる場合は yaw-pitch 角は azimuth-elevation 角と一致するため、以下の議論で任意に用いる場合がある。

現実には目標入力決定できない(sensor 入力断)場合のため、慣性系に直しておく必要がある。

3.2 制御方式

一般に姿勢制御においては、当然ながら安定、高速かつ減速の少ない制御が望ましい。したがって前節の結果より揚力の大きな pitch 軸回転を有効に利用する、いわゆる bank-to-turn 制御が望ましいが、この方式は現在確立されていない⁹⁾。姿勢制御においては姿勢の自由度3に対応して、特異点を除き軸回転を3回行えば目標姿勢を実現できる。Euler 角による座標回転が最も一般的であるが、上述の理由から、一般的な yaw-pitch-roll 軸同時制御(以下 YPR 制御と称する)の代わりに bank-to-turn 制御(R-P-R 軸逐次制御、以下 RPR 制御と称する)が有効な場合も多い。

特に pitch 角度の大きい場合の roll 回転は、pitch 角速度が yaw 角速度に移って、yaw 方向横すべり角が増加して速度がいちじるしく低下する。したがって pitch, roll の同時制御も避ける必要がある。さらに姿勢変化の大きい場合には、応答の遅い yaw を基本にした Y-P-R の同時回転は不合理であって、R-P-Y 軸回転が望ましいが、この場合も R-P の相互干渉が生じる可能性がある。また yaw 方向が大きく出ると pitch, roll 角変更後も制御時間が延びる恐れがある。以上より本研究においては、効率的かつ実現可能な RPR 制御を検討する。

RPR 制御の原理は Fig.6 に示されるが、初期姿勢と最終姿勢を結ぶ大円上に pitch 回転がくるように roll

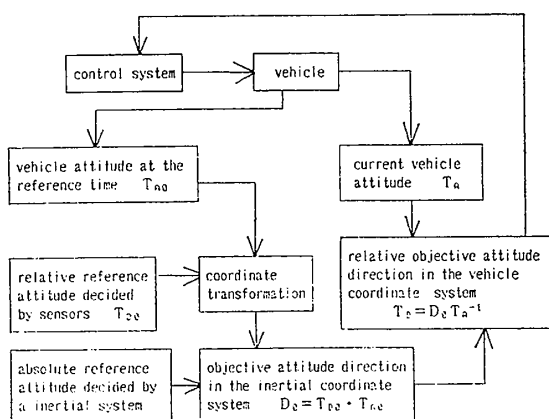


Fig.5 Coordinate transformation in the attitude control system

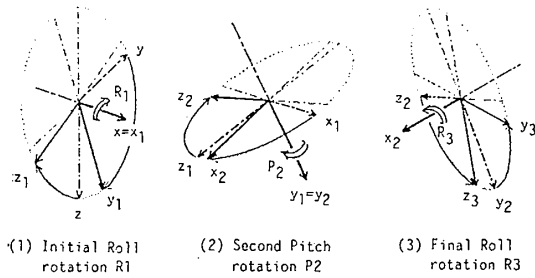


Fig. 6 Concept of bank-to-turn control

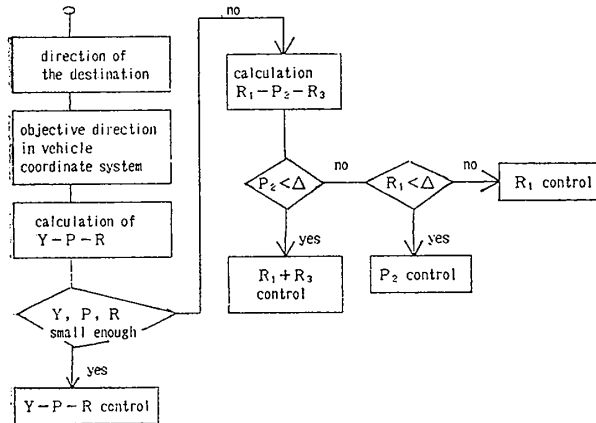


Fig. 7 Flow chart of the bank-to-turn control (RPR)

回転を2度行うものであって、その回転角を順に R_1 , P_2 , R_3 と表わすこととする。この場合はその定義から軸回転は一度に一軸であって、相互干渉を最小に抑えることができる。

他方で、YPR 制御における yaw 角修正が微小の場合には、RPR 制御を行うと R は $\pm 90^\circ$ の回転を必要とするので、このような場合には直接 yaw 軸回転を併用することが望ましい。この場合 YPR 制御では、全体の回転時間は最も遅い yaw 軸回転に要する時間 T_Y で決まるのに対して、RPR 制御では roll 軸回転が 90° 当り 2 秒程度で完了すると考えると、 $T=4+T_D$ で姿勢が変化する。すなわち $4+T_D < T_Y$ の時 RPR 制御が有利となる。

このモデルでは一般に $T_Y > 3 T_D$ より、 $4+(1/3)T_Y < T_Y$ 、すなわち $4 < (2/3)T_Y$ 、 $T_Y > 6$ 秒、すなわち yaw 角で $6/20 \text{ rad} = 18^\circ$ 以上の姿勢変化がある時、RPR 制御が有利となる。さらに R-P-R を求めた時に、 P_2 が少ない場合はこのモードを省略して、roll モード、 R_1 , R_3 を続ける (残りは yaw で調整する) ことが有利である。

したがって、yaw-pitch-roll が大きく相互干渉を生じる時は最速の RPR 制御を用い、Y-P-R が十分に小さい時、特に Y が小さい時には YPR 制御を行う方式をとる。前者において $R_1-P_2-R_3$ を求め、 P_2 が大きい場

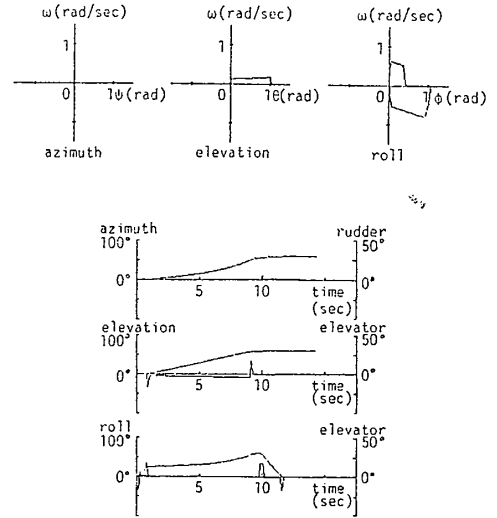


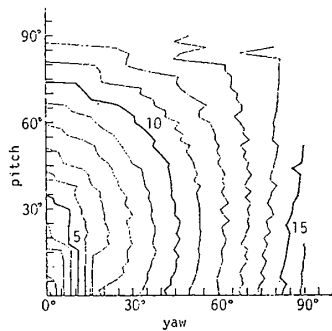
Fig. 8 An example by the RPR control

合はまず R_1 を行う。 R_1 が小さな場合は P_2 と同時に回転し、 P_2 も小さくなれば R_1+R_3 , P_2 を同時に行う。

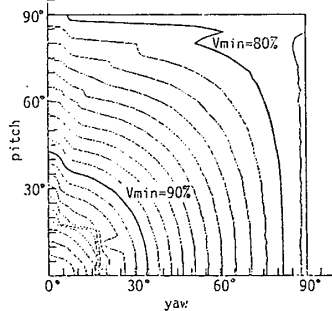
以上より、RPR 制御として Fig. 7 に示される flow chart による制御論理を用いることとする。YPR 制御は Y, P, R の修正角がすべて 18° 以内におさまって、相互干渉が無視できる場合に実施される。また Δ としては現在 $3^\circ (0.05 \text{ rad})$ をとっている。Fig. 8 に yaw-pitch の干渉の大きい $57^\circ-57^\circ$ 方向への姿勢変更を行う場合の制御結果 (各角度変化と ω と θ (慣性系 Euler 角) 上の位相面軌跡) の一例を示す。相互干渉を避けるためまず R_1 が回転し、 P_2 で大きく姿勢変更後、 R_3 で最終姿勢に入る状態が示される。また、 P_2 の回転中に幾何学的な干渉から $\omega_x=0$ のまま roll 角が変化する様子が示される。また yaw 角も $\omega_z=0$ のまま変化して 57° に達している。

Fig. 9 は、RPR 制御を行った場合の Fig. 4 と同様な指向性を示したものである。Fig. 9 は RPR 制御の特性をよく示しており、yaw 軸回転角度が大きい時にその回転速度がいちじるしく改善されること、また pitch-yaw の大きい回転においても干渉が減少して、減速がいちじるしく低減し、ほぼ対象領域全域にわたって 80% 以上の速度を確保できることが確認された。

さらに Fig. 10 には、このような YPR 制御と RPR 制御を比較した時、後者が有効な範囲をまとめて示している。この結果から、制御速度は pitch 回転の少ない純粋の yaw 回転における改善がいちじるしく、 90° 程度の回転においては 50% 以下の時間に短縮されることが示される。また減速の上では pitch 角 20° 以上のほぼ全域にわたって改善され、pitch-yaw の相関の強い 45° 方向で特に効果的である。これに対して pitch 角 = 0 の上で 2% 程度速度が低下するのは、roll 軸回転が 2 回入るために各々 1% の低下によるものであって、



(1) contour for equal time response



(2) contour for equal minimum velocity response

Fig.9 Controllability configuration of the RPR

これは pitch 回転速度を低下すれば十分に補正可能である。

4 結 言

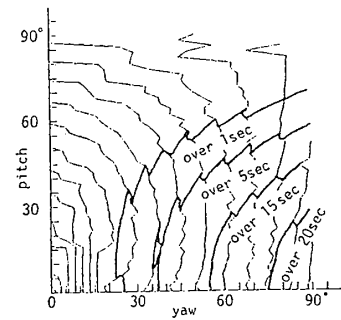
本研究においては、広域の海底面探査を目的とした省エネルギー型の翼状航行型無人潜水艇の姿勢制御方式を検討した。翼状の艇形状より運動特性が非対称となり、3軸を独立に制御する skid-to-turn 制御は、pitch 角度制御を基本とした高度維持に対しては十分に有効であるが、yaw 角の大きな回転が困難となることが示された。そこで、pitch-yaw-roll の相互干渉を考慮した効率的な3次元姿勢制御方式として、roll 回転を積極的に利用する bank-to-turn (RPR) 制御の実際的な制御手法を検討し、その妥当性をシミュレーションにより評価した。

この結果、RPR 制御を航行型潜水艇の姿勢制御に導入した場合は、

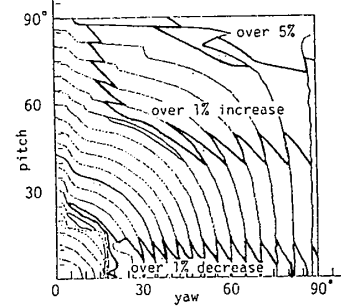
- (1) 20°以上の yaw 角回転における回転速度改善
- (2) Pitch-yaw 45°方向の減速に対する改善

に効果のあることが確認された。

特に対地情報に基づいた高度制御においては、海底面法線上の一定高度制御が必要であって、これを容易に実現できる pitch 制御を基本として、さらに roll 角を回転させる RPR 制御の有効性が確認された。これは垂直壁面の表面探査などに対しても、制御性のよい pitch 角制御を有効に利用可能であり、roll 角回転の自由な無人無索潜水艇の特徴をいかした制御と考えられる。



(1) contour for equal time response



(2) contour for equal minimum velocity response

Fig.10 Improvement by the RPR control

本研究については東大工学部小山教授に御指導をいただき、種々の有益な御意見、御助言をいただいた。また共同研究を進めている、東大生研の前田教授、浦助教、同工学部の河内助教、電気通信大学の竹内助教より方式全般について御討論をいただいた。特に潜水艇モデルは浦研究室大学院学生(当時)、大坪君の計算および実測結果を利用している。ここに篤く感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) 浦, 大坪: グライダー型潜水艇の設計に関する研究(その1), 生産研究(東京大学生産技術研究所報告), Vol.37, No.12 (1985).
- 2) 浦, 大坪: グライダー型潜水艇の設計に関する研究(その3), 生産研究(東京大学生産技術研究所報告), Vol.39, No.5 (1987).
- 3) 石谷: 無人潜水艇の高度維持制御に関する考察(第1報), 造船学会論文集, 第160号(1986).
- 4) 石谷: 無人潜水艇の高度維持制御に関する考察(第2報), 造船学会論文集, 第161号(1987).
- 5) 今度: Bank-to-Turn 制御飛行体の問題点について, 第2回宇宙航空の誘導シンポジウム予稿集(1985).
- 6) 石寺ほか: 遠隔操作式無人潜水艇の運動シミュレーション, 造船学会論文集, 第158号(1985).

付録 1 翼状航行型潜水艇モデルの運動方程式

運動方程式は、文献6)の基本式を用い、流体力の項は水槽実験の結果に基づいて以下の関数で近似した。非慣性的流体力を F_F (舵にかかる流体力を含む)と

すると,

$$F_F = 1/2 \cdot \rho V_R^2 L B \begin{bmatrix} C_X(\alpha, \beta) + C_X^E(\eta) \\ C_Y(\alpha, \beta) + C_Y^R(\delta) \\ C_Z(\alpha, \beta) + C_Z^E(\eta) \end{bmatrix} + 1/2 \cdot \rho V_R^2 \cdot L B D \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{MX}(\alpha, \beta) + C_{MX}^E(\eta) \\ C_{MY}(\alpha, \beta) + C_{MY}^E(\eta) \\ C_{MZ}(\alpha, \beta) + C_{MZ}^E(\eta) + C_{MZ}^R(\delta) \end{bmatrix}$$

ただし, ρ は水の密度, V_R は対水速度, α は迎え角, β は横すべり角を表わす。また, 添え字 E, R は, それぞれ elevator, rudder による流体力に対応し, η, δ はそれぞれの舵角を表わす。L は艇の長さ, B は幅, D は厚みを示す。

なお機体系での C_X, C_Y, C_Z は, 速度方向の流体力係数 C_X', C_Y', C_Z' を用いて次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} C_X' \\ C_Y' \\ C_Z' \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cdot \cos \beta \\ -\cos \alpha \cdot \sin \beta & \cos \beta & \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \alpha & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

ここに C_X', C_Y', C_Z' は, 以下の関数で近似する。

$$C_X' = -\{(0.0056 + 0.258 \beta^2) + 0.857 \alpha^2\}$$

$$C_Y' = -(0.186 - 1.43 \alpha^2) \beta$$

$$C_Z' = -(1.36 - 0.433 \beta) \alpha$$

C_{MX}, C_{MY}, C_{MZ} も同様に次式で表わされる。

$$C_{MX} = -1.45 \alpha \beta$$

$$C_{MY} = (-0.273 - 1.55 \beta^2) \alpha$$

$$C_{MZ} = -(0.207 - 0.658 \alpha^2) \beta$$

rudder に関しては,

$$C_Y^R(\delta) = 0.544 \delta$$

$$C_{MZ}^R(\delta) = -0.920 \delta$$

となる。

elevator に関しては, 左右各々に対して,

$$C_X^E(\eta) = -0.0780 \eta^2$$

$$C_Z^E(\eta) = -0.265 \eta$$

$$C_{MX}^E(\eta) = 0.143 \eta, \quad -0.143 \eta$$

$$C_{MY}^E(\eta) = -0.793 \eta$$

$$C_{MZ}^E(\eta) = 0.176 \eta^2, \quad -0.176 \eta^2$$

として, 両方を作動させた時は, 代数的に加算する。ここで, C_X^E, C_Z^E, C_{MY}^E は左右ともに同一の値をとる。 C_{MX}^E, C_{MZ}^E は, 左右で符号が変わるので, 同方向に動かすと 0 となる。

上のように実験結果に基づいて F_F を近似したとき, 慣性的流体力は C_{MX}, C_{MY}, C_{MZ} と区別できずこの項に含まれるので, 基本式から慣性的流体力の項は除いている。

付録 2 座標回転の表現

付 2.1 座標回転行列による表現

X_0 を慣性の座標系におけるベクトルとし, これを座標回転した回転座標系上のベクトル成分を X と表わす時,

$X = T_3(\phi) T_2(\theta) T_1(\psi) X_0 \equiv T X_0$ と表現される。ただし, T_3, T_2, T_1 はそれぞれ roll(x), pitch(y), yaw(z) 各軸の回転による変換行列であって,

$$T_1(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad T_3(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

と表わせる。ここに

$$T^t = T^{-1}, T_i^t = T_i^{-1}$$

である。今

$$T^t = [v_1, v_2, v_3] = T^{-1}$$

と表わし, x として回転座標系の x 軸方向単位ベクトル $x_1 = (1, 0, 0)^t$

をとると

$$X_0 = T^t x_1 = v_1$$

となる。すなわち回転された座標系 X と元の座標系 X_0 が

$$X_0 = T^t X, \text{ または } X = T X_0$$

と表現される時, X 系の主軸は X_0 系(慣性系成分)では T^t の列ベクトル, すなわち T の行(横)ベクトルになる。

付 2.2 機体上の Euler 角による表現

上の定義による T が与えられた時に, X_0 系における回転座標系 X を与える Euler 角(ψ, θ, ϕ)(慣性系の絶対方位または任意の系における相対方位)は次のように求められる。

(1) $v_{1X} \neq 0$ の場合(すなわち $\theta \neq \pm \pi/2$, かつ $\psi \neq \pm \pi/2$)

$$\psi = \tan^{-1}(v_{1Y}/v_{1X})$$

$$\theta = \tan^{-1}(-v_{1Z}/(v_{1X}/\cos \psi))$$

この場合 θ, π は \cos の値が正の時主値をとるので, $v_{1X} < 0$ の時, いずれか一方のみが主値をとる。制御上 A_Z を小さくすることが有効であるから, ここでは

$$v_{1X} > 0 \text{ なら } \psi, \theta \text{ はともに主値,}$$

$$v_{1X} < 0 \text{ なら } \psi \text{ は主値, } \theta = \theta + \pi \text{ を用いる。}$$

(1.1) $v_{3Z} \neq 0$ の場合

$$\phi = \tan^{-1}(v_{2Z}/v_{3Z})$$

ただし, $v_{3Z} \cos \theta < 0$ の場合は $\cos \phi < 0$ であり, $\phi = \phi + \pi$ となる。

(1.2) $v_{3Z} = 0$ ($\phi = \pm \pi/2$) の場合

$$\phi = \text{sign}(v_{2Z} \cdot \cos \theta) \cdot \pi/2$$

(2) $v_{1X} = 0$ の場合 ($\cos \theta = 0$ AND/OR $\cos \psi = 0$)

(2.1) $v_{1Y} = 0$, すなわち $\cos \theta = 0$ の場合

(2.1.1) $v_{1Z} = -1$, すなわち $\theta = \pi/2$ の場合

$$v_{2X} = \sin(\phi - \psi)$$

$$v_{2Y} = \cos(\phi - \psi)$$

すなわち $\phi - \psi = \tan^{-1}(v_{2X}/v_{2Y})$ であるから $\psi = 0$ として ϕ を定める。特に $v_{2Y} = 0$ で $\phi = \pi/2$, $v_{2Y} < 0$ では $\phi = \phi_0 + \pi$ 。

(2.1.2) $v_{1Z} = +1$, すなわち $\theta = -\pi/2$ の場合

同様に $\phi + \psi = \tan^{-1}(-v_{2X}/v_{2Y})$ より ϕ を定める。

$v_{2Y} < 0$ では $\phi = \phi_0 + \pi$ である。

(2.2) $v_{1Y} \neq 0$, すなわち $\cos \theta \neq 0$ の場合
 $\cos \psi = 0, \psi = \pm \pi/2$

この場合 $\cos \theta \cdot v_{3Z}$ の符号を検討することにより,
 $\theta = \tan^{-1}(-v_{1Z}/v_{1Y}),$
 $\phi = \tan^{-1}(v_{2Z}/v_{3Z})$

をそれぞれ主値とすると

	$v_{1Y} > 0$		$v_{1Y} < 0$	
	$\phi = \pi/2$	$\phi = -\pi/2$	$\phi = \pi/2$	$\phi = -\pi/2$
$v_{3Z} > 0$	θ ϕ	$\theta + \pi$ $\phi + \pi$	$\theta + \pi$ $\phi + \pi$	θ ϕ
$v_{3Z} < 0$	θ $\phi + \pi$	$\theta + \pi$ ϕ	$\theta + \pi$ ϕ	θ $\phi + \pi$

すなわち, v_{1Y}, v_{3Z} の符号によって主値に π を加えることになる。このケースでは $v_{3Z} = 0$ の時は $v_{2Z} = \sin \phi \cos \theta, \cos \theta > 0$ をとるので v_{2Z} の符号に応じて $\phi = \pm \pi/2$ である。

付録3 RPR 制御における制御

付 3.1 RPR 制御の定式化

今慣性系における姿勢 X_i から X_f へ姿勢を R_1, P_2, R_3 により変更することを考え, これをそれぞれ

$$X_i = T_0 X_0, X_f = T_f X_0$$

と表わすものとする。 T_f を X_i 系上の T で表わすと,
 $TT_0 = T_f$

より

$$T = T_f T_0^{-1}$$

この時 roll(ϕ_1), pitch(θ), roll(ϕ_3) と回転させることを考えると各主軸は (~~~~ で示される)。

$$\begin{aligned} &x_0, y_0, z_0 \\ &\rightarrow \underline{x_0 (=x_1)}, y_1, z_1 \\ &\rightarrow x_2 (=x_f), \underline{y_1 (=y_2)}, z_2 \\ &\rightarrow \underline{x_2 (=x_f)}, y_3 (=y_f), \underline{z_3 (=z_f)} \end{aligned}$$

と回転される。すなわち, $y_1 \perp x_0, y_1 \perp x_f$ より pitch 回転軸である y_1 は一意に定まる。

今, 各々の回転による変換行列を, $T_1(\phi_1), T_2(\theta), T_3(\phi_3)$ と定義すれば, 全体の回転は

$$T = T_3 T_2 T_1 \equiv [v_1, v_2, v_3]^t$$

と表わすことができる。したがって T を与えられてこれを満足する ϕ_1, θ, ϕ_3 を求解することになる。現実にはその解の中から適当な基準, たとえば $|\phi_1| + |\theta| + |\phi_3|$ の最小なものを選ぶ必要がある。

付 3.2 R-P-R の計算

前項の T の各要素を与えられた条件で, これを満足する ϕ, θ は同様に以下に示す各場合ごとに求解される。

(1) $v_{1Z} \neq 0$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \tan^{-1}(-v_{1Y}/v_{1Z}) \\ \theta &= \tan^{-1}(-v_{1Z}/(v_{1X} \cos \phi_1)) \end{aligned}$$

ただし, $v_{1X} < 0$ の時は $\theta' = \theta + \pi$

ただし, $\cos \phi_1 = -v_{1Z}/\sin \theta < 0$ の時は $\phi_1' = \phi_1 + \pi$ (ロール逆回転) となって, 旋回時間が増加するため, 主値 ($\cos \phi_1 > 0$) のみを考える。したがって v_{1X} の値に応じて $\sin \theta$ を調整する。

$$\phi_3 = \tan^{-1}(v_{2X}/v_{3X})$$

ただし, $v_{1Z} = -\sin \theta \cos \phi_1 \neq 0$ の時は $\sin \theta \neq 0$, すな

わち $\cos \theta < 1$ であって $\cos \phi_3 = v_{3X}/\sin \theta < 0$ なら $\phi_3' = \phi_3 + \pi$ である。

なお $v_{3X} = 0$ の時は $\cos \phi_3 = 0$ であるが,
 $v_{3Y} = -\sin \phi_3 \cos \phi_1, \cos \phi_1 > 0$ より
 $\phi_3 = -\text{sign}(v_{3Y}) \cdot \pi/2$

(2) $v_{1Z} = 0$ ($\sin \theta \cos \phi_1 = 0$)

(2.1) $v_{1Y} = 0$ ($\sin \theta = 0$, すなわち $\cos \theta = \pm 1$)
 $\theta = 0 (v_{1X} = 1)$ または $\theta = \pi (v_{1X} = -1)$

$$T = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_3 \pm \phi_1) & \pm \sin(\phi_3 \pm \phi_1) \\ 0 & -\sin(\phi_3 \pm \phi_1) & \pm \cos(\phi_3 \pm \phi_1) \end{bmatrix}$$

この時は roll 回転を少なくするために $\phi_3 = 0$ とする。

したがって $\phi_3 = 0, \theta = 0$, または π であり,

$$\phi_1 = \tan^{-1}(-v_{3Y}/v_{2Y} \cdot \cos \theta)$$

ただし, $v_{2Y} = 0$ では $v_{3Y} = -\sin \phi_1 \cdot \cos \theta$ の符号により
 $\phi_1 = \pm \pi/2$

(2.2) $v_{1Y} \neq 0$ ($\cos \phi_1 = 0, \phi_1 = \pm \pi/2$), かつ $\sin \theta \neq 0$)

$\sin \phi_1 = \pm 1$ より,

$$\theta = \tan^{-1}(v_{1Y}/v_{1X} \cdot \sin \phi_1)$$

ただし $v_{1X} < 0$ の場合, $\theta' = \theta + \pi$

$$v_{1X} = 0 \text{ では } \theta = \text{sign}(\sin \phi_1 \cdot v_{1Y}) \cdot \pi/2$$

$$\phi_3 = \tan^{-1}(v_{2Y}/v_{3X})$$

ただし $\sin \theta \cdot v_{3X} < 0$ の場合, $\phi_3 = \phi_3 + \pi$

$$v_{3X} = 0 \text{ では, } \phi_3 = \text{sign}(\sin \theta \cdot v_{2Y}) \cdot \pi/2$$

(3) θ, ϕ_1 を求める具体的アルゴリズム

特に簡単な v_1 から求める。この時, $v_{1Z} \neq 0 (\cos \phi \neq 0)$ の場合は

$$\phi = \tan^{-1}(-v_{1Y}/v_{1Z})$$

$$\theta = \tan^{-1}(-v_{1Z}/(v_{1X} \cos \phi))$$

はそれぞれ主値を示すものとする ($\phi = \phi_1$ を表わす)。

1) $v_{1X} = \cos \theta > 0$, θ は主値の場合

ϕ の式より $v_{1Z} \cdot v_{1Y} < 0$ で ϕ は 1, 3 象限,

$v_{1Z} \cdot v_{1Y} > 0$ で ϕ は 2, 4 象限となる。

さらに $\cos \phi = -v_{1Z}/\sin \theta$ より $\text{sign}(v_{1Z}/\sin \theta)$ により ϕ は 1, 4 (主値), または 2, 3 象限となる。

したがって $v_{1Y}, v_{1Z}, \sin \theta$ の符号により ϕ の象限は次表に要約される。

	$v_{1Y} > 0$		$v_{1Y} < 0$	
	$\sin \theta > 0$	$\sin \theta < 0$	$\sin \theta > 0$	$\sin \theta < 0$
$v_{1Z} > 0$	2	4*	1*	3
$v_{1Z} < 0$	1*	3	2	4*

したがって, v_{1Y}, v_{1Z} の符号により, 上表の * の象限内にある ϕ を用いれば (ϕ の主値をとる) 効率のよい転回となる。

2) $v_{1X} < 0$ の場合

θ は $\theta + \pi$

ϕ については同じ。

3) $v_{1X} = 0$ の場合

ϕ は同様に求まる。

$\theta = \pm \pi/2, \sin \theta = \pm 1$

これは v_{1Y}, v_{1Z} の符号から同様に定められる。