

## 《小特集》

## 自動四角メッシュ生成手法の検討

伊藤 貴之\*

**ABSTRACT** Many 2D finite element analyses prefer quadrilateral meshes over triangular meshes to improve accuracy and efficiency of the analyses. Automation of quadrilateral mesh generation is therefore a vital problem.

This report first summarizes requirements for quadrilateral mesh generation methods. Conventional meshing methods are then introduced with their problems, and recent methods which solve the problems are also introduced.

## 1. はじめに

有限要素法や差分法は、力学や電磁気学などの問題を計算機で数値的に求める計算力学に用いられる代表的な数値解析手法である。有限要素法や差分法には、面領域の物理量を算出する2次元の問題と、空間領域の物理量を算出する3次元の問題がある。2次元の数値解析では、面領域を離散化するために、三角メッシュや四角メッシュを生成する。3次元の数値解析では、空間領域を離散化するために、四面体メッシュや六面体メッシュを生成する。

近年の計算機能力の発達により、有限要素法や差分法による数値算出の過程は短縮化の傾向にある。しかし、その前段階としてのメッシュ生成工程は、短縮化があまり進んでいない。そのため、メッシュの自動生成手法の研究開発は非常に活発に行われている。特に2次元の三角メッシュおよび四角メッシュについては、近年では市販の多くのCADソフトにも自動生成機能が導入されている。

一方、メッシュの生成結果は、解の精度と収束性に大きな影響を与えることが多い。メッシュ要素の形状の歪みは、解の精度を悪化させる要因となる。また、物理量が大きく変化する部位では解の精度を高めるために細かいメッシュ要素を用いる必要があるが、それ以外の部位では計算時間の増加を抑えるために粗いメッシュ要素を用いることが望ましい。さらに、物理量の移動方向や領域の境界線に沿った方向など、解析者の意図する方向にメッシュ要素が規則正しく整列していることが望ましい場合も多い。このように、有限要

素法や差分法のためのメッシュには、さまざまな要件がある。そこで最近では、メッシュを単に自動生成するだけでなく、これらの要件を満たす高品質なメッシュを自動生成する手法の研究開発が望まれている。

本稿では、自動生成手法の研究開発が比較的進んでいる2次元のメッシュ、特に有限要素法において好んで用いられる非構造四角メッシュについて、その生成手法の研究動向を概観する。本稿ではまず、四角メッシュの要件を整理し、従来の自動四角メッシュ生成手法が必ずしも要件を満たしていないことを示す。続いて、従来手法の問題点の解決につながると思われる最近の手法と、その適用事例を紹介する。

## 2. 自動四角メッシュ生成手法の要件

本稿でいう自動四角メッシュ生成手法とは、以下のような入出力をもつ手法のことである。

**[入力]** 境界線で囲まれた連続な平面または曲面。必要に応じて、メッシュ要素の辺の長さを表すスカラ関数、およびメッシュ要素の整列方向を表すベクタ関数。

**[出力]** 四角形要素で構成される2次元メッシュ。やむを得ない場合は三角形要素の混入を許すものとする。

一方、四角メッシュを計算力学に用いる際に求められる要件は、その用途によって多少の差異はあるが、大まかにいって以下の項目が共通の要件であると考えられる。

**[複雑な形状データに対する自動生成]** CADで生成される形状データには、細かい凹凸や、穴や内部固定点などの拘束条件、あるいはトリム曲面などの複雑なデータ構造をもつものが多い。これらの特徴をもつ複雑な形状データに対しても、煩雑な手作業を伴わずにメッシュを生成できることが望ましい。

**[歪みの少ないメッシュ要素形状]** 異方性をもつメ

Survey of automated quadrilateral mesh generation methods.

By Takayuki Itoh (IBM Japan Ltd).

\*日本アイ・ビー・エム株式会社東京基礎研究所

シュを意図的に生成する場合を除いて、三角形要素の形状は正三角形に、四角形要素の形状は正方形に近いことが望ましい。極端に形状の歪んだ要素は、解の精度や収束性に悪い影響を与える。

[メッシュ要素辺の長さの自在な制御、および連続的な変化] 細かいメッシュ要素を生成する領域、粗いメッシュ要素を生成する領域を、自在に指定できることが望ましい。また、メッシュ要素の形状の観点から、メッシュの細かい領域と粗い領域の間でメッシュ要素の大きさが緩やかに連続的に変化することが望ましい。

[メッシュ要素の整列方向の自在な制御、および連続的な変化] 物理量の変化や、領域の境界線などに沿って、メッシュ要素の整列方向が自在に指定できることが望ましい。また、メッシュ要素の形状の観点から、メッシュ要素の整列方向が緩やかに連続的に変化することが望ましい。

### 3. 従来の四角メッシュ生成手法

続いて、従来の四角メッシュ生成手法を列挙し、これらの手法がどのように課題を残しているかについて考察する。

#### 3.1 部分領域分割法 (Mapped mesh)

与えられた形状を、三角形や四角形などの部分領域に手で分割し、それぞれの領域に格子をマッピングしてメッシュを生成する<sup>1)</sup> (図1参照)。多くの工業製品設計の現場に用いられているが、部分領域への手動分割に非常に大きな工数を要するので、自動メッシュ生成手法とは言い難い。また、メッシュの形状、大きさ、整列方向は部分領域への手動分割結果に大きく依存するので、手動分割には熟練を要する。

#### 3.2 領域の中心軸に沿ったメッシュ生成 (Medial axis decomposition)

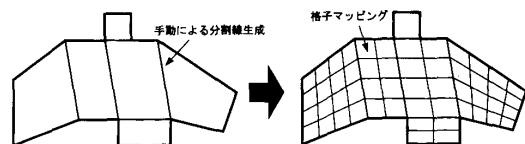


図1 部分領域分割法

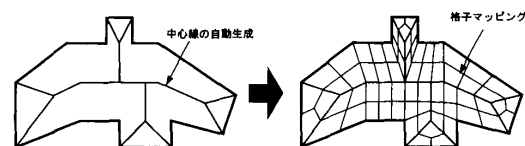


図2 領域の中心軸に沿ったメッシュ生成

与えられた形状領域の骨格となる中心線を自動生成し、それを取り巻くように格子をマッピングしてメッシュを生成する<sup>2)</sup> (図2参照)。複雑な形状領域では中心線を自動生成できない場合がある。メッシュの形状は中心線の自動生成結果に大きく依存する。メッシュの大きさの制御は困難である。中心線にそってメッシュ要素が規則的に整列するが、それ以外の整列方向を指定することは困難である。

#### 3.3 四分木を用いた再帰的領域分割法 (Quad-tree decomposition)

領域を覆う格子を、メッシュ要素の大きさ指定や、領域の境界線に応じて再帰的に分割してメッシュを生成する<sup>3~5)</sup> (図3参照)。与えられた領域の境界線付近には、細かいメッシュ要素が解の数値的な重要度に関係なく集中してしまうため、メッシュ要素数を不必要に増大させてしまいがちである。座標軸にそってメッシュ要素が整列するが、それ以外の整列方向を指定することは困難である。

#### 3.4 逐次的メッシュ要素生成 (Advancing front)

与えられた形状領域の境界に一系列にメッシュ要素を生成し、その内側にまた一系列にメッシュ要素を生成し、という操作を反復してメッシュを生成する<sup>6~10)</sup> (図4参照)。メッシュの形状が比較的良好で、大きさも制御しやすい。その利点のため、近年では多くのCADソフトに導入されている。

四角メッシュのための逐次的メッシュ要素生成手法として有名なものに、Paving<sup>6)</sup>と呼ばれる手法がある。この手法では、メッシュ要素の生成領域と未生成領域の境界線の干渉などをチェックしながら、形状領域の境界線付近から順に一系列ずつメッシュ要素を生成する。この手法は後に、曲面形状への適用<sup>8)</sup>や、メッシュ要素の生成順の改良<sup>9)</sup>などの拡張が試みられてい

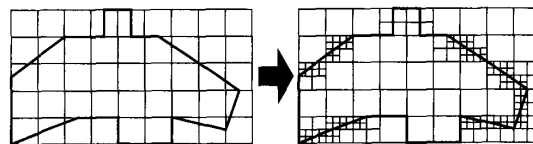


図3 四分木を使った再帰的領域分割法

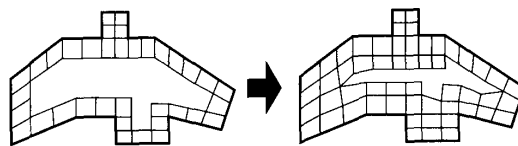


図4 逐次的メッシュ要素生成

る。

逐次的メッシュ要素生成手法では、形状領域の境界線にメッシュ要素が整列するが、それ以外の整列方向を指定することは困難である。また、形状領域の内側では、歪んだ要素が生成されることが多いばかりか、メッシュ要素生成が困難になる場合さえある。また、順次生成されるメッシュ要素の干渉計算で処理時間が大きくなることがある。

### 3.5 三角メッシュからの変換 (Triangular to quadrilateral conversion)

与えられた形状領域に三角メッシュを生成した後、できるだけ多くの隣接三角形要素をペア化し、その共有辺を消去して四角形要素に変換する<sup>11~15)</sup>(図5参照)。実装が単純でありながら、複雑な形状においても確実に四角メッシュを自動生成できる。三角メッシュ生成ではメッシュ要素の大きさを自在に制御できる方法が多いので、それに利用することで、メッシュ要素の大きさを自在に制御した四角メッシュを生成できる。

この手法によって生成される四角メッシュの特徴は、三角形要素を四角形要素に変換する順番によって決定される。従来手法を三角形要素の変換順番で分類

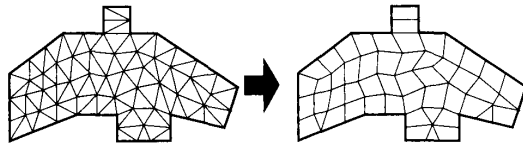


図5 三角メッシュからの変換

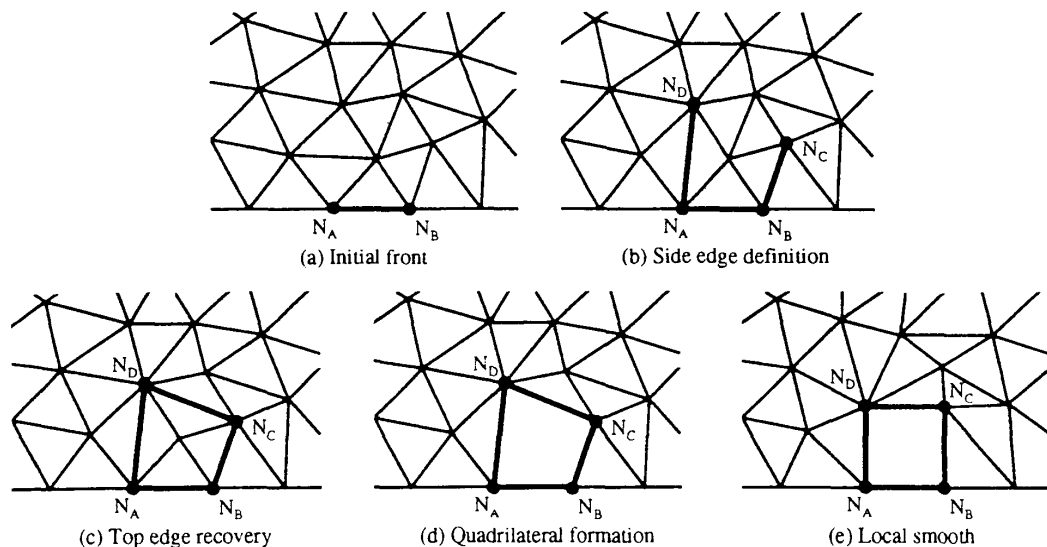


図6 三角メッシュを用いた逐次的四角メッシュ生成 (文献16)より引用)

すると、三角形要素の残存を減らすように変換順番を決定する手法<sup>11,13)</sup>、正方形に近い高品質な形状の四角形要素を多く生成するように変換順番を決定する手法<sup>12,15)</sup>、三角メッシュを帯状領域にグループ化することで四角形要素の整列性を高める手法<sup>14)</sup>などがあげられる。

三角メッシュからの変換手法の問題点は、メッシュ要素の形状に限界があるという点である。なぜなら、入力データである三角メッシュを構成するメッシュ要素が、正三角形に近い高品質なものであったときに、その三角形要素のカップリングによって正方形に近い四角形要素を得るのは難しいからである。

## 4. 自動四角メッシュ生成手法の最近の動向

前章で述べた通り、従来の四角メッシュ生成手法では、自動化、メッシュ形状、メッシュ大きさ、メッシュ整列方向のいずれかの点で課題を残していた。本章では、これらの問題点の解決につながるとされる最近の手法を紹介する。

### 4.1 三角メッシュを用いた逐次的四角メッシュ生成

3.3章で述べた通り、逐次的メッシュ要素生成法は比較的形状のいいメッシュ要素を生成できる利点があるかわりに、メッシュ要素の干渉計算に要する処理時間が大きいことと、形状領域の内側に歪んだ要素を生成しやすいことが問題点として残っている。この問題点を解決するために、三角メッシュからの変換によって逐次的に四角形要素を生成する手法が報告されてい

る<sup>16)</sup>。

この手法では、まず与えられた領域に三角メッシュを生成する。続いて、領域の境界線に接するメッシュ辺（図6(a)に太線で示す辺）を抽出する。続いて、抽出された辺の両端点  $N_A$  および  $N_B$  から見て垂直な方向にある近隣メッシュ頂点  $N_D$  および  $N_C$ （図6(b)参照）を選択する。続いて、図6(c)(d)に太線で示す通り、 $N_A$  と  $N_D$ 、 $N_D$  と  $N_C$ 、および  $N_C$  と  $N_B$  を連結することによって四角形要素を生成する。最後に、局所的なスムージング処理によってメッシュ頂点を移動し、図6(e)に示すような正方形に近い形状の四角形要素を得る。この処理を反復することで、三角メッシュを四角メッシュに変換する。

この方法では、逐次的メッシュ要素生成法と同様に形状のいい四角形要素を生成できる。三角メッシュ生成ではメッシュ要素の大きさを自在に制御できる方法が多いので、それに利用することで、メッシュ要素の大きさを自在に制御した四角メッシュを生成できる。四角形要素の干渉計算が不要なので処理量の増加を抑えることができ、かつ領域内部の四角形要素の歪みを避けることもできるので、従来の逐次的メッシュ要素生成法の問題点を解消することができる。

#### 4.2 粒子の充填モデルを用いた四角メッシュ生成

三角メッシュを自動生成する代表的な手法に、まず与えられた領域内部にメッシュ頂点を配置し、その頂点を Delaunay Triangulation などのアルゴリズムで接続してメッシュ要素を生成する手法がある。このとき、メッシュ生成結果はメッシュ頂点の配置によって決定される。高品質な三角メッシュを生成するためのメッシュ頂点配置手法のひとつとして、粒子の充填モ

デルを使った手法<sup>17,18)</sup>が報告されている。この手法では、分子間力をもつ円形粒子を領域内部に発生させ、力学シミュレーションによって円形粒子を六方充填する。図7(a)に示すように、六方充填された円形粒子の中心点を接続することにより、正三角形に近い形状のメッシュ要素を生成することができる。ここで粒子の引力や斥力は、粒子中心点からの距離の関数（図8(a)参照）を用いて算出される。この手法は、複雑な形状においても高品質な三角メッシュを生成できるだけでなく、円形粒子の半径を制御することで適応的にメッシュ要素の大きさを制御できる利点をもつ。

この手法を拡張した手法として、筆者らは、分子間力をもつ四角形粒子を力学シミュレーションによって充填し、その四角形粒子の中心点を接続する（図7(b)参照）ことで、高品質な四角メッシュを生成する手法<sup>19,20)</sup>を報告している。この手法における四角形粒子の引力や斥力の算出には、四角形粒子の中心点からの距離の関数と、四角形粒子の4頂点からの距離の

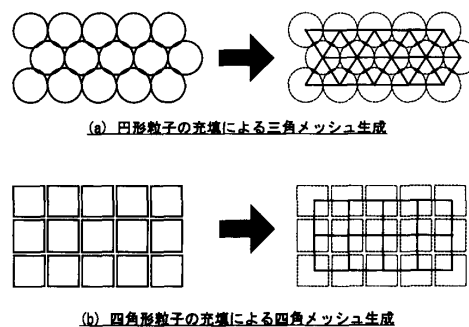
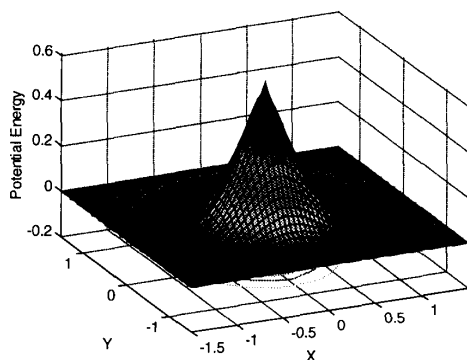
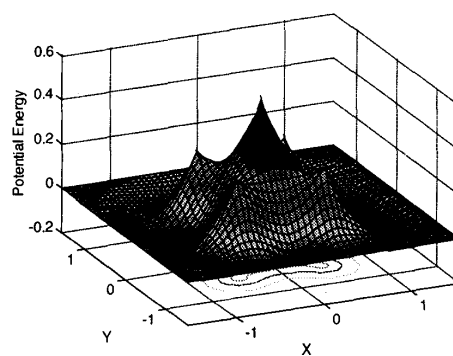


図7 円形粒子および四角形粒子の充填モデルを用いたメッシュ生成



(a) 円形粒子の斥力分布



(b) 四角形粒子の斥力分布

図8 円形粒子および四角形粒子の斥力の分布

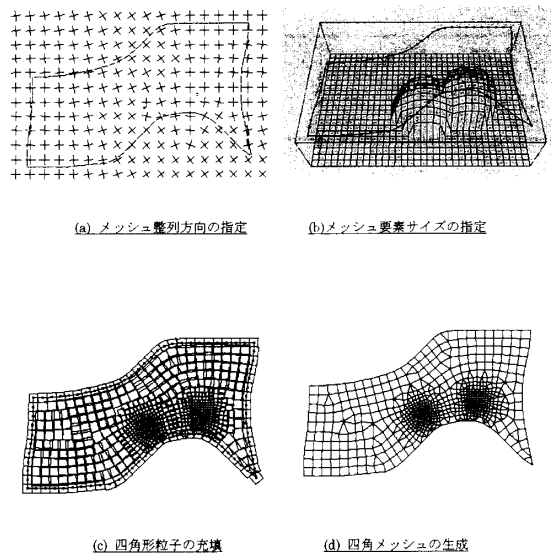


図9 四角形粒子の充填による四角メッシュ生成

関数を重ねあわせた，図8(b)に示すような関数を用いる．四角形粒子の方向を決定するために，本手法では形状領域を覆うベクタ場を用いる．

本手法におけるメッシュ生成の過程を図9に示す．図9(a)(b)は本手法の入力データである．図9(a)は形状領域とベクタ場であり，図9(b)は，メッシュ要素の大きさを表すスカラー場である．図9(c)は，これらの入力データを参照して四角形粒子を充填させた結果である．図9(d)は，四角形粒子の中心点を接続して生成された四角メッシュである．これらの結果にも見られるように，この手法では，複雑な形状においても正方形に近い高品質な四角形要素を生成できる利点がある．また，四角形粒子の大きさを制御することで，メッシュ要素の大きさを自在に制御できる．また，さまざまなベクタ場を入力することで，メッシュ要素の整列方向を自在に制御できる．従来の自動四角メッシュ生成手法には，メッシュ要素の整列方向を制御できる手法は，ほとんど見当たらない．そのため本手法は，有限要素法の精度と収束性を高める新規な手法のひとつであるといえる．

## 5. 自動四角メッシュ生成手法を用いた有限要素法の実行例

筆者らは，メッシュ要素の大きさを制御できる自動四角メッシュ生成手法を用いて，有限要素法（板金成形解析）の計算時間の短縮に成功した事例を報告している<sup>21)</sup>．この事例では，正方形の板金をプレス加工す

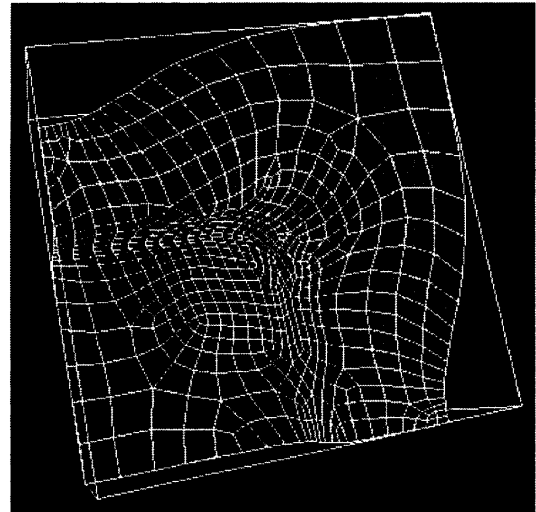


図10 適応的に生成された四角メッシュによる成形解析結果の例

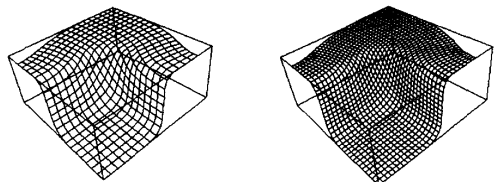
る過程をシミュレーションすることで，図10に示すような変形結果を得ている．

このシミュレーションに際して筆者らは，まずメッシュ要素数の少ない $20 \times 20$ の構造メッシュ（図11(a)参照）を用いて成形解析を行った．続いて，その解析結果から得られる形状の曲率，金型との干涉性，金型から受ける応力などを用いて，メッシュ要素の大きさを表す分布関数（図11(c)参照）を設定した．続いて，この分布関数を参照して，メッシュ要素の大きさを適応的に制御したメッシュ（図11(d)参照）を生成し，このメッシュを用いて再び成形解析を行った．

この解析結果の有効性を確認するために筆者らは，図11(d)に示す適応的なメッシュよりも大幅に要素数の多い， $35 \times 35$ の構造メッシュ（図11(b)参照）を用いて成形解析を行った．その結果を比較したものが表1である．適応的なメッシュを用いた解析結果と $35 \times 35$ の構造メッシュを用いた解析結果を比較すると，解の精度を表す板厚方向歪みの最小値がほぼ等しいので，両者の精度が十分なものであると判断できる．また， $20 \times 20$ の構造メッシュによる計算時間と，適応的なメッシュによる計算時間の和は，354.6分であった．これは $35 \times 35$ の構造メッシュによる計算時間1329.3分よりも大幅に短い．このことから，筆者らによる適応的なメッシュを用いた成形解析が，十分な精度の解を得ただけでなく，大幅な計算時間の短縮を実現したことがわかる．

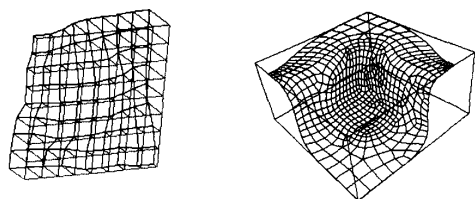
表1 成形解析結果の比較 (文献21)より引用)

メッシュの種類	メッシュ要素数	計算時間 (分)	板厚方向歪みの最小値
20x20 構造メッシュ	400	108.8	-0.337
適応的メッシュ	538	245.8	-0.288
35x35 構造メッシュ	1225	1329.3	-0.275



(a) 20x20 構造格子メッシュ

(b) 35x35 構造格子メッシュ



(c) メッシュ要素の大きさを表す分布関数

(d) 適応的に生成された四角メッシュ

図11 成形解析に用いたメッシュと分布関数 (文献21)より一部引用)

## 6. あとがき

本稿では、自動四角メッシュ生成手法に求められる要件をまとめ、それを満たすと思われる最近の手法を紹介した。

最近の計算機能力の発達により、計算力学の適用範囲は、より複雑な問題や大規模な問題に発展すると思われる。本稿で紹介した最近の自動四角メッシュ生成手法は、これらの問題においても短時間に良質な四角メッシュを自動生成する手法として、有用に活用できると思われる。

この分野の今後の課題として、メッシュ要素の大きさだけでなく整列方向も考慮して四角メッシュのアダプティブ・メッシングを実現することが考えられる。また、四角メッシュよりもさらに自動化が難しいとされている3次元(六面体)メッシュ生成の問題に対して、本稿で紹介したような四角メッシュ生成手法を3次元に拡張するアプローチを試みる事が考えられる。

## 謝 辞

日頃討論いただく日本アイ・ビー・エム(株)杉本和敏氏、青野雅樹氏、古畑智武氏、井上恵介氏、山田敦

氏、カーネギーメロン大学嶋田憲司助教授に、感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) Ho-Le K.: *Finite Element Mesh Generation Method: a Review and Classification*, Computer Aided Design, 20-1, 27/38 (1988)
- 2) Tam T. K. H., and Armstrong C. G.: *2D Finite Element Mesh Generation by Medial Axis Subdivision*, Advances in Engineering Software, 13, 313/324 (1991)
- 3) Yerry M. A., and Shephard M. S.: *A Modified-quadtree Approach to Finite Element Mesh Generation*, IEEE Computer Graphics and Applications, 3, 39/46 (1983)
- 4) Baehmann P. L., Wittchen S. L., Shephard M. S., Grice K. R., and Yerry M. A.: *Robust Geometrically-based, Automatic Two-Dimensional Mesh Generation*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 24, 1043/1078 (1987)
- 5) Shephard M. S., and Georges M. K.: *Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 32, 709/749 (1991)
- 6) Blacker T. D., and Stephenson M. B.: *Paving: A New Approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32, 811/847 (1991)
- 7) Zhu J. Z., Zienkiewicz O. C., Hinton E., and Wu J.: *A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32, 849/866 (1991)
- 8) Cass R. J., Benzley S. E., Meyers R. J., and Blacker T. D.: *Generating 3-D Paving: An Automated Quadrilateral Surface Mesh Generation Algorithm*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 39, 1475/1489 (1996)
- 9) White D. R., and Kinney P.: *Redesign of the Paving Algorithm: Robustness Enhancements through Element by Element Meshing*, Proceedings of 6<sup>th</sup> International Meshing Roundtable, 323/335 (1997)
- 10) Rees M.: *Combining Quadrilateral and Triangular Meshing Using the Advancing Front Approach*, Proceedings of 6<sup>th</sup> International Meshing Roundtable, 337/348 (1997)
- 11) Heighway E. A.: *A Mesh Generator for Automatically Subdividing Irregular Polygons into Quadrilaterals*, IEEE Transactions on Magnetics, Mag-19, 2535/2538 (1983)
- 12) Lo S. H.: *Generating Quadrilateral Elements on Plane and over Curved Surfaces*, Computer and Structures, 31-3, 421/426 (1989)
- 13) Johnston B. P., Sullivan J. M., and Kwasnik A.: *Automatic Conversion of Triangular Finite Element Meshes to Quadrilateral*

- Elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 31, 67/84 (1991)
- 14) Shimada K., and Itoh T.: *Automated Conversion of 2D Triangular Mesh into Quadrilateral Mesh*, Proceedings of International Conference on Computational Engineering Science '95, 350/355 (1995)
  - 15) Borouchaki H., Frey P. J., and George P. L.: *Unstructured Triangle-Quadrilateral Mesh Generation. Application to Surface Meshing*, Proceedings of 5<sup>th</sup> International Meshing Roundtable, 229/242 (1996)
  - 16) Owen S. J., Staten M. L., Canann S. A., and Saigal S.: *Advancing Front Quadrilateral Meshing Using Triangle Transformation*, Proceedings of 7<sup>th</sup> International Meshing Roundtable, 409/428 (1998)
  - 17) Shimada K.: *Physically-based Mesh Generation: Automated Triangulation of Surfaces and Volumes via Bubble Packing*, Ph. D thesis, Massachusetts Institute of Technology (1993)
  - 18) 嶋田：物理モデルによる自動メッシュ分割，シミュレーション，12-1, 11/20 (1993)
  - 19) 伊藤，山田，井上，嶋田，古畑：平方充填バブル・メッシュ法を用いた自動四角メッシュ生成，情報処理学会グラフィクスとCAD研究報告，97-CG-87, 7/12 (1997)
  - 20) Shimada K., Liao J., and Itoh T.: *Quadrilateral Meshing with Directionality Control through the Packing of Square Cells*, Proceedings of 7<sup>th</sup> International Meshing Roundtable, 61/75 (1998)
  - 21) Shimada K., Mori N., Kondo T., Itoh T., Kase K., and Makinouchi A.: *Automated Mesh Generation for Sheet Metal Forming Simulation*, Proceedings of Numisheet '96, 300/307 (1996)
-