

斜め追波中の船の転覆について

(第3報 非対称転覆方程式におけるカオスとフラクタル)

正員 菅 信* 正員 田 口 晴 邦*

Capsizing of a Ship in Quartering Seas

(Part 3. Chaos and Fractal in Asymmetric Capsizing Equation)

by Makoto Kan, *Member* Harukuni Taguchi, *Member*

Summary

In the first paper¹⁾, the authors pointed out that a new mode of capsizing, which accompanied the period doubling bifurcation phenomenon, had been observed and that about 25% of the total capsizing had been classified into such a new capsizing mode. Since the period doubling bifurcation phenomenon was regarded as a precursor of the chaos in the nonlinear dynamical systems, and the chaos was regarded as a precursor of the unconditional capsizing, which was equivalent to the blue sky catastrophe or the boundary crisis in the softening spring system, the chaos and fractal in the symmetrical capsizing equation was examined in the authors' second paper²⁾. Although the mysterious nonlinear phenomena appeared in the symmetrical capsizing equation were examined numerically, a cascade of the period bifurcations was not observed in the numerical study.

In the present paper, the authors have examined the asymmetrical capsizing equation as well as the symmetrical one. As a result, the cascade of the Feigenbaum bifurcation, which begins from the period doubling bifurcation and ends at the unconditional capsizing through the chaos, has been observed for both asymmetrical and symmetrical capsizing equations. Further it has been clarified that in the symmetrical equation the cascade of the period bifurcations begins after the break of the symmetry of solution, and that the period bifurcation with the distinct difference of the adjoining amplitude, such as observed in the model tests, appears only in the asymmetrical equation. The differences of the fractal capsizing boundaries in the initial value plane and the control space between the symmetrical and asymmetrical equations have been also examined, and the danger of the biased ship is emphasized by the numerical results. In the examination of the safe basin in the initial value plane, a cell-to-cell mapping method developed by Hsu has been attempted to confirm its effectiveness and accuracy. A numerical analysis of the fold bifurcation which approximates the capsizing boundary in the control space, and also a numerical Melnikov analysis which approximates the beginning of the fractal metamorphosis in the safe basin in the initial value plane have been carried out. An approximate analytical expression for the flip bifurcation is obtained.

The idea that the appearance of the period bifurcation in the roll motion of a ship implies the imminent danger of the capsizing has proved to be correct.

1. 結 言

著者等は、自航模型船による斜め追波中の転覆模型実験を実施し、Fig. 1 に示すように周期分岐現象を伴う転覆という新しいタイプの転覆が全転覆件数の約 1/4 に上る高い比率で観測されたことを報告した¹⁾。この周期分岐という

現象は、非線形力学系におけるカオスの前段現象と見なされるものであり、また軟化スプリング系におけるカオスは、初期条件に依らない全面転覆に相当する現象、すなわち境界危機とかブルースカイカタストロフ²⁾とか呼ばれる現象の前段現象とも見なされるものである。従って周期分岐やカオスは船の転覆の前兆と考えられることから、転覆とカオスの関係を研究する必要があるとして、前報では静的な釣合状態が左右対称な場合の転覆を表す直立船の転覆方程

* 船舶技術研究所

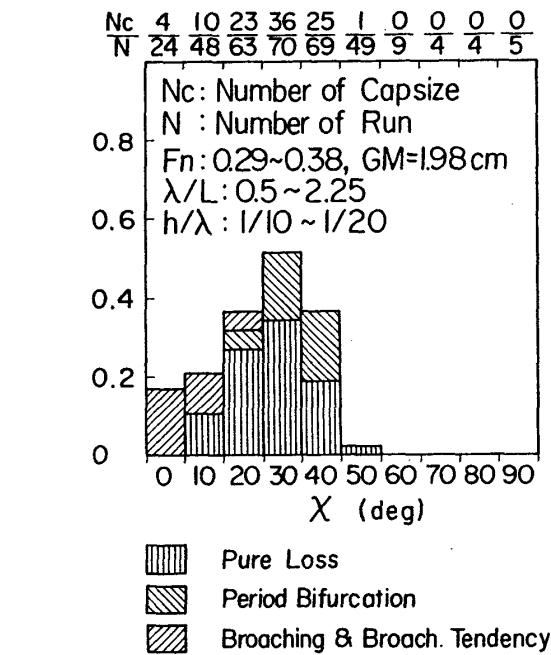
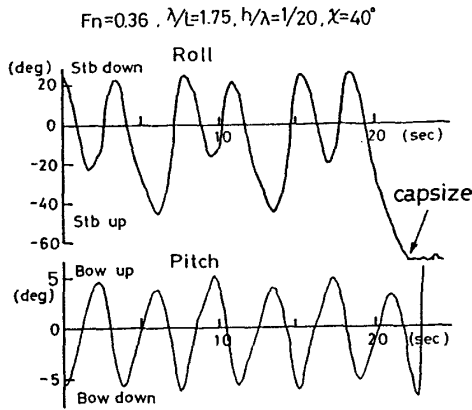


Fig. 1 Record of capsizing with period bifurcation and its happening rate

式, すなわち対称型転覆方程式を取り上げ, そこに現れるカオスやフラクタルについて数値的ならびに解析的に調査した結果について報告した^{3),4)}. その中で, 単純な転覆方程式に現れる不思議な非線形現象の概要を紹介することはできたが, 一連の周期分岐からカオスを経て転覆に至る完全なファイゲンバウム分岐が見つからなかったのを始め, 実験で観測されたような振幅差の明瞭な2周期分岐も確認できなかった。これらは周期分岐を探す方法が適切でなかったことと, 扱った転覆方程式が対称型であることに原因があると考えられたため⁵⁾, 本報では周期分岐の探し方を変え, 対称型と非対称型の転覆方程式について調べてみた。その結果ほぼ完全なファイゲンバウム分岐に近いものが対称型と非対称型の両方の転覆方程式に存在すること, および対称型の場合には周期分岐が始まる前に解の対称性の破れ⁶⁾という現象が起こること, また実験で観測されたような振幅差の明瞭な2周期分岐は非対称型の転覆方程式の方

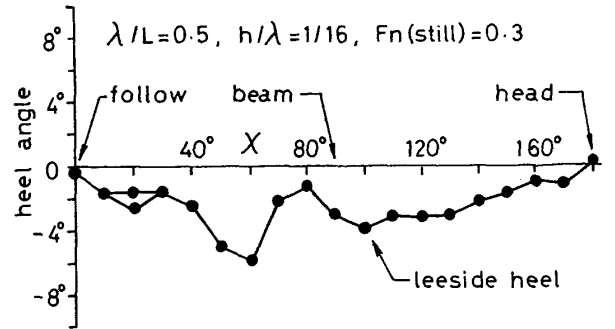


Fig. 2 Observed steady heel to leeside of a model running in oblique waves

に現れること等が確認された。更に, 初期値平面や, 制御空間における転覆限界のフラクタル性等の非線形現象が転覆方程式の非対称性によってどのように変化するか等についても調べた。初期値平面の転覆限界を調べるにあたっては Cell-to-Cell Mapping 法⁷⁻⁹⁾という効率の良い方法を併用してみて, その高い計算効率と精度を確認した。制御空間における転覆限界を近似する分岐限界や, 初期値平面の転覆限界にフラクタル性が現れ始める限界のメルニコフ値^{10),11)}等を求める数値的方法についても示した。

荷崩れ等のない完全な状態の船であっても斜め波中では, Fig. 2 に例示するように波下側への定傾斜を保ちながら航走するのが一般的と考えられることから¹²⁾, これらの研究は傾斜した船の転覆危険性に対する認識を新たにするとともに, 船の転覆現象に対する理解を深め, 近代的な復原性基準や安全運行指針を整備してゆくための基礎的な研究として必要なものと考えている。

2. 転覆方程式

荷崩れ等により傾斜している船の横揺れを表わす運動方程式は, 簡単のため他の運動モードとの連成を考えないものとする, 復原力項に負係数の3次の非線形項を取り入れた次の形でかなり一般的に表すことができる。

$$I \cdot d^2 \phi / dt^2 + N \cdot d\phi / dt + W \cdot GM \cdot \phi \{1 - (\phi / \phi_v)^2\} = M_0 + M_r \cos(\omega t + \delta) \quad (1)$$

ここに ϕ は横揺れ角, ϕ_v は直立時の復原力曲線における復原力消失角, I は横揺れ慣性モーメント, N は減衰力係数, W は排水重量, GM はメタセンター高さ, M_0 は定傾斜モーメント, M_r は強制力係数, ω は出会円周波数, t は時間, δ は強制力の位相を表す。直立時の横揺れ固有周波数 $\omega_0 = (W \cdot GM / I)^{1/2}$ と表し, 時間を $s = \omega_0 t$ で無次元時間 s に変換し, また横揺れ角を $\psi = \phi / \phi_v$ で ψ に変換すると, (1)式は次のように変換される。

$$d^2 \psi / ds^2 + x \cdot d\psi / ds + \psi - \psi^3 = B_0 + B \cos(\Omega s + \delta) \quad (2)$$

ここに, $x = N / I \omega_0$, $B_0 = M_0 / I \omega_0^2 \phi_v$, $B = M_r / I \omega_0^2 \phi_v$, $\Omega = \omega / \omega_0$ である。

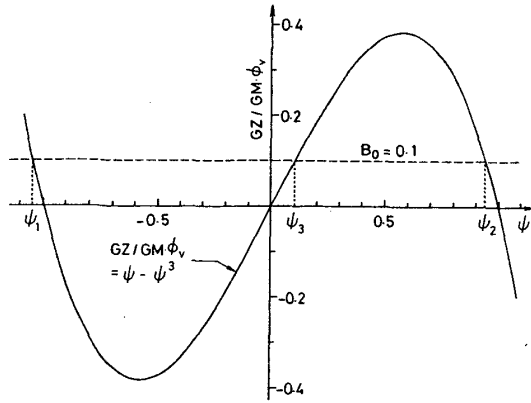


Fig. 3 Restoring moment curve and steady heeling moment

Thompson 等は非対称型の転覆方程式 (escape equation) として

$$d^2\psi/ds^2 + \kappa \cdot d\psi/ds + \psi - \psi^2 = B \cos(\Omega s + \delta) \quad (3)$$

の形のものを用いているが¹³⁾, 非対称船の横揺れを表わす方程式としては, (3)式より(2)式の方が一般性があることは明らかである。

本報では(2)式を非対称型転覆方程式と呼び, $B_0=0$ の場合を対称型転覆方程式と呼ぶ。本報では位相 $\delta=0$ の場合を扱うものとする。

以下の数値計算では, 主として $B_0=0.1$ の場合を中心に検討するが他の B_0 についても適宜検討するので, Fig. 3 に復原力曲線と傾斜モーメント B_0 の関係を示しておく。 $B_0=0.1$ は復原力消失角の 10% の角度だけ定傾斜している場合に相当する。

3. 周期分岐

前報³⁾では, 完全な周期分岐が見付からず, 代わりに Fig. 4 のような基本周期解と跳躍や転覆, 3 周期分岐, 5 周期分岐, カオス等が入り混じって発生している分岐図を示しておいた。

本報では, 非対称型転覆方程式(2)についてはほぼ完全な

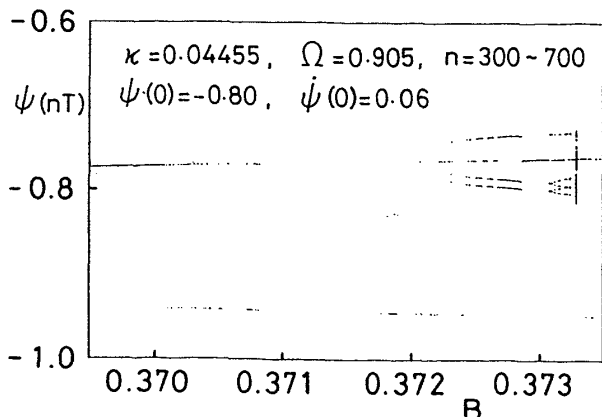


Fig. 4 Bifurcation diagram for fixed initial condition³⁾

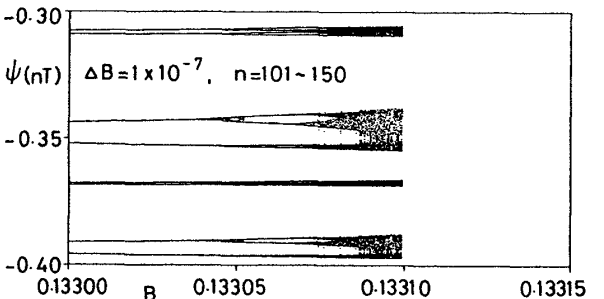
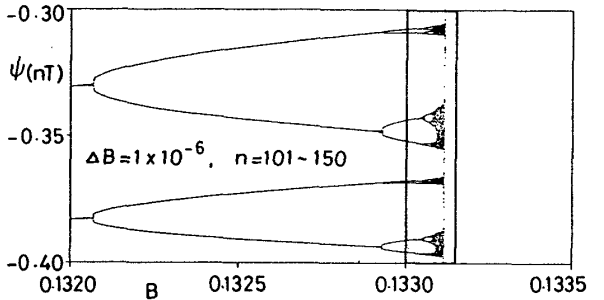
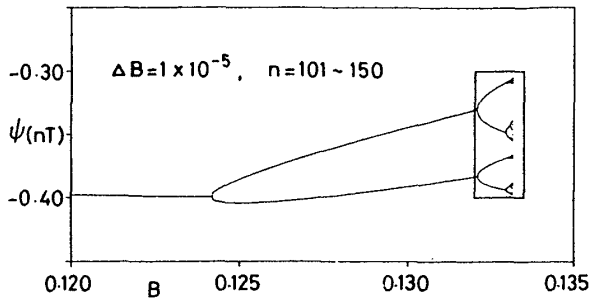
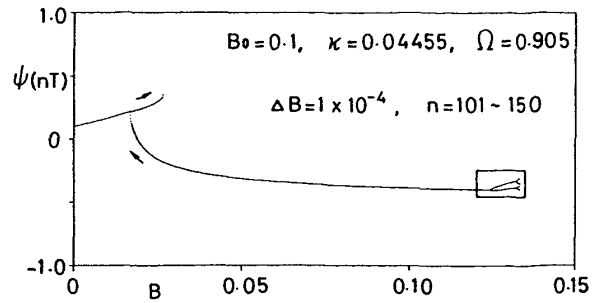


Fig. 5 Feigenbaum bifurcation diagram ($B_0=0.1$)

ファイゲンバウム分岐に近いものが求められており, Fig. 5 に $B_0=0.1$ の場合の例を示す。このような分岐図は次のようにして求められる。まず(2)式をある固定した Ω, κ, B_0 のもとに, $B=0$ として $\psi(0)=\dot{\psi}(0)=0$ の初期条件を与えて数値シミュレーションを開始する。そして過渡応答が消滅して定常応答になっていると見られる強制力の 101 周期目から 150 周期目までの横揺れ変位の応答を, 強制力の位相零における 1 周期毎の不連続な値として 50 周期分プロットする。この場合この 50 点はすべて同じ値なので重なっている。次いで B を極く僅か ΔB だけ増加させて数値シミュレーションを続ける。従って初期条件は B を変える直前の値を与えたことになる。そしてやはり強制力を変えた

後の101周期から150周期までの1周期毎の応答を50回プロットする。このような操作を B の値を ΔB ずつ増やしながら、転覆するまで続けることにより Fig. 5のような分岐図が得られる。1つのスケールの図では表わしきれないため、次々と拡大した図として示してある。 $B=0.025$ 付近で横揺れの跳躍現象が発生し、その後 $B=0.1242$ 付近で2周期分岐が始まり、4周期、8周期、16周期…と周期倍分岐を繰り返し、カオスを含むほぼ完全なファイゲンバウム分岐を経て、 $B=0.1331$ 付近で転覆に至っている。この転覆が初期条件によらない全面転覆（ブルースカイカタストロフ）であることは、第4章で述べる初期値平面の非転覆領域が完全に消滅するいわゆる境界危機（boundary crisis）の起こる B と一致することでも確認できる。なお、上と逆に転覆直前の B の値から ΔB ずつ減らしてシミュレーションを実施すると、下から増やしていったときの分岐図を逆方向になぞったものが描かれるが、跳躍の部分だけがヒステリシス現象のため別の経路をとることになる（Fig. 5参照）。

2周期分岐と4周期分岐、およびカオスの場合の位相面と時系列の例を Fig. 6~Fig. 8に示す。これらは実験で観測された振幅差の明瞭な周期分岐の例（Fig. 1）に対応するものと考えられるが、後でも述べるように対称型の転覆方程式ではこれほど明瞭な振幅差のあるものは現在までのと

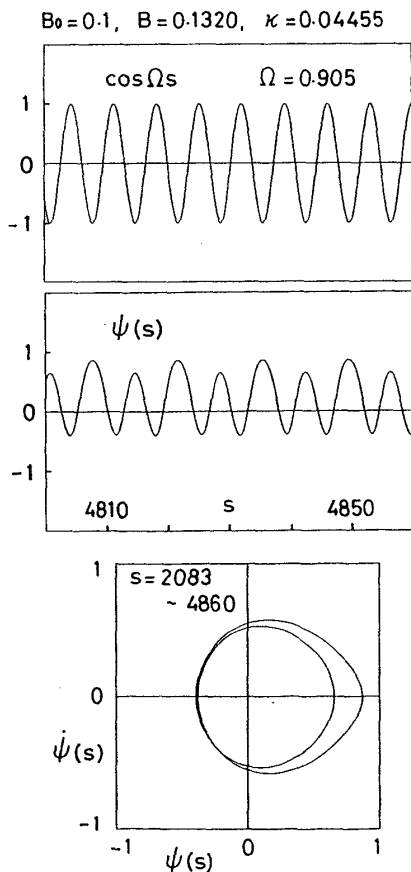


Fig. 6 Phase portrait and time history of period doubling bifurcation ($B_0=0.1$)

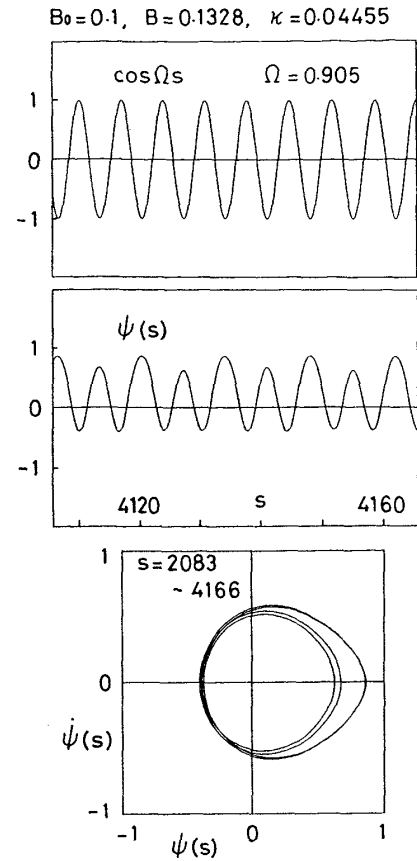


Fig. 7 Phase portrait and time history of period quadrupling bifurcation ($B_0=0.1$)

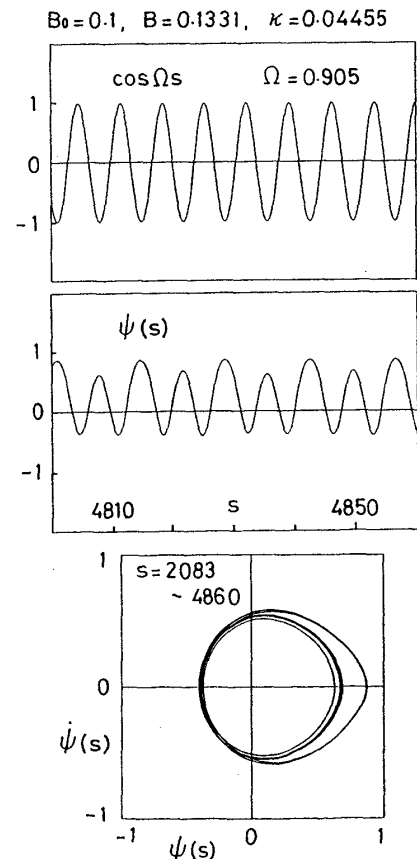


Fig. 8 Phase portrait and time history of chaotic response ($B_0=0.1$)

ころ見付かっていない。Fig. 6~Fig. 8 の位相面で比較すると2周期分岐と4周期分岐,カオスの違いは明瞭であるが,時系列を一見しただけではどれも2周期分岐のように見え,区別はしにくいことが判る。従って Fig. 1 のような実験による観測例が2周期分岐か4周期分岐かまたはカオスであるかは断定できないことになるが,一般に周期分岐が進む程,周期分岐の発生範囲の比がファイゲンバウム定数(=4.6692...)に近づく形で狭くなり,実際の物理現象は観測されにくくなると考えられるので, Fig. 1 のように観測されたものは2周期分岐の可能性が高いものと判断して差し支えないと思われる。いづれにしても,周期分岐が観測されたら転覆の危険が近いと見てよく,周期分岐現象を転覆の前兆と見なす立場が妥当であることが確認されたと考えてよいであろう。

カオスになった場合のポアンカレ写像面におけるカオスアトラクターを Fig. 9 に示す。上の図は位相を $\pi/4$ おきに取ったものであるが,前報の軟化スプリング系の連続なカオスアトラクターとは異なる不連続な4バンドカオスアトラクターになっている。下の図は位相を $\pi/20$ おきに細かく取ったものであるが,詳細な構造を調べてみるとこれはメビウスの帯状をした4バンドカオスアトラクター¹³⁾になっているようにみえる。

$B_0=0$ の対称型転覆方程式について上と同様な方法で分岐図を描いてみると Fig. 10 のようになる。 $B=0.036$ 付近で跳躍が起こり, $B=0.378$ 付近で2周期分岐が始まった後,一連の周期倍分岐からカオスらしきものを経て全面転覆に至っている。ただ周期分岐の始まる前に, $B=0.354$ 付

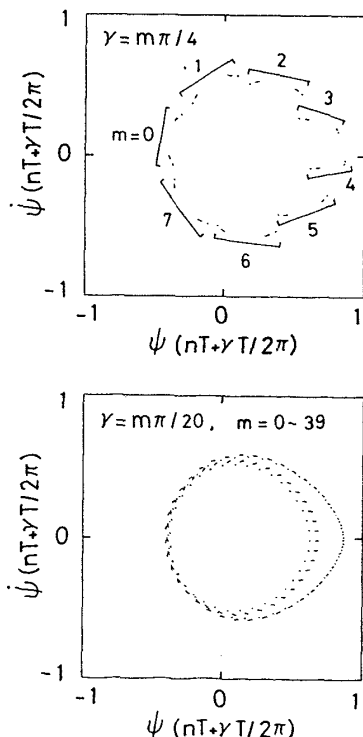


Fig. 9 Chaotic attractor ($B_0=0.1$)

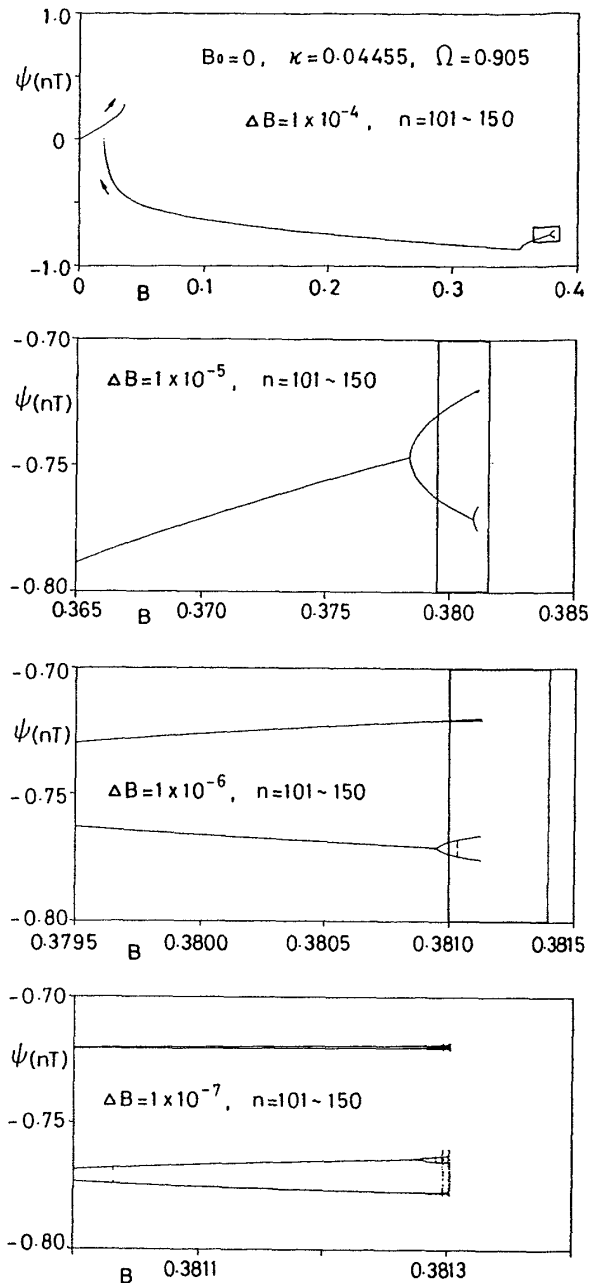


Fig. 10 Feigenbaum bifurcation diagram ($B_0=0$)

近で分岐曲線に不連続な折れ曲がりが生じているが,この折れ曲がりの始まる所から2周期分岐の始まる迄の部分は解の対称性の破れ⁶⁾が起こっている部分である。対称性が破れる前後の位相面を Fig. 11 に示す。対称性の破れが起こるまで,すなわち $0 < B < 0.354$ では位相面はすべて ψ 軸と $\dot{\psi}$ 軸に関して対称である。非対称型転覆方程式の場合には解が非対称であることは言うまでもないが,対称型転覆方程式の場合にも解の対称性が破れて非対称な解が生じないと周期分岐が始まらないようである。対称型転覆方程式の場合,周期分岐が起こっても時系列は Fig. 12 (2周期分岐), Fig. 13 (4周期分岐) のように振幅差が明瞭には区別できないもので,実験で観測されたような振幅差が明瞭な周期分岐現象を説明できるほどのものにはならないよう

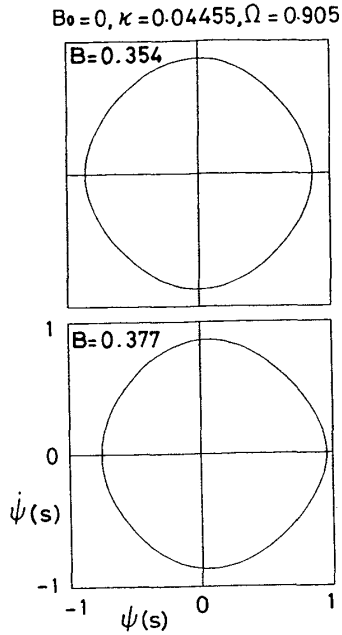


Fig. 11 Phase portraits before and after the break of symmetry ($B_0=0$)

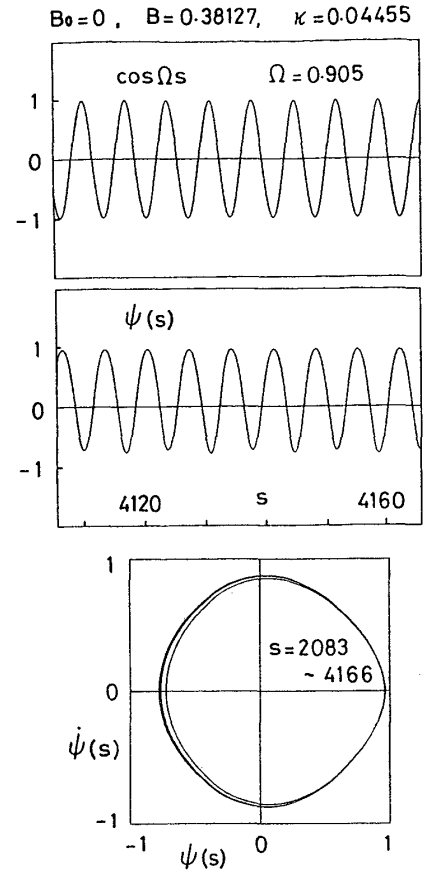


Fig. 13 Phase portrait and time history of period quadrupling bifurcation ($B_0=0$)

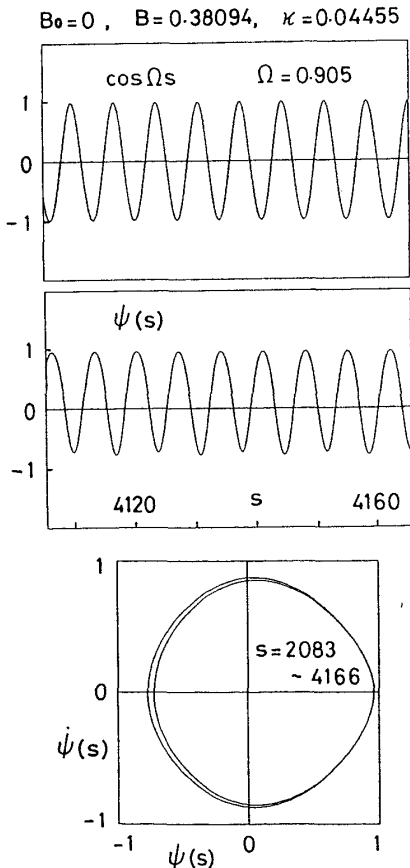


Fig. 12 Phase portrait and time history of period doubling bifurcation ($B_0=0$)

ある。またカオスを含む周期分岐の明白なカスケードは非対称型よりは出現しにくいように見える。

Fig. 5 や Fig. 10 の分岐図においてカオス以外のところ

で縦に点が散らばっている箇所があるが、これは $n=101 \sim 150$, 即ち 101 周期目以降もまだ過渡状態が続いていて定常状態に至っていないためであることが、 $n=50 \sim 70$ 乃至 100 迄の計算結果¹⁴⁾との比較により確認できる。

前報³⁾で Fig. 4 のような不完全な分岐図しか得られなかったのは、 B を変える度にある固定した初期条件のもとにシミュレーションを $s=0$ からやり直すという方法をとったことによるもので、このような方法ではファイゲンバウム分岐を確認することはできないことが判った。しかし、前報でも述べた制御空間における転覆限界のフラクタル性が、単に転覆限界にだけあるのではなく非転覆領域における基本周期解や跳躍解、種々の周期分岐解の境界についても存在することがこの Fig. 4 から推測できる。これはまた初期値平面の非転覆領域においても種々の解の吸引域の境界に同様なフラクタル性の存在することを推測させるものである。それらを確認するためには制御空間や初期値平面における各種の解を区別して階調別または色別表示をする必要があるが今回は実施していない。

4. 初期値平面における転覆限界と転覆安全指数

$\psi(0)$ と $\dot{\psi}(0)$ がつくる初期値平面における非転覆領域 (safe basin) を種々の B_0 と B について描いた図を Fig. 14

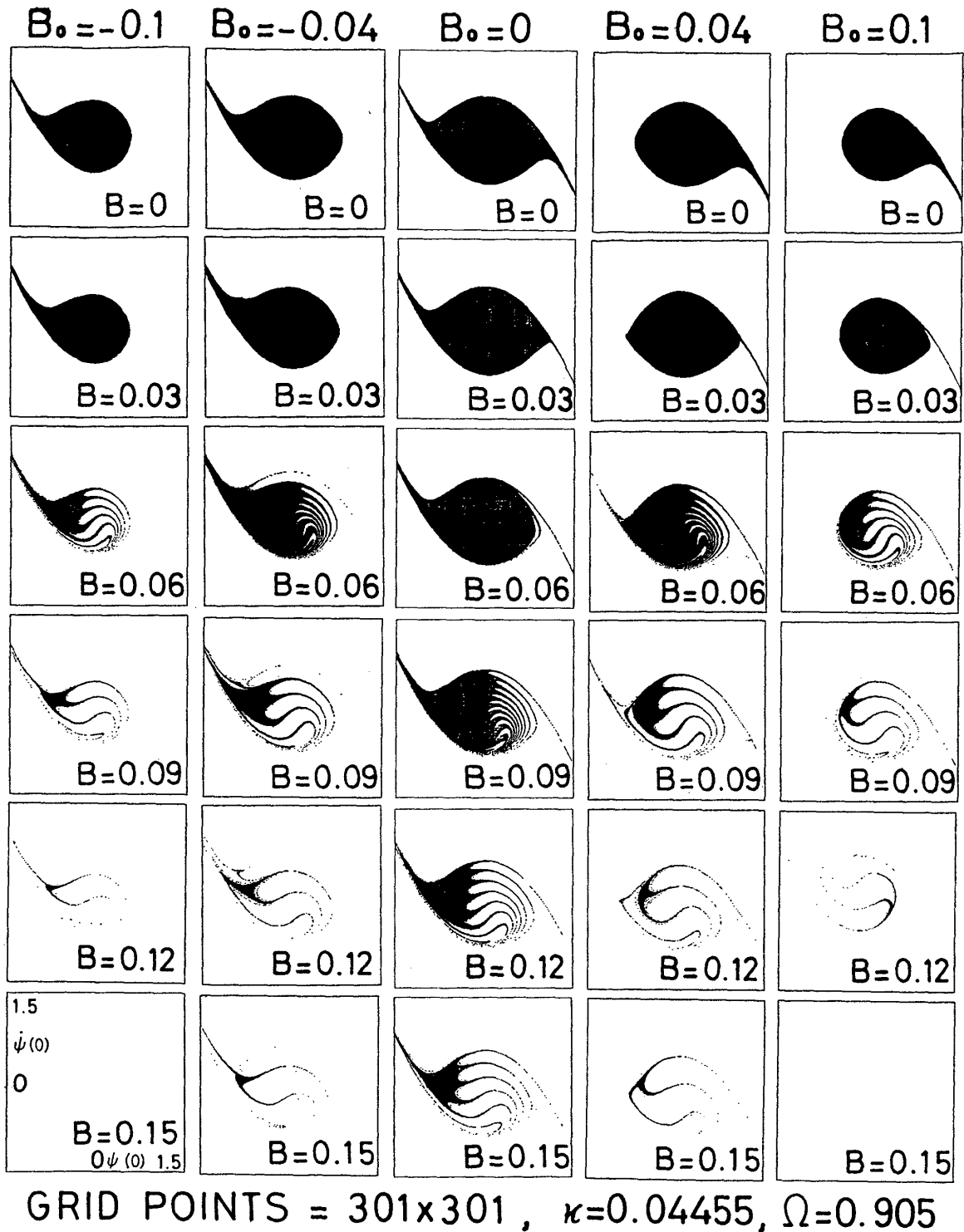


Fig. 14 Fractal metamorphoses of basin boundaries in initial value plane

に示す。この図は、前報³⁾では図の範囲($-1.5 \leq \psi(0) \leq 1.5$, $-1.5 \leq \dot{\psi}(0) \leq 1.5$)を縦横それぞれ300分割してできる $301 \times 301 = 90,601$ 個の点の全てを初期条件として(2)式をRunge-Kutta-Gill法で解いてゆき、強制力の50周期分のところまでに転覆に至ったかどうかを調べ、転覆しなかった初期条件点を黒点で表わし、転覆に至った初期条件点は白点で表わすという方法で求めたものである。この場合

転覆の判定は $|\psi| \geq 2$ としてある。本報では、50周期までの計算結果と20周期までの計算結果と比較して殆ど差がないことが確認されたため、 $B_0 = 0$ 以外はすべて20周期迄の計算で判定し計算時間を節約した。しかしいずれにしてもこれらの方法は転覆しない場合は50周期なり20周期なりの長時間にわたるシミュレーションを必要として膨大な計算時間のかかる原因の一つになっている。これに対し、

Hsu⁽⁷⁻⁹⁾によって開発された Cell-to-Cell Mapping 法は計算量を大幅に減らすことができる効率の良い方法である。例えば Fig. 14 の場合には、図の範囲 $(-1.5 \leq \psi(0) \leq 1.5, -1.5 \leq \dot{\psi}(0) \leq 1.5)$ のやや外側の範囲 $(-1.505 \leq \psi(0) \leq 1.505, -1.505 \leq \dot{\psi}(0) \leq 1.505)$ を縦横それぞれ 301 分割してできる 90,601 個の微小な矩形の全ての中心点を初期条件として (2) 式を Runge-Kutta-Gill 法で強制力の 1 周期分のところまで解くだけ良いという便利な方法である。この場合転覆の判定は、解が考えている変数範囲 $(-1.505 \leq \psi(0) \leq 1.505, -1.505 \leq \dot{\psi}(0) \leq 1.505)$ の外に出た時となる。この方法の詳細は付録 1 に示してあるが、前報の結果との比較により safe basin の形や面積に有意な差はないことが確認されている。Fig. 14 にはこの方法で求めた結果は含まれていないが、今後初期値平面を調べる際にはこの Cell-to-Cell Mapping 法を使用すべきことは明白と思われる。

Fig. 14 によれば $B_0 \neq 0$ の傾斜船の場合も、 $B_0 = 0$ の直立船の場合と同様な転覆限界のフラクタル性が観測される他、当然ながら傾斜モーメント B_0 の絶対値が大きくなるにつれ非転覆領域の面積が小さくなること等が判る。

Fig. 15 は非転覆領域の面積 (転覆安全指数) を $B_0 = B = 0$ の時の面積に対する比として示したものであるが、非対称型の場合も対称型の場合と同様な悪魔の階段に似たフラクタル構造を持つことが確認できる。また非対称型の危険性が顕著であることと、 B_0 の絶対値が同じであれば、 B_0 の符号による差はあまりないこと等が判る。

初期値平面の非転覆領域に転覆領域の細い髭が侵入を開始し、境界のフラクタルな変形が始まる限界は、メルニコフ解析^(10,11)を行うことにより特定することができるが、詳細は付録 2 に示す。

$B = 0$ の場合、すなわち転覆方程式に時間 s が陽な形では入らなくなる自律系の場合には、復原力が消失する不安定釣合点即ち鞍部点 (saddle) からの逆時間シミュレーションでセパトリックスを求める簡単な方法があるが、今回

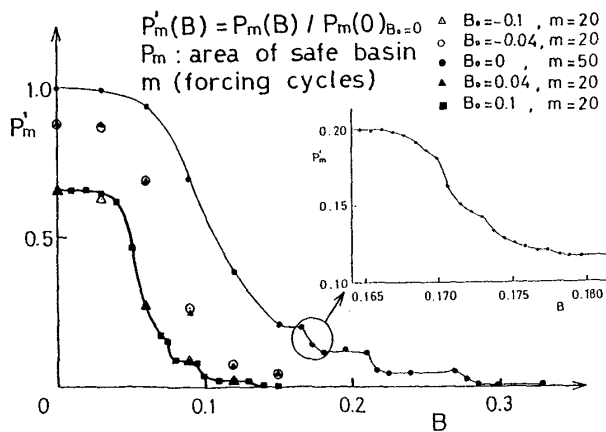


Fig. 15 Safety diagram for capsizing (engineering integrity diagram)

number of cells = 301 x 301
 $B = 0, \kappa = 0.04455, \Omega = 0.905$

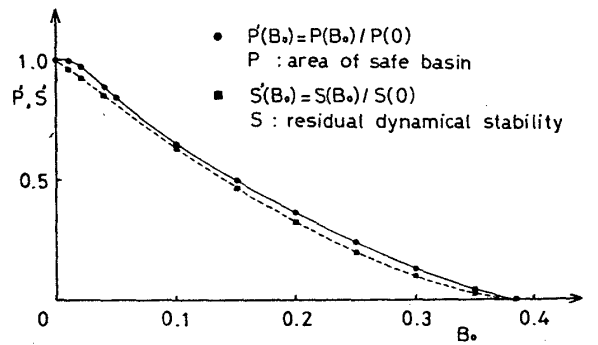
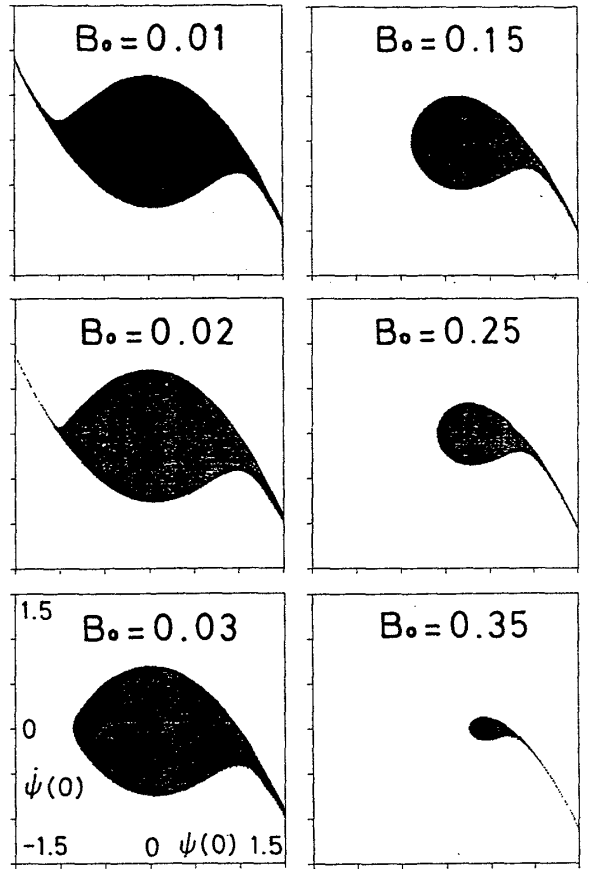


Fig. 16 Safe basin of autonomous case $B = 0$

はその方法は用いず前述の Cell-to-Cell Mapping 法を用いて求めた非転覆領域の変化の様子を Fig. 16 に示す。 $B_0 = 0$ で $\psi \rightarrow \pm\infty$ に伸びていた非転覆領域が、 B_0 を大きくしていくと $-\infty$ の非転覆領域が消えて $+\infty$ の方だけが残るようになるが、そうなる限界の B_0 の値が存在することが判る。Fig. 16 にはまた非転覆領域の面積の B_0 に対する変化を示してあるが、変化の仕方は復原力曲線の面積と同じ傾向の滑らかな形になっている。

6. 制御平面における転覆限界と分岐解析

非対称型転覆方程式について、 $\Omega-B$ の制御平面における転覆領域と非転覆領域の様子を調べた結果を Fig. 17 に

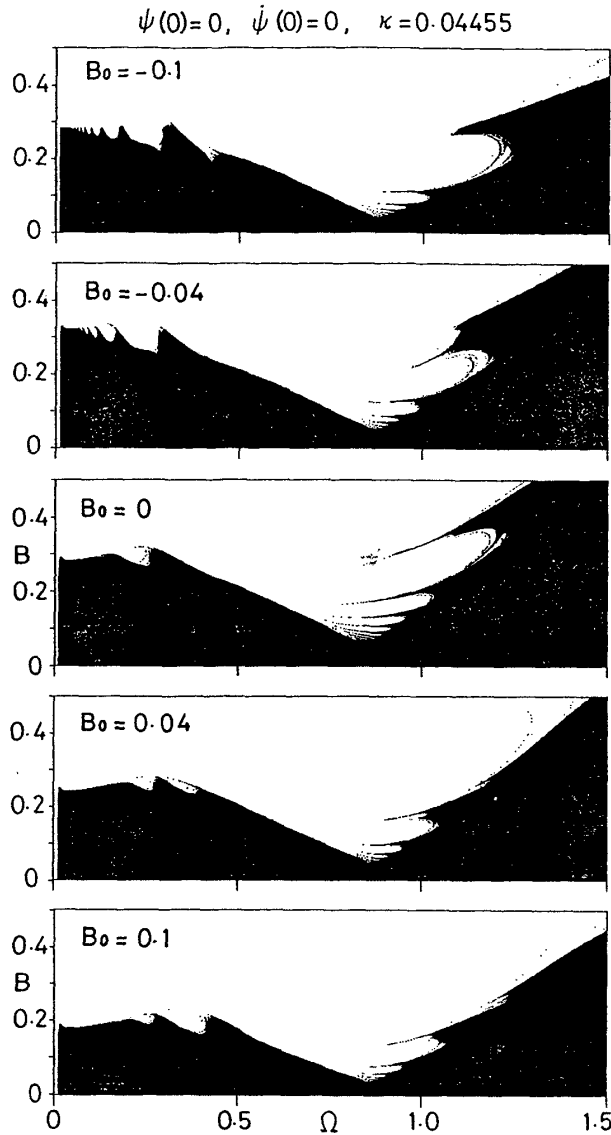


Fig. 17 Fractal boundaries of capsizing and non-capsizing regions in control space

示す。対称型との違いや B_0 の大きさと符号による違い等が判るが、これらは $B_0=0$ の対称型の場合に初期条件を変えることによって現れてくる図⁴⁾と似ているようにみえる。このような制御平面の図において $\Omega > 0.85$ 程度の転覆限界は、フラクタル的な複雑な様相を呈しているが、この範囲での転覆は周期分岐からカオスを経て転覆に至る範囲とされ¹³⁾、転覆限界は近似的にはいわゆる flip 分岐の発生する限界 B_c として求められる。この限界は非対称型転覆方程式(2)についてはまだ求められていないと思われるので以下にその求め方を含めて結果を示しておく。

常微分方程式(2)の解を

$$\psi = \psi_s + r \cos(\Omega s + \varepsilon) + \xi \quad (4)$$

と仮定し、harmonic balance 法を適用すると、 ψ_s, r, ξ に関する次のような関係が求まる。

$$(1-3r^2/2)\psi_s - \psi_s^3 = B_0 \quad (5)$$

$$\{(1-\Omega^2-3r^2/4-3\psi_s^2) + (x\Omega)^2\}r^2 = B^2 \quad (6)$$

$$d^2\xi/ds^2 + x d\xi/ds + (1-3\psi_s^2-3r^2/2)\xi + g(\cos \Omega s, \xi) = f(\cos \Omega s, r, \psi_s) \quad (7)$$

(7)式は ξ に関する強制マシュー方程式の形になっているが、negative stiffness で解が発散しないためには

$$1-3\psi_s^2-3r^2/2 > 0 \quad (8)$$

の条件が必要である。即ち flip 分岐の限界は第1近似として

$$1-3\psi_s^2-3r^2/2=0 \quad (9)$$

と考えてよい。(9)式と(5)式から

$$\psi_s = (B_0/2)^{1/3} \quad (10)$$

が求まり、(10)式と(9)式から

$$r^2 = 2/3 \cdot \{1-3(B_0/2)^{2/3}\} \quad (11)$$

が求まる。(10)式と(11)式を(6)式に代入して flip 分岐の限界の B の値 B_c が次のように求められる。

$$B_c^2 = 2/3 \cdot \{[1-3(B_0/2)^{2/3}]/2 - \Omega^2\}^2 + (x\Omega)^2 \cdot \{1-3(B_0/2)^{2/3}\} \quad (12)$$

この表示式から B_c の第1近似解は B_0 の符号すなわち傾斜の方向に依らないことが判る。 $B_0=0$ の時は前報³⁾の表示と一致する。

$\Omega < 0.85$ 程度の範囲では転覆限界が滑らかな線になっているが、この部分の転覆は横揺れ応答に跳躍等のヒステリシス現象が見られる範囲で、いわゆる fold 分岐の起こる限界 B_A, B_B として vertical tangent の条件¹⁵⁾

$$dB^2/dr^2 = 0 \quad (13)$$

を(6)式に適用して求めることができる。その結果は

$$(1-\Omega^2-3r^2/4-3\psi_s^2)^2 + (x\Omega)^2 - 3/2 \cdot (1-\Omega^2-3r^2/4-3\psi_s^2)r^2 = 0 \quad (14)$$

となる。(14)式の関係を使うと(6)式は

$$B^2 = 3/2 \cdot r^4 (1-\Omega^2-3r^2/4-3\psi_s^2) \quad (15)$$

となる。(5)式と(14)式を満足する r と ψ_s を求めて、それらを(15)式に代入して B_A, B_B を求めることができる。ただし現在までのところ解析的な表示が求まっていないので、数値的に求める必要がある。まず

$$(\psi_s - \psi_s^3 - B_0)/2\psi_s = [-2(3\psi_s^2 - 1 + \Omega^2) \pm \{(3\psi_s^2 - 1 + \Omega^2)^2 - 3(x\Omega)^2\}^{1/2}]/3 \quad (16)$$

を満足する ψ_s を数値的に求め複号の+に対応するものを ψ_{sA} 、-に対応するものを ψ_{sB} とする。その際、

$$\alpha = \cos^{-1}(3^{3/2}B_0/2) \quad (17)$$

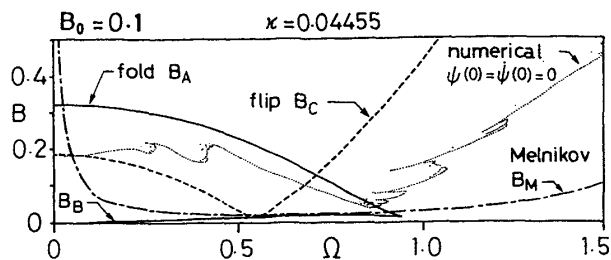
$$\phi_1 = -(2/3^{1/2}) \cos(\alpha/3) \quad (18)$$

$$\phi_2 = (2/3^{1/2}) \cos\{(\pi-\alpha)/3\} \quad (19)$$

$$\phi_3 = (2/3^{1/2}) \cos\{(\pi+\alpha)/3\} \quad (20)$$

とした時 ψ_s は B_0 が正なら $\phi_3 < \psi_s < \phi_2$ 、 B_0 が負なら $\phi_1 < \psi_s < \phi_3$ の範囲にあるものが求める解である。(5)式から ψ_{sA}, ψ_{sB} に対応して r_A, r_B が求まり、それらを(15)式に代入して B_A, B_B が求められる。 B_A が小振幅から大振幅への跳躍、 B_B が大振幅から小振幅への跳躍に対応している。転覆の危険の可能性あるのは B_A の方である。

Fig. 18 に $B_0=0.1$ の場合について、これらの分岐曲線と

Fig. 18 Bifurcation diagram ($B_0=0.1$)

先に静止初期条件のもとに数値的に求めた転覆限界 (Fig. 17) を比較して示してある。対称型の場合^{3),4)}と同様に分岐限界が転覆限界の危険側に入っているが、ある程度の近似にはなっており、安全係数を掛ける等して安全基準として使える可能性は残されているものと考えられる。Fig. 18 中のメルニコフ曲線は付録2の方法で求めたものである。

7. 結 言

斜め追波中の転覆模型実験で観測されたような振幅差の明瞭な2周期分岐という現象が、3次の非線形項を含む簡単な転覆方程式(2)によって表わされることと、この2周期分岐は制御パラメータ値の僅かな変化により分岐が進み、カオスを経て転覆にいたることが確認され、著者等¹⁾が指摘したような周期分岐現象を伴う転覆という新しいパターンの転覆現象が存在し得ることが確認された。また周期分岐現象の発生を転覆の前兆と見なす立場が妥当なものであることが確認できたと考えている。対称型転覆方程式と非対称型転覆方程式に現れる周期分岐やカオス、あるいは転覆限界のフラクタル性等についても両者の類似性と相違を調べた。その結果、一連の周期分岐からカオスを経て転覆にいたるファイゲンバウム分岐は両方程式にともに現れ、当初予想したように非対称型転覆方程式にのみ現れるということはないことが判った。しかし対称型転覆方程式では周期分岐が現れる前に、解の対称性の破れが起こることが明らかとなり、更に対称型転覆方程式で現れる周期分岐は非対称型転覆方程式で現れる周期分岐に比べると、振幅の差があまり明瞭には認められないものとなること等が判った。

以上のように復原力の係数の時間変動を考えなくても復原力項の非線形性のみで、周期分岐現象のような非線形現象の発生することが確認されたが、斜め追波中に航走する船は必ず波による復原力変動を受けるわけであるから、復原力係数の時間変動を考慮したマシュー型の転覆方程式こそが斜め追波中の転覆現象をより本質的に記述する方程式であると考えており、今後対称および非対称のマシュー型転覆方程式を調査する予定である。

非線形力学系理論の最近の発展を船の転覆の問題に応用しようとする試みは、前報以降も増えつつあるが^{16)~20)}、調査・解明すべき課題は多く残されており、なお一層の研究

の進展が望まれるところである。

本研究の遂行にあたっては、京都大学の上田皖亮教授をはじめ、London大学のThompson教授とSoliman博士、米国Virginia大学のNayfeh教授、Duke大学のVirgin教授、New Orleans大学のFalzarano教授等からそれぞれ貴重なご教示と激励を頂き、また未公表の論文原稿をはじめ多くの最新情報を提供して頂いている。本報告はこれらの先駆的な研究に負うところが多く、またその数学的な意味を十分に理解しないまま手法だけを利用したところもある。記して感謝の意を表明するとともに、不正確な記述や誤りがあれば責任はすべて著者等にあることをお断りします。

参 考 文 献

- 菅 信, 猿田俊彦, 田口晴邦, 安野三樹雄: 斜め追波中の船の転覆について (第1報, 転覆機構に関する模型実験), 日本造船学会論文集, 第167号, (1990.6), pp.81-90.
- Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B.: Nonlinear Dynamics and Chaos, John Wiley & Sons, 1986, (邦訳, 武者利光監訳, 橋口住久訳: 非線形力学とカオス, 初版, オーム社, 1988, pp.277-281).
- 菅 信, 田口晴邦: 斜め追波中の船の転覆について (第2報, 転覆現象におけるカオスとフラクタル), 日本造船学会論文集, 第168号, (1990.12), pp.213-222.
- 菅 信, 田口晴邦: 船の転覆限界の制御空間におけるフラクタル性について, 西部造船会会報, 第81号, (1991.3).
- Virgin, L. N.: The nonlinear rolling response of a vessel including chaotic motions leading to capsize in regular seas, Applied Ocean Research, Vol. 9, No. 2, (1987), pp. 89-95.
- Nayfeh, A. H. and Sanchez, N. E.: Chaos and dynamic instability in the rolling motion of ships, Proceedings of 17th Symposium on Naval Hydrodynamics, Hague, (1988. 8), pp. 87-100.
- Hsu, C. S.: A Theory of cell-to-cell mapping dynamical systems, J. Applied Mechanics, Vol. 47, (1980. 12), pp. 931-939.
- Hsu, C. S. and Guttalu, R. S.: An unravelling algorithm for global analysis of dynamical systems: An Application of cell-to-cell mappings, Trans. ASME, Vol. 47, (1980. 12), pp. 940-948.
- Hsu, C. S.: Cell-to-Cell Mapping, A Method of Global Analysis for Nonlinear Systems, Springer-Verlag, 1987.
- Moon, F. C.: Chaotic Vibrations, Wiley-Interscience, 1987, 1st edition, pp. 172-181.
- Guckenheimer, J. and Holmes, P.: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 2nd print., 1985, pp. 184-204.
- 菅 信, 猿田俊彦, 石田茂資, 田口晴邦: 斜波中の船速低下に関する模型実験 (第1報, 短波長規則波

- 中の船速低下), 第 58 回船舶技術研究所研究発表会概要集, (1991.11, 予定).
- 13) Thompson, J. M. T.: Chaotic phenomena triggering the escape from a potential well, Proc. Royal Soc. Lond., A421, (1989), pp. 195-225.
 - 14) 菅 信, 田口晴邦: 傾斜船の転覆現象におけるカオスとフラクタル, 第 56 回船舶技術研究所研究発表会概要集, (1990.11), pp. 94-99.
 - 15) Hayashi, C.: Nonlinear Oscillations in Physical Systems, Princeton University Press, 1985, pp. 123.
 - 16) Soliman, M. S.: An analysis of ship stability based on transient motions, Proceedings of 4th Inter. Conf. on Stability of Ships and Ocean Vehicles, Naples, (1990. 9).
 - 17) Falzarano, J. F. and Troesh, A. W.: Application of modern geometric methods for dynamical systems to the problems of vessel capsizing with water-on-deck, Proceedings of the 4th Inter. Conf. on Stability of Ships and Ocean Vehicles, Naples, (1990. 9).
 - 18) Thompson, J. M. T., Rainey, R. C. T. and Soliman, M. S.: Ship stability criteria based on chaotic transients from incursive fractals, Phil. Trans. R. Soc. Lond., A332, (1990), pp. 149-166.
 - 19) Soliman, M. S. and Thompson, J. M. T.: Transient and steady state analysis of capsize phenomena, Applied Ocean Research, 1990 (to appear).
 - 20) Sanches, N. E. and Nayfeh, A. H.: Nonlinear rolling motions of ships in longitudinal waves, Int. Shipbuild. Progr., Vol. 37, No. 411, (1990), pp. 247-272.

付録 1. Cell-to-Cell Mapping 法による初期値平面の非転覆領域の求め方

Cell-to-Cell Mapping 法⁷⁾⁻⁹⁾は実験における計測精度の限界や, 数値計算における丸め誤差によって, 状態変数 (state variable, 転覆方程式 (2) の場合 $\psi, \dot{\psi}$) を真に連続した点の集まりとしてではなく, 非常に小さい区間の集まりとしてしか扱えないことに基づいて考案されたもので, 非線形力学系において共存する全ての定常解とそれらの捕捉領域を一度に近似的に求めることのできるものとされている。またこの手法では, 初期値平面を分割して出来る各々のセル (cell) について強制力の 1 周期だけ数値計算を行えばよく計算時間を大幅に減らすことができる。以下その概略を転覆方程式 (2) に適用した場合を例に説明する。

いま調べる初期値平面 ($-1.5 \leq \psi(0) \leq 1.5, -1.5 \leq \dot{\psi}(0) \leq 1.5$) を囲む $-1.505 \leq \psi(0) \leq 1.505, -1.505 \leq \dot{\psi}(0) \leq 1.505$ の範囲を縦横それぞれ 301 分割して出来る 90,601 個のセルを考える (Fig. A1 参照)。これらのセルをレギュラーセル (regular cell) と呼ぶ。そして各々のセルを 2 つの整数の組合せ $Z(Z_1, Z_2)$ で識別することにする。 Z_1, Z_2 は, セル

の中心の座標を $(\psi(0), \dot{\psi}(0))$ とすると次式で与えられる。

$$\psi(0) = h_1 \times Z_1, \quad \dot{\psi}(0) = h_2 \times Z_2 \quad (A1)$$

但し, h_1, h_2 は各々の方向の分割の幅で今回は両方とも 0.01 である。

また囲った範囲外も 1 つのセルと考え, シンクセル (sink cell, Z_s) と呼ぶ (Fig. A1 参照)。

次に Mapping C を決定するために, 90,601 個のレギュラーセルの各々の中心の座標を初期条件として (2) 式を強制力の 1 周期分だけ Runge-Kutta-Gill 法で解き, 1 周期後の解 $(\psi(T), \dot{\psi}(T))$ を求めてその解がどのセルに含まれるかを調べる。そして元のセルが Mapping C によって 1 周期後にそのセルに移されると考える。

更に各々のセルにはその性質を示す 3 つの指数 (特性指数と呼ぶ), すなわちグループ数 (group number, G_r), 周期数 (periodicity number, P), ステップ数 (step number, S) を付ける。グループ数は 1 つの定常解とその捕捉領域を示すセルの集合に, 見付けられた順に 1 つずつ付けられる数である。周期数はその定常解の周期を示し, 基本周期解の場合は 1 となる。そしてステップ数はその捕捉領域を示すセルが定常解を示すセルに移されるのに何回 Mapping が必要かを示すもので, そのセルが定常解を示すセルなら 0 となる。そして全てのセル Z について Mapping C を繰り返して出来るセルの数列

$$Z \rightarrow C(Z) \rightarrow C^2(Z) \rightarrow \dots C^m(Z) \rightarrow \dots \quad (A2)$$

を追跡してこれら 3 つの特性指数を決定することによって (2) 式で表わせる非線形力学系の全ての定常解とそれらの捕捉領域を求めることができる。

次にこれらの指数の具体的な求め方を説明する。まず各セルについて (A2) 式のように Mapping を繰り返すが, 各ステップで移された先のセルには 3 種類あり各々の場合次のような処理をする。そのセルを $C^i(Z)$ とすると

[1] $C^i(Z)$ が特性指数も決まっておらず, それまでの Mapping にも現れなかった場合, このセルを処女セル

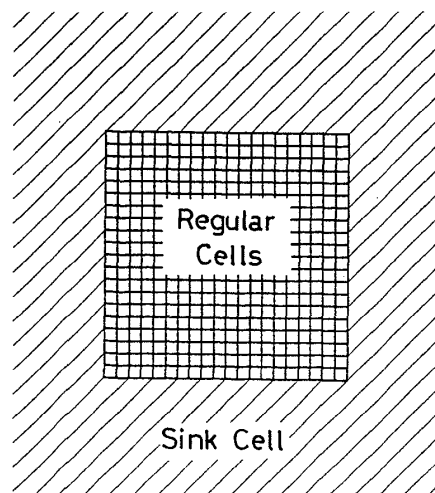


Fig. A1 Regular cells and sink cell

(Virgin cell) と呼ぶが、その時は Mapping を続ける。

- [2] $C^i(\mathbf{Z})$ が特性指数が決まっている場合。つまりそれまでの Mapping で現れたセルは、既知の定常解の捕捉領域であることになる。その時は、それまでの Mapping で現れたセルに $C^i(\mathbf{Z})$ と同じグループ数と周期数を付ける。またステップ数は次のように付ける。

$$S(C^i(\mathbf{Z})) = S(C^i(\mathbf{Z})) + i - j, j = 0, 1, 2, \dots, i \quad (\text{A } 3)$$

そして Mapping は止める。

- [3] $C^i(\mathbf{Z})$ が特性指数は決まっていないが、それまでの Mapping に現れたセルの場合。つまりそれまでの Mapping で現れたセルに周期解が含まれており、それは新しく見付けられた定常解であることになる。その時は $C^i(\mathbf{Z}) = C^j(\mathbf{Z}), j < i$ とするとそれまでの Mapping で現れたセルの周期数は $i - j$ となり、グループ数は 1 つ大きい数を付ける。またステップ数は次のように付ける。

$$S(C^k(\mathbf{Z})) = j - k, k = 0, 1, 2, \dots, j - 1$$

$$S(C^k(\mathbf{Z})) = 0, k = j, j + 1, \dots, i - 1 \quad (\text{A } 4)$$

そして Mapping は止める。

このような処理をまづシンクセルから始める。 $C(Z_s) = Z_s$ より $G_r(Z_s) = 1, P(Z_s) = 1, S(Z_s) = 0$ となる。次に左下のセルから順々に Mapping を繰り返し各ステップ毎に上記の処理を行い全てのセルの特性指数を決定する。全てのセルの特性指数が求まれば、あとは同じグループ数のセルを同一色または同一階調でプロットすることにより、解の捕捉領域を描くことができる。その中でステップ数零のセルがアトラクターである。何周期解かは周期数を見れば判る。非転覆領域はグループ数 $G_r \neq 1$ のセルをプロットすればよい。実際に Fig. 14 の $B_0 = 0, B = 0.15$ と同じ非転覆領域を Cell-to-Cell Mapping 法で描いたのが Fig. A2 である。Fig. 14 と比較して差異はほとんど無いことが判る。また計算時間は Fig. 14 の約 1/6 程度である。以上のことから Cell-to-Cell Mapping 法が近似計算でありながら、充分の

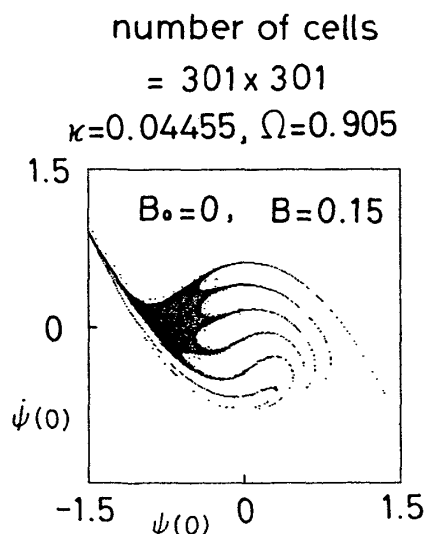


Fig. A2 An example of safe basin by Cell-to-Cell Mapping method

精度があり計算時間も大幅に短縮できる非常に有益な手法であることが判る。

付録 2. メルニコフ解析の数値的方法

$\psi(0) - \dot{\psi}(0)$ の初期値平面における非転覆領域に転覆領域の細かい髭が侵入を始め、境界にフラクタルな変形が始まる限界条件は、ポアンカレ断面における鞍部点の安定多様体と不安定多様体が無限回のホモクリニックな横断的交差を始める条件としてメルニコフ法と呼ばれる方法で求められる^{10), 11)}。この条件はまた、カオスの発生に対して充分条件ではないが、必要条件を与えるものであり、 $B - \Omega$ の制御平面の分岐ダイアグラム (Fig. 18) には描き入れておくことが望ましい。対称型転覆方程式については前報³⁾で解析解を求めているが、非対称型転覆方程式については現在までのところ解析解は求められていない。そこで以下に数値的に求める方法を示しておく。この方法は解析解の求められない場合にも一般的に使えるものであり有用なものと考えられる。

非対称型転覆方程式 (2) に対応する保存系 ($x = 0$) の非強制方程式 ($B = 0$) は

$$d^2\psi/ds^2 + \psi - \psi^3 = B_0 \quad (\text{A } 5)$$

である。(A 5) 式の静的平衡点は

$$\psi - \psi^3 - B_0 = 0 \quad (\text{A } 6)$$

の解として求められ、3 根とも実根の場合を考えるものとする、それらは本文の (17) ~ (20) 式で表わされる。 ψ_3 が安定平衡点で、 ψ_1 が負側の不安定平衡点、 ψ_2 が正側の不安定平衡点である。(A 5) 式の解軌跡は

$$\dot{\psi}^2 = -\psi^2 + \psi^4/2 + 2B_0\psi + C \quad (\text{A } 7)$$

と書ける。不安定平衡点を通る解軌跡すなわちセパトリックスは Fig. A3 のようになる。ホモクリニック軌道は ψ_2 を通る方のセパトリックスである。そのときの定数 C は

$$C = \psi_2^2 - \psi_2^4/2 - 2B_0\psi_2 \quad (\text{A } 8)$$

と求まる。

$$C = \psi_0^2 - \psi_0^4/2 - 2B_0\psi_0 \quad (\text{A } 9)$$

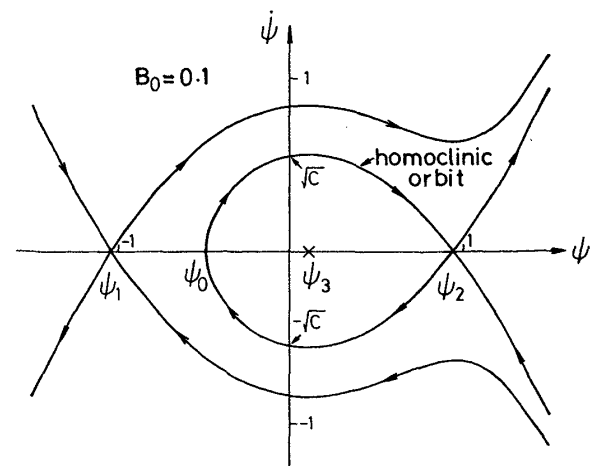


Fig. A3 Homoclinic orbit of Hamiltonian problem

を満足する ψ_2 以外の解を ψ_0 とする。ホモクリニック軌道を時間 s を媒介変数として求めるための条件は

$$s \rightarrow \pm\infty \text{ で } \psi = \psi_2, \dot{\psi} = 0 \quad (\text{A } 10)$$

$$s = 0 \text{ で } \psi = \psi_0, \dot{\psi} = 0 \quad (\text{A } 11)$$

$$s = \pm s_0 \text{ で } \psi = 0, \dot{\psi} = \pm C^{1/2} \quad (\text{A } 12)$$

である。ただし s_0 は $\dot{\psi}$ 軸を切る時間である。これらの条件 (A 10)~(A 12) と (A 7), (A 8) を満足するホモクリニック軌道を見出すことがメルニコフ解析のひとつの鍵である。

$$\psi = \psi_2 - 2(\psi_2 - \psi_0)/(1 + \cos h^3 \sigma s) \quad (\text{A } 13)$$

$$\sigma = 2C(\psi_2 - \psi_0)/[3\psi_2^2(1 - 2\psi_0/\psi_2)^{2/3} \cdot \{(1 - 2\psi_0/\psi_2)^{2/3} - 1\}^{1/2}] \quad (\text{A } 14)$$

の形がかなり真の解に近そうなことは判ってきたが、現在までのところ正確な解は求まっていない。そこで数値的に求めることを考える。

(A 5) 式の Hamiltonian H は次式で表わされる。

$$H = (\dot{\psi}^2 + \psi^2 - \psi^4/2 - 2B_0\psi)/2 \quad (\text{A } 15)$$

元の非保存系の強制方程式 (2) を

$$d\psi/ds = \partial H/\partial \dot{\psi} + \varepsilon g_1 \quad (\text{A } 16)$$

$$d\dot{\psi}/ds = -\partial H/\partial \psi + \varepsilon g_2$$

と表わすと、 $\delta = 0$ の時を扱っているから

$$\varepsilon g_1 = 0 \quad (\text{A } 17)$$

$$\varepsilon g_2 = B \cos \Omega s - x\dot{\psi}$$

である。 B, B_0, x も ε のオーダーの微小量であるとして

$$B = \varepsilon B', \quad B_0 = \varepsilon B_0', \quad x = \varepsilon x' \quad (\text{A } 18)$$

と表わす。

メルニコフ関数 M は安定多様体と不安定多様体の間の距離を表わす尺度として次式で定義される。

$$M(s_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^* \cdot \nabla H(\psi^*, \dot{\psi}^*) ds \quad (\text{A } 19)$$

ここに $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}(\psi^*, \dot{\psi}^*, s + s_0) = (g_1, g_2)$ であり、 $\psi^*, \dot{\psi}^*$ は保存系の非強制方程式 (A 5) のホモクリニック軌道であることを示すため、あらためて * 印を付けて表わした。

$$\mathbf{g}^* = \{0, B' \cos \Omega(s + s_0) - x' \dot{\psi}^*\}$$

$$\nabla H = (\dot{\psi}^* - \psi^{*3} - B_0, \dot{\psi}^*) \quad (\text{A } 20)$$

であるから

$$M(s_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{B' \dot{\psi}^* \cos \Omega(s + s_0) - x' \dot{\psi}^{*2}\} ds \quad (\text{A } 21)$$

で表わされる。 $\dot{\psi}^*$ は s に関して反対称であるから

$$M(s_0) = -2B' \sin \Omega s_0 \int_0^{\infty} \dot{\psi}^* \sin \Omega s ds - 2x' \int_0^{\infty} \dot{\psi}^{*2} ds \quad (\text{A } 22)$$

となる。メルニコフ値 B_M はメルニコフ関数 $M(s_0)$ が単純零点を持つ限界条件として

$$B_M = x \int_0^{\infty} \dot{\psi}^{*2} ds \Big/ \left| \int_0^{\infty} \dot{\psi}^* \sin \Omega s ds \right| \quad (\text{A } 23)$$

と求められる。 $\dot{\psi}^*$ は一般に (A 13) 式の近似式の形からも判るように、時間 s に関して減衰の早い形になっているので、打ち切り誤差を無視出来なくなるような特別な場合を除いて (A 23) 式の無限積分を数値的に求めるのに大きな

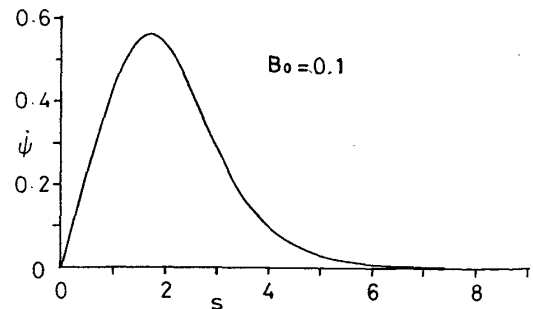


Fig. A4 An example of $\dot{\psi}$ versus s

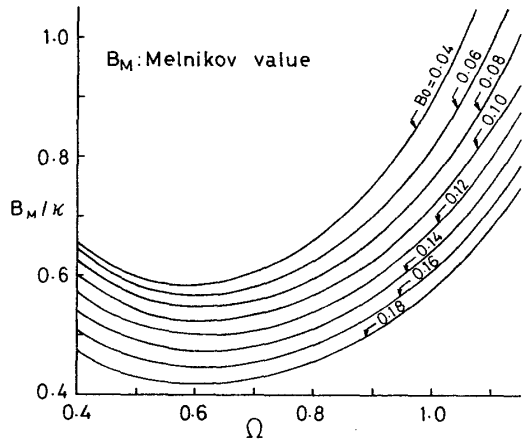


Fig. A5 Curves of Melnikov value

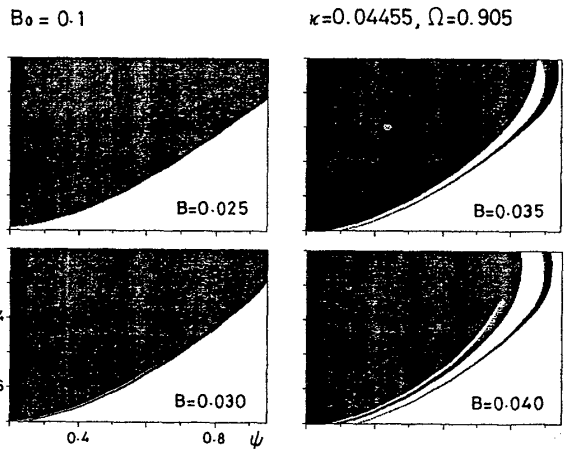


Fig. A6 Beginning of fractal metamorphoses of basin boundary in the vicinity of Melnikov value

困難はないと思われる。 $\dot{\psi}^*$ は (A 5) 式を (A 11) 式の初期条件のもとに Runge-Kutta 法等で数値的に解くことにより求められる。Fig. A4 に $\dot{\psi}^*$ の例を示す。(A 9) 式を満足する ψ_0 は次式で求める。

$$\psi_0 = -\psi_2 [1 - (1 - 2C/\psi_2^4)^{1/2}] \quad (\text{A } 24)$$

このようにして求めたメルニコフ値 B_M/x の例を Fig. A5 に示しておく。

$B_0 = 0.1$ の場合については $B_M = 0.028$ ($x = 0.04455, \Omega = 0.905$ の場合) と求められるが、この値の近傍から非転覆領域の中に転覆領域の細い髭が侵入を始めることを確認する図を Fig. A6 に示しておく。