《論　文》

論 18-7

Radial Basis Function による電気機器の最適設計†

石　川　赴　夫*・堀　江　　淳**

ABSTRACT This paper proposes a method for design optimization of electromagnetic devices. It is based on radial basis functions. This method has following advantages: (a) A nonlinear mapping function from multiple input data to multiple output data is automatically constructed in the network. (b) The trained network can quickly estimate appropriate output data even for unlearned patterns. (c) The operation of the trained network requires only the computational power of a personal computer. We combine the radial basis function and the singular value decomposition method to eliminate the influence of measurement noise or numerical error. Moreover, we iterate this method to improve the accuracy. A die mold for orientation of magnetic powder is optimized by using this method.

1. まえがき

近年，電気・電子機器の逆問題，最適化問題について様々な方法が発表されている．例えば，目的関数の微係数を利用して解の探索を行う降下法としては，最急降下法，共役勾配法，ニュートン法，逐次二次計画法等がある．直接探索法としては，ニューラルネットワーク法，遺伝的アルゴリズム法，エボリューション法，シミュレーティッドアニーリング法，サンプルドパターンマッチング法，Rosenbrock 法等がある[1]．一般に直接探索法は降下法に比べて，解の収束性は悪いが，解の振動や発散，局所的な極小値の問題は少ないと言われている．直接探索法の内，ニューラルネットワークを利用した方法は，離散的な入出力の関係を学習させることで，人工的なニュートラルネットワークを構築し，未知の入出力パターンに対しても妥当な解を得ようとするものである．この方法は入出力パターンを学習する手順と，学習後のネットワークを用いて逆問題解析を行う手順とに分かれている．時間のかかる部分は学習パターンの生成とその学習であり，一旦入出力の関係を学習させてしまえば，そのネットワークを用いて短時間に何度でも解析を行うことが出来るという特徴を持っている．しかし，学習アルゴリズムには一般にバックプロパゲーション法が使用されるために収束が遅い，局所的な極小値に陥る場合がある等の問題がある．

Radial Basis Function (RBF) による方法[2,3]は，ニューラルネットワーク法の一つであり，ニューラルネットワーク法と同様の長所を持つ解析法である．すなわち，RBF 法も幾つかの入出力パターンのデータから未知パターンの予想を行うために，一度入出力パターンのデータを作成して入出力の写像関係を求めてしまえば，何度でも少量の計算を行うだけで解析を行うことができる．更に，RBF 法の学習は連立一次方程式の解法となり，局所的な極小値の問題はない．しかし，RBF 法は次の欠点を持っていると言うことができる．すなわち，1) 入出力パターンを全て通過するために，測定ノイズや数値計算誤差が入出力パターンに含まれた場合，これらも考慮した学習を行ってしまう．これは，ニューラルネットワーク法の過学習の状態に似ている．2) 精度に多少の問題がある．

本論文は以下の2つの方法を取り入れることにより，これらの欠点を克服することを試みたものである．すなわち，1) 特異値分解法と組み合せることにより，測定ノイズや数値計算誤差の影響を少なくする．2) 反復計算を行うことにより，測定ノイズや数値計算誤差の影響を少なくする，2) 反復計算を行うことにより，精度を改善する．更に，提案した方法を磁石成形用金型の設計に適用し，その有効性を示す．

Optimal Design of Electric Devices Using Radial Basis Funcstions. By *Takeo Ishikawa* (Faculty of Engineering, Gunma University) and *Jun Horie* (Graduate School of Engineering, Gunma University).

*群馬大学工学部電気電子工学科
**群馬大学大学院工学研究科

†1998年8月12日受付　1999年1月13日再受付

2. 最適化手法

2.1 Radial Basis Functions[2,3]

RBFネットワークはニューラルネットワークの一つであり，主に関数近似に利用されている．本論文では，最適化問題をRBFを用いた内挿問題ととらえる．すなわち，入力ベクトルである数値ベクトル群$\{x_i \in R^n | i=1,\cdots,N\}$と，出力である数値群$\{y_i \in R | i=1,\cdots,N\}$とを円形の等高線を持つ基底関数を利用して関連付けるものである．入力データ以外の点xにおける出力は次式で表される．

$$F(x)=\sum_{j=1}^{N} c_j h(r), \tag{1}$$

$$r=\|x-x_i\| \tag{2}$$

ここで，$h(r)$はRBFと呼ばれる関数であり，次のようなものが提案されている．

$$h(r)=r, \tag{3}$$

$$h(r)=e^{-(r/c)^2}, \tag{4}$$

$$h(r)=\frac{1}{(c^2+r^2)^{\alpha}} \quad \alpha>0, \tag{5}$$

$$h(r)=(c^2+r^2)^{\beta} \quad 0<\beta<1, \tag{6}$$

(1)式は入力データからの距離$\|x-x_i\|$の関数に重みc_jを乗じたものの和になっている．重みc_jを求めることがニューラルネットワークの学習に相当するが，RBFネットワークの場合この学習は連立一次方程式の解法に帰着される．すなわち，(1)式に$F(x_i)=y_i$，$(i=1,\cdots,N)$を代入すると$c=\{c_j\}$に関する次のマトリクスが得られる．

$$Hc=y \tag{7}$$

ここで，$(y)_i=F(x_i)$，$(H)_{ij}=h(\|x_i-x_j\|)$である．x_1，$x_2,\cdots x_N$が異なる点であればHは正定値行列であることが知られており，容易にcを求めることができる．一度cを求めてしまえば，(1)式より任意のxに対する出力$F(x)$を求めることができる．

RBFを用いた内挿問題を最適化問題として用いるために，設計対象とする電気機器の寸法に対する特性のデータを有限要素法を用いて予め作成しておく．有限要素法計算では寸法が入力で機器の特性が出力であるが，RBFを用いた最適化問題ではこれを逆にして，特性を入力，寸法を出力として扱う．3章の例ではある位置における磁束密度を機器の特性としているので，いくつかの点における磁束密度のデータを入力ベクトルx_i，寸法のデータを出力y_iとし，望ましい磁束密度をxとして，それに対応する寸法を求めればよい．寸法を表すパラメータが複数個の場合にはそれぞれのパラメータに対して同じことを行う必要がある．

2.2 特異値分解法[4]

(7)式によって決定されるc_jを用いた(1)式は入出力パターンを全て通過するという利点もあるが，同時にこれは欠点でもある．すなわち，測定ノイズや数値計算誤差が入出力パターンに含まれた場合，これらも考慮した学習を行ってしまうことになる．これは，ニューラルネットワーク法の過学習の状態に似ている．非正則に近い連立一次方程式を適切化する方法の一つとして特異値分解法が知られている．本論文ではこの特異値分解法を(7)式の解法に適用する．すなわち，(7)式のHの固有値の中で小さいものを外乱とみなして零と置くことにより，誤差の影響をなくそうとするものである．

ここで特異値分解法について概説する．(7)式で表されるHについて，$H^t H$の固有値と固有ベクトルをそれぞれλ_n, v_nとすると，$\lambda_n>0$となるので，$\lambda_n=k_n^2$とおける．ここで，

$$w_n=k_n^{-1}Av_n \tag{8}$$

と置くと，

$$H=\sum_{n=1}^{N} k_n w_n v_n^t \tag{9}$$

と展開できる．ここで，$N=\mathrm{rank}\,(H)$である．k_nについて考察すると，k_{max}/k_{min}はHの条件数になり，この値が大きいほど(7)式におけるyの誤差がcに与える影響が大きくなる．そこで，小さいk_nを零と置き，条件数を小さくしてyに含まれる誤差に対してロバストにしようとする方法が特異値分解法である．Hの逆行列はMoore-Penroseの一般逆行列をとれば

$$H^{-1}=\sum_{n=1}^{N} k_n^{-1} v_n w_n^t \tag{10}$$

となる．ただし，$k_n=0$の場合は$k_n^{-1}=0$とする．

2.3 一次元の場合の例

簡単な一次元例でRBF法と特異値分解法の効果を示そう．例とした入出力パターンは$x1=\{1, 2, 3, 4, 5\}^t$, $y1=\{10, 20, 5, 25, 0\}^t$, $x2=\{1, 2, 3, 4, 5\}^t$, $y2=\{10, 20, 30, 25, 0\}^t$の2組である．**図1**(a), (b)は(3)式のRBFを用いた場合である．固有値を零としない場合，図中の$n_e=0$の直線で示されるように(3)式は一次元では線形補間となる．5個の固有値は(a), (b)とも{8.29, 5.24, 1.73, 0.76, 0.56}であった．これらの固有値のいくつかを零とした場合も図示してある．図(a)より$y1$のようなデータの場合，固有値を1つでも零とすると(1)式を用いた予測は入出力パターンから

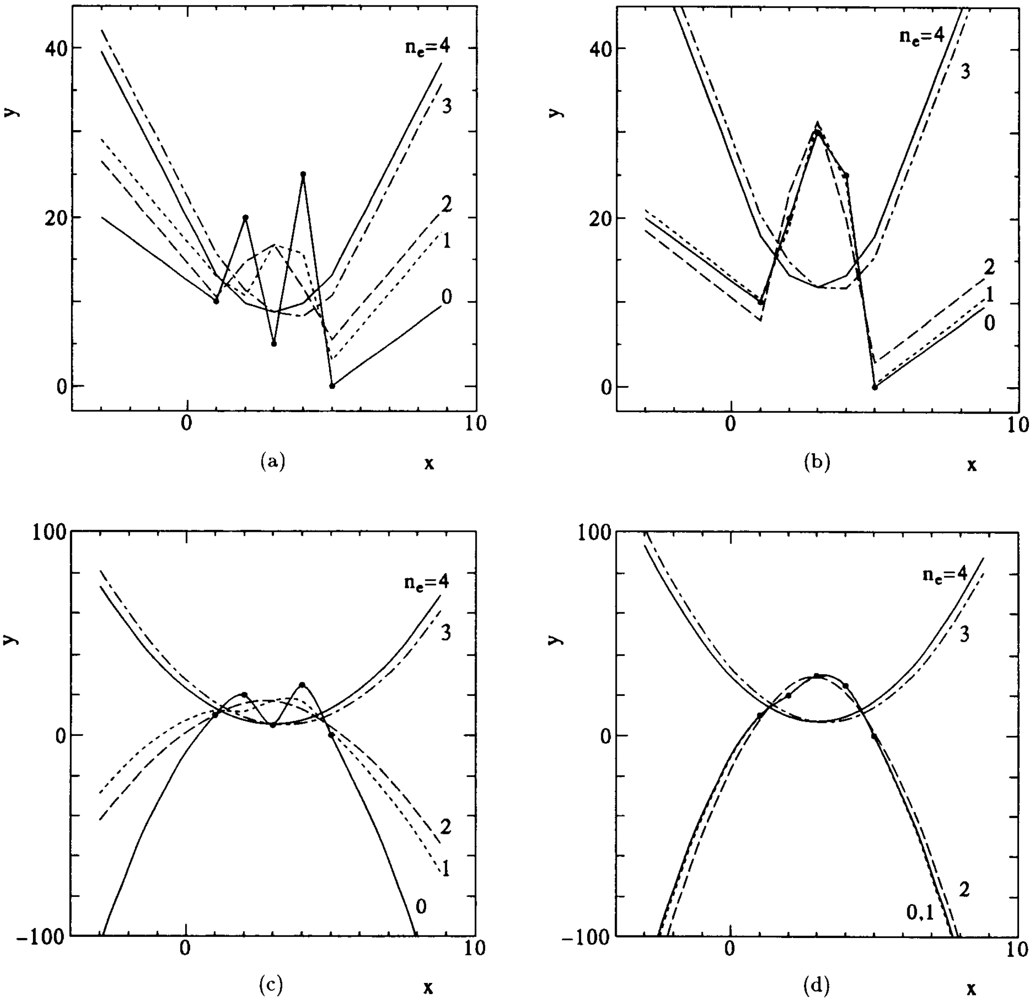

図 1　1 次元データに対する RBF 法と特異値分解法
図において，n_e：固有値を零とする数，・：入出力データ
(a)：$h(r)=r$, $x1=\{1, 2, 3, 4, 5\}^t$, $y1=\{10, 20, 5, 25, 0\}^t$,
(b)：$h(r)=r$, $x2=\{1, 2, 3, 4, 5\}^t$, $y2=\{10, 20, 30, 25, 0\}^t$,
(c)：$h(r)=(c^2+r^2)^\beta$, $c=0.0$, $\beta=0.95$, $x1=\{1, 2, 3, 4, 5\}^t$, $y1=\{10, 20, 5, 25, 0\}^t$,
(d)：$h(r)=(c^2+r^2)^\beta$, $c=0.0$, $\beta=0.95$, $x2=\{1, 2, 3, 4, 5\}^t$, $y2=\{10, 20, 30, 25, 0\}^t$,

かなりずれてくることがわかる．図(b)の場合は，{1, 3, 5}, {10, 30, 0} の入出力パターンの線形補間とほぼ同じであるために，固有値の 2 個を零としてもほぼ線形補間と同じ結果を示しているのがわかる．

図(c), (d)は(6)式において $c=0$, $\beta=0.95$ とした場合である．固有値を零としない場合，この補間はスプライン補間に似ていることがわかる．固有値のいくつかを零とした場合，図(c), (d)の傾向は図(a), (b)のそれに似ていることがわかる．

3.　磁場プレスモデルの設計

3.1　モデル

設計対象は異方性磁石作成用の磁場プレスモデルである．これは磁束の分布を調整する金型の最適形状を求める問題であり，指定の場所に指定した磁束密度を発生させることを目的としている．**図 2** (a)にモデルの全体図を示す．実際のモデルは奥行き方向に十分な長さを持つもので，この図はその断面となっている．コイルに電流を流すことで中央の磁極間に磁界を発生させる．磁極の中央には 2 種類の金型が置かれており，これらの金型の形状を様々に変化させることで，キャビティの磁束密度を調節する．キャビティ内の磁束密度の x 成分，y 成分の指定値は次式とする．

$$B_x=0.35\cos(\theta),$$
$$B_y=0.35\sin(\theta) \tag{11}$$

ただし，θ は水平軸からの角度である．図 2(b)は金

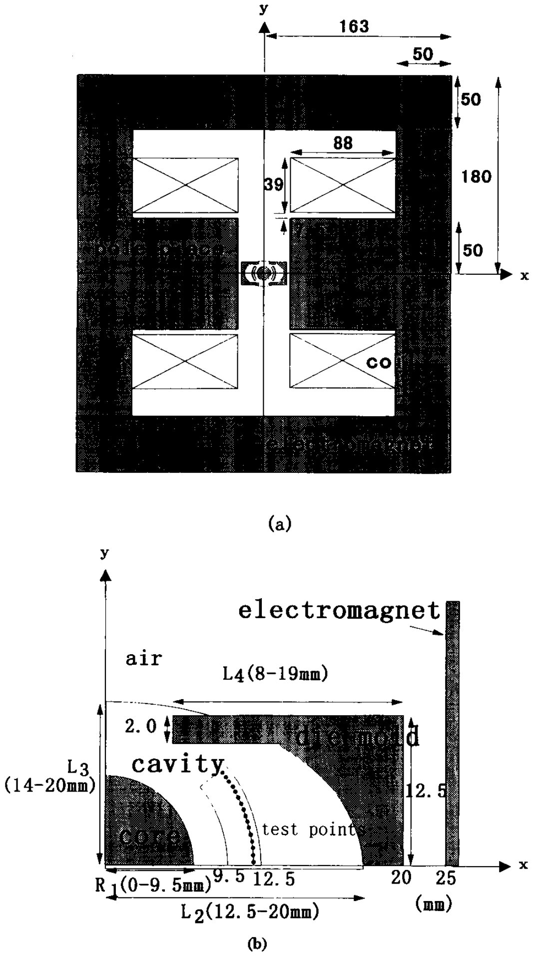

図 2　金型モデル(a)：全体，(b)：中心付近 1/4

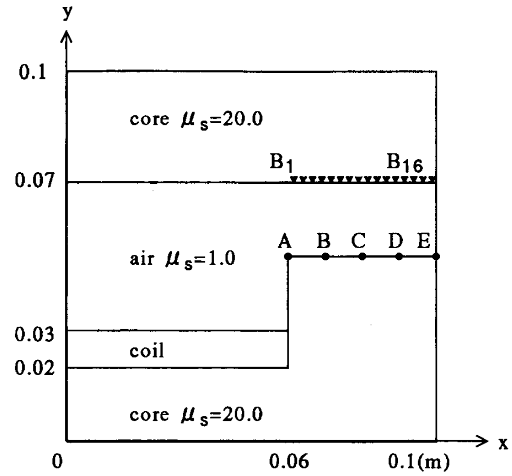

図 3　簡単化した線形モデル

型付近の拡大図である．図中の R_1, L_2, L_3, L_4 は調節可能なパラメータとその範囲を示す．R_1 は中央の円形の金型の半径であり，L_2, L_3 はもう一方の金型の内側の形状を決めるパラメータであり，楕円の定数となっている．L_4 は金型上部の長さである．キャビティ内に16点の指定点を設定し，RBF によりこれらの点の磁束密度を(11)式で指定した値に近づけるような金型の設計パラメータを求める．

磁界の解析には2次元非線形有限要素法を使用した．図2のモデルは奥行きの方向に十分な長さをもつと仮定し，その断面のみを考える．さらにこのモデルは x 軸，y 軸に対して対称な図形となっているので，対称性を考慮し，1/4 の領域のみを解析した．パラメータが変化する度に Delaunay 法により，メッシュ再分割を行っている．

3.2　簡単化モデルにおける最適パラメータ[3)]

(3)から(6)式で表される RBF 関数はパラメータを持っており，その値によって(1)式の予想値は異なる．そこで図2を簡単化したモデルを用いて各 RBF の妥当なパラメータの値を求めることにする．そしてその値を実際の図2の設計の際に用いることにする．

図2を簡単化した**図 3** を考える．図3は図2とは x, y 軸が逆であるが，B_1 から B_{16} の点の磁束密度が一様になるように，点 A から E で表される磁極の形状を求める問題であり，図2を簡単化したモデルと言うことができる．ここでは透磁率は20.0と一定の線形問題とし，A から E の5つのパラメータが y 方向に変化したとき，メッシュの再分割は行わずに，節点のみを移動させて，入出力パターンのデータを作成した．B_1 から B_{16} の磁束密度が一定になるように，パラメータを種々変えて検討した結果，各 RBF 関数の最適なパラメータは**表 1** のようになった．表より，図3の簡素化したモデルでは

$$h(r)=r^{0.08} \tag{12}$$

が最も適当な RBF であることがわかる．

表 1　最適なパラメータとそのときの誤差

RBF	誤差	最適なパラメータ
r	2.53×10^{-4}	
$e^{-(r/c)^2}$	1.88×10^{-3}	$c=0.025$
$\frac{1}{(c^2+r^2)^{\alpha}}$	1.51×10^{-4}	$c=0.0001, \alpha=0.01$
$(c^2+r^2)^{\beta}$	1.47×10^{-4}	$c=0.0, \beta=0.04$

3.3　設計結果

指定点での磁束密度を評価する為に，次のような磁束密度の誤差からなる目的関数 W を設定する．

$$W=\sum_{i=1}^{16}\{(B_{xc,i}-B_{xo,i})^2+(B_{yc,i}-B_{yo,i})^2\}, \tag{13}$$

ここで，添字の c は磁束密度の計算値，o は目標値を

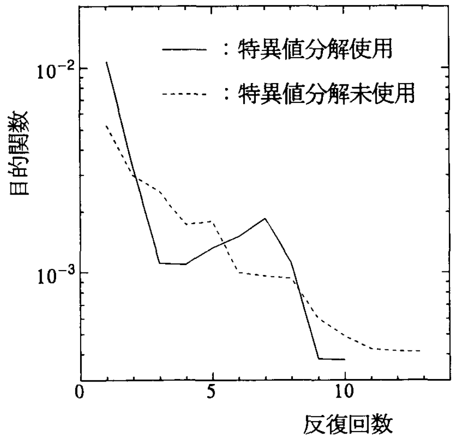

図4　目的関数の変化

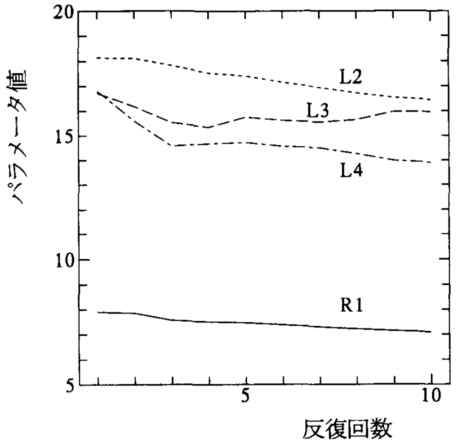

図5　パラメータの変化

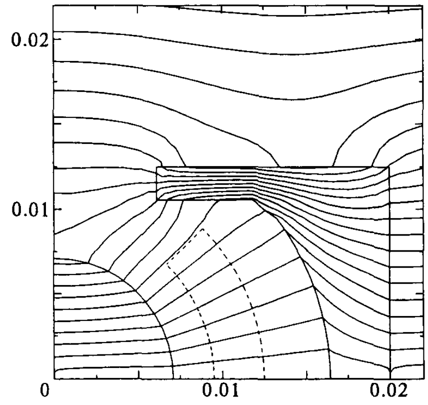

図6　得られた最適形状と磁束分布

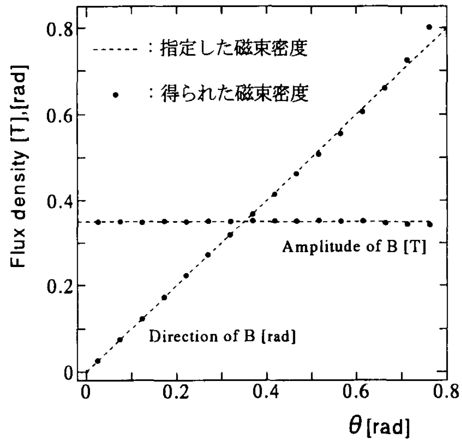

図7　磁束密度分布

示す．最適化は，Wを小さくするパラメータの組み合せを求めることである．入力出力データはR_1, L_2, L_3, L_4についてそれぞれ5, 4, 5, 4パターンの計400個のデータを作成した．反復計算毎にパラメータの変化幅は4/5ずつ狭めていった．**図4**に各反復回数における目的関数の変化を示す．固有値を零とする個数は0と10とした．この個数が余り大きい場合はRBFによる推定値がパラメータの取りうる範囲を超えてしまった．10個の固有値を零とした場合，目的関数は一様には減少しないが，固有値を零としない場合に比べて，より小さい値になっているのがわかる．**図5**は10個の固有値を零とした場合のパラメータの変化を示す

図6はRBF法と特異値分解法で10個の固有値を零とした場合について，得られた金型の形状と磁束分布を示している．また**図7**は磁束密度の大きさと向きを示す．図7より磁束密度が精度良く求められていることがわかる．

4. まとめ

Radial Basis Function 法と特異値分解法と組み合せることにより，測定ノイズや数値計算誤差の影響を少なくし，更に反復計算を行うことにより，精度を改善する方法を提案した．簡単な例で，RBF法と特異値分解法を組み合わせた方法の効果を示すと共に，提案した方法を磁石成形用金型の設計に適用し，その有効性を示した．

参考文献

1) 宅間，高橋：電磁界解析の方法とその応用，電気学会論文誌 D, 115-1, 1/12 (1995)
2) T. Poggio and F. Girosi: Networks for approximation and learning, Proc. IEEE, 78-9, 1481/1497 (1990)
3) T. Ishikawa and M. Matsunami: An optimization method based on radial basias function, IEEE Trans. on Magnetics, 33-2, 1868/1871 (1997)
4) 武者，岡本：逆問題とその解き方，オーム社 (1996)