$$\partial_+ \partial_- f_n - 1/P_n (a_n + \partial_+ \ln g_{n+1}) f_{n-1} - P_n (b_n + \partial_- \ln g_n) f_{n+1}$$

$$- [1 + (a_n + \partial_+ \ln g_{n+1})(b_n + \partial_- \ln g_n)] f_n = 0 \qquad (\partial_- a_n = 0, \quad \partial_+ b_n = 0) \tag{16}$$

と与えられる.

この方程式の解が多次元戸田格子の解となる十分条件は以下の様にして決められる. 即ち;

$$F_n^{\ +} \equiv \partial_+ f_n - P_n f_{n+1} - q_n f_n \tag{17}$$

$$F_n^{\ -} \equiv \partial_- f_n - \frac{1}{P_n} f_{n-1} - r_n f_n \tag{18}$$

と定義する。Recurrence Formulaeは $F_n^{\ \pm} = 0$.

(17), (18)の両辺を微分して, 線形化された方程式を用いると

$$\partial_+ F_n^{\ -} + \frac{1}{P_n} F_{n-1}^{\ +} + r_n f_n^{\ +} = 0 \tag{19}$$

$$\partial_- F_n^{\ +} + P_n F_{n+1}^{\ -} + q_n F_n^{\ -} = 0 \tag{20}$$

を得る. この二つの式は, もし, $n = n_0 < \infty$ に対して

$$F_{n_0}^{\ +}(x, y) = 0, \quad {}^{\forall} x, \ y$$

ならば

$$F_n^{\ \pm}(x, y) = 0, \quad {}^{\forall} n, \ x, \ y$$

であることを示している. 従って, (16)の解のうち, ある一点でRecurrence Formulaeを満たす様に決めてやったすべての解は任意の n についてRecurrence Formulaeを満たすから, 多次元戸田格子の新たな解である.

Ref. 1) 斎藤, 瀧澤, 武野 : 物性研究 45−1 (1985−10) 12.

Spherical Boussinesq Equation と Classical Boussinesq Equation の関係

広大・工　広　田　良　吾

Spherical Boussinesq equation

$$w_{tt}+\frac{2}{t}w_t-3(w^2)_{xx}-w_{xxx}=0 \tag{1}$$

は Dependent variable transformation

$$w=2(\log f_n)_{xx} \tag{2}$$

によって，次の2次形に変換される

$$\left(D_t^{\,2}+\frac{2}{t}\frac{\partial}{\partial t}-D_x^{\,4}+C_n\right)f_n\cdot f_n=0 \tag{3}$$

この式は，多項式解をもち，(1)式の解は“Explode-decay solitary wave solution”になることが A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) 11 によって示されている。

一方，Classical Boussinesq equation

$$\begin{cases} v_t=[(1+u)v+v_{xx}]_x & (4.\ a) \\ v_t=(u+\frac{1}{2}v^2)_x & (4.\ b) \end{cases}$$

は Dependent variable transformation

$$\begin{cases} v=-1+2[\log(fg)]_{xx}, & (5.\ a) \\ v=2[\log(f/g)]_x & (5.\ b) \end{cases}$$

によって，次の2次形式に変換される．

$$\begin{cases} (D_t-D_x^{\,2})f\cdot g=0, & (6.\ a) \\ (D_xD_t-D_x^{\,3})f\cdot g=0. & (6.\ b) \end{cases}$$

ここで similarity variable Z を導入する。

$$Z=\frac{x}{\mathrm{i}(2t)^{1/2}} \tag{7}$$

Z を用いると(3), (6. a), (6. b)式はそれぞれ次のようになる。

$$\left(D_z^{\,4}-Z^2D_z^{\,2}+Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}-4n^2\right)f_{2n-1}\cdot f_{2n-1}=0, \tag{8}$$

$$\begin{cases} (D_z^{\,2}+ZD_z)f_{2n}\cdot\hat{f}_{2n}=0, & (9.\ a) \\ (D_z^{\,3}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}+ZD_z^{\,2})f_{2n}\cdot\hat{f}_{2n}=0. & (9.\ b) \end{cases}$$

方程式(8)，(9. a)，(9. b)の解は Wronskian W を用いて，次の形に表現できる。

$$f_n = W(H_n(Z),\ H_{n-1}(Z),\ \cdots,\ H_{n-[(n-1)/2]}(Z))。 \tag{10}$$

ここで $H_n(Z)$ は Hermite function で次の微分方程式を満する

$$y'' - xy' + ny = 0 \tag{11}$$

$[n]$ は Gauss の記号で n を越えない最大の自然数を表わす。
$\hat{f}_n$ は次の式で定義される。

$$D_z f_{2n-1} \cdot f_{2n+1} + (-1)^{[n/2]}(2n+1)n' \cdot f_{2n}\hat{f}_{2n} = 0. \tag{12}$$

(10)式は Spherical Bonssinesq equation の解は奇数次の $H_n(Z)$ から始まる Wronskianで表現され，Classical Bonssinesq equationの解は偶数次の $H_n(Z)$ から始まる Wronskian で表現されることを表わしている。両者の関係は(12)式によっても示されている。

一方 Classical Boussinesq equation は Mondified K P 方程式の reduction である (R. Hirota, J. Phys. Soc, Jpn, **54** (1985) 2409)ことが知られている。これを利用すると，(6. a)，(6. b)式の解は次の Wronskian 形式に書き表わされる

$$f = W(\phi(0),\ \phi(1),\ \cdots,\ \phi(n)) \tag{13. a}$$

$$g = W(\phi(0),\ \phi(1),\ \cdots,\ \phi(n),\ \phi(n+1)) \tag{13. b}$$

ここで

$$\phi(m) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \phi(0) \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(n) = -\phi(n+2) \tag{15}$$

である。(10)式と(13. a)式を見較べると $\phi(0)$ が Hermite function $H_n(Z)$ に対応していることがわかる。これを示すために，

$$Z = \frac{x}{\sqrt{-2t}}, \tag{16}$$

$$\phi(0) \propto (-t)^{\frac{n}{2}} \phi_n(Z) \tag{17}$$

とおくと，(15)式より$\phi_n(Z)$に対する方程式は

$$\phi_n''(Z) - Z\phi_n'(Z) + n\phi_n(Z) = 0$$

となり，$\phi_n(Z) = H_n(Z)$ であることが分る。

多次元Modified-Boussinesq方程式のソリトン解

横浜国大・工　松川倫明，渡辺慎介，田中　裕

§1　Introduction

一次元ソリトンの研究は，現在では，やり尽くされた感があるが，多次元ソリトンの研究はKP方程式や2次元戸田格子等の場合を除いて，解明されていない問題点が多いと思われる。我々は，MK-dV方程式やM-B(Boussinesq)方程式の次元を拡張して，多次元のソリトン解を，広田の方法を適用して，調べた。次に，上述の二つの方程式の間の関係を無限小変換のLieの方法を適用して，考察した。なお，我々の結果は，nonlinear-schrödinger方程式とnonlinear-klein-Gordon方程式系に対するTajiri[1)]の結果と類比的である。

§2　多次元M-B方程式のソリトン解

2DM-B方程式

$$u_{tt} = u_{xx} + 8(u^3)_{xx} + u_{xxxx} + u_{yy} \tag{1}$$

に対し，次の従属変換をほどこして，

$$u = (\tan^{-1} g/f)_x \tag{2}$$

双線形形式で表わすと

$$\begin{cases} (D_t^2 - D_x^2 - D_x^4 - D_y^2)\, g\cdot f = 0 \\ (D_t^2 - D_x^2 - D_x^4 - D_y^2)\,(f\cdot f - g\cdot g) = 0 \\ D_x^2 (f\cdot f + g\cdot g) = 0 \end{cases} \tag{3}$$