

所得や富の分布とスモールワールド ネットワーク上での確率過程†

相 馬 亘*

ABSTRACT We perform empirical study for the personal income and wealth distribution. It is clarified that the high income and wealth follows the Pareto's law (power law distribution) and the low and middle income follows the Gibrat's law (log-normal distribution) under the capitalism. A multiplicative stochastic process is constructed on small-world networks to explain the wealth distribution. Through numerical simulations we show that the reason of an emergence of the Pareto's law and the Gibrat's law consist in the real world networks which is small-world networks.

1. はじめに

経済において、所得や富は重要な役割を演じる。なぜならば、全ての経済活動の結果は、所得や富の分布という形でまとめられるからである。一方、家計はそれらの配分に従い消費を決定するため、全ての経済活動の出発点になっている事も理由の一つである。また、歴史が物語るように、所得や富の不平等な配分は様々な社会不安を引き起こし、多くの紛争の原因となってきた。そのため、それらをどう再配分するかという問題は、グローバル化が進む現代において、避けては通れない問題の一つである。したがって、この問題に挑戦していくためにも、所得や富の性質を知る必要がある。

多くの人々は、所得や富の分布は時代や地域に依存した個別的要素が強く、普遍性を追求する自然科学の研究対象には成り得ないと考えるかもしれない。しかし、この論文で明らかにされるように、これらの分布には、自然現象にも劣らない普遍性が存在する。経済物理学の目的の一つは、様々な経済データの中に潜んでいる普遍性を見つけ、それが現れる機構を物理学の方法を用いて研究する事である。

この論文は、以下の様に構成される。次章では、所得や富の研究に関する歴史的背景を簡単に述べ、Pareto法則やGibrat法則を紹介する。3章では、日本の個人所得分布について実証的研究を行い、所得分布の

Income and wealth distribution and stochastic process on small-world networks. By Wataru Souma (ATR Human Information Science Laboratories).

* ATR 人間情報科学研究所

† 2002年1月4日受付

普遍性を明らかにする。4章では、富の分布について実証的研究を行う。この論文では個人の所得や富に焦点を当てるが、企業の所得や資産に関しても詳しい実証的研究がおこなわれている。5章では、所得や富の分布を説明するために考えられてきた数理モデルをいくつか紹介し、それらに欠けている点を指摘する。6章では、現実のネットワークがスモールワールドネットワークになっている事実を取り入れて、富の分布を説明する数理モデルを提案し解析を行う。そして、最後にまとめを行う。

2. 歴史的背景

所得や富の分布に関する研究の歴史は古く、1897年のV.Paretoによる研究が始まりとされている²⁾。彼は、いくつかの都市の個人所得分布を調べ、個人所得 x の確率密度関数 $p(x)$ が、 A を規格化定数として、冪分布

$$p(x) = Ax^{-(1+\alpha)} \quad (1)$$

で表される事を明らかにした。経済学では、これをPareto法則と呼び、指数 α をPareto指数と呼ぶ。所得や富の寡占状態が進むと、 α は小さい値を持つようになるので、不平等な配分の指標になる。このような冪分布は、フラクタルや自己組織化を示す現象に、共通に見出される³⁾。

1931年にR.Gibratは、Pareto法則は高所得に対してのみ成立し、低中所得は対数正規分布

$$p(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \log^2\left(\frac{x}{x_0}\right)\right] \quad (2)$$

に従う事を明らかにした⁴⁾。ここで、 x_0 は平均値で、 σ^2 は分散である。この法則はGibrat法則と呼ばれ、 $\beta \equiv 1/\sqrt{2\sigma^2}$ で定義される量はGibrat指数と呼ばれる。

大きい分散は、所得や富が広い領域に渡って分布している事を意味するので、小さな Gibrat 指数は不平等な配分を表す。

所得や富が、この様な分布に従う事は、1980年代前半に再確認された^{5,6)}。それらの研究は、1935-36年のアメリカ合州国の個人所得分布が、図1の様になっている事を明らかにした。この図は、横軸に個人所得(ドル)を採り、縦軸に累積確率を採り、両対数グラフで描いたものである。累積確率 $P(x \leq)$ とは、ある金額 x 以上の所得を持つ人を見出す確率であり、連続表記では、 $P(x \leq) = \int_x^\infty p(y) dy$ で与えられる。これは、順位を総人数で規格化したものと同等なため、図1の縦軸として順位を用いたとしても、グラフの形は変更されない。また、図中の破線は高所得層に冪分布 ($\alpha=1.63$) を当てはめたものであり、実線は低中所得層に対数正規分布 ($x_0=1,100$ ドル, $\beta=2.23$) を当てはめたものである。この図から、それぞれの領域で、Pareto 法則と Gibrat 法則が成り立っている事を確認できる¹⁾。また、文献5)には、15世紀から20世紀前半にかけてのヨーロッパやアメリカ合州国における Pareto 指数のいくつかが掲載されていて、高所得層は、 $\alpha=1 \sim 2$ を持つ Pareto 法則に支配されている事を指摘している。

以上の解析から、Pareto 法則と Gibrat 法則の普遍性が期待される。だが、地域性に依らない事を更に確認するためには、全世界の国々に対して、同じ年の分布を調べる必要がある。また、時代に依らない事を更に確認するためには、同じ国に対して長期間に渡り分布を調べる必要がある。次章では、後者の点に着目し、日本の個人所得分布について考える。

3. 所得分布

我々は、日本の個人所得分布を調べるために三種類のデータを用いた。この論文では、それらを、雇用所得データ⁷⁾、所得データ^{8~10)}、納税データと呼ぶ。雇用所得データは、国税庁が、民間企業の労働者に対し、標本調査を実施して得たもので、所得をいくつかの階級に分け、それらの階級に含まれる人数を表の形でまとめたものである。したがって、公務員や日雇労働者などを含んではいないが、低中所得層に対する多くの情報が得られる。この論文では、1955年(昭和30年)から1998年(平成10年)までの44年間のデータを用

¹⁾ Pareto 指数や Gibrat 指数の他にも、所得や富の配分の不平等度を定量化する指標が考えられている。中でも、Gini 係数が多用されているが、これは、全体の配分の不平等度を表すには便利な指標だが、分布関数の変化については、詳しい情報を提供してくれない。

いる。また、所得データは、個人で確定申告を行った者のデータであり、所得をいくつかの階級に分け、それらの階級に含まれる人数を表の形でまとめたものであり、高所得層の情報をほぼ完全に含んでいる。この論文では、1887年(明治20年)から1998年(平成10年)までの112年間のデータを用いる。納税データは、納税額が1000万円を越える高額納税者のリストであり、1998年の84515人に対してのみ入手する事が出来た。

これらのデータを用いて、1998年の日本の個人所得分布を求めるために、納税データの納税額を所得に換算し所得データとつないだ¹²⁾。また、所得データと雇用所得データを足した^{13,14)}。そうすることによって、全労働者のおよそ80%に対して、所得分布を把握することができた。そして、横軸に所得(百万円)を採り、縦軸に累積確率を採り、両対数グラフで描くことによって図2を得た。図中の○は、納税額を所得に換算したものであり、□は所得データのみを用いたものであり、△は所得データと雇用所得データを足したものである。また、破線は高所得層に冪分布 ($\alpha=2.06$) を当てはめたものであり、実線は低中所得層に対数正規分布 ($x_0=400$ 万円, $\beta=2.68$) を当てはめたものである。これより、高所得層では Pareto 法則が成り立ち、低中所得層では Gibrat 法則が成り立っている事が解る。1998年以外の年では納税データが入手できなかったため、所得データと雇用所得データを足し合わせる事によって、分布のおおよその形を把握した。そして、用いた全てのデータに対して、高所得層では Pareto 法則が成立し、低中所得層では Gibrat 法則が成立している

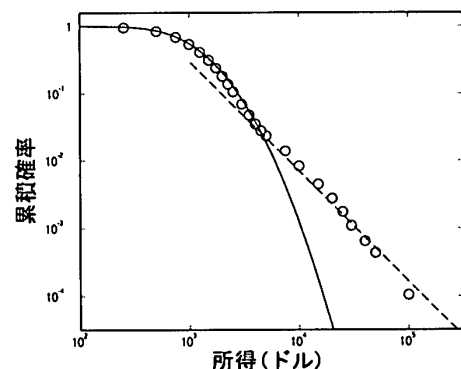


図1 1935-36年のアメリカ合州国の個人所得分布。横軸に所得(ドル)を採り、縦軸に累積確率を採り、両対数グラフで描いた。図中の破線は、高所得層に冪分布 ($\alpha=1.63$) を当てはめたものであり、実線は、低中所得層に対数正規分布 ($x_0=1,100$ ドル, $\beta=2.23$) を当てはめたものである。この図から、それぞれの領域で Pareto 法則と Gibrat 法則が成り立っている事が確認できる。

事を確認した^{13,14)}。

分布の不平等度を表す α と β の変化は、**図3**にまとめられる²⁾。図では、横軸に西暦を採り、縦軸に α と β の値を採っている。また、景気の上昇局面も同時に描いている。図中の○は Pareto 指数の変化を表し、□は Gibrat 指数の変化を表す。前にも述べたように、 α が小さい値に向かう時は、高所得層での不平等度が増している事を意味する。また、 β が小さい値に向かう時は、低中所得層での不平等度が増している事を意味する。図から解るように、1955年から1965年までの期間と、1976年から1985年にかけては、 α と β は同じ様な動きをしている。これは、高所得層と低中所得層での分布の不平等度が、同じ様に振舞った事を意味す

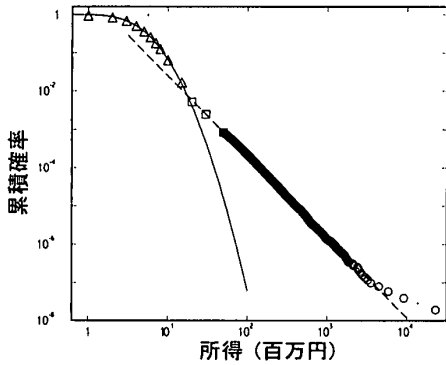


図2 1998年の日本の個人所得分布。
横軸に所得(百万円)を採り、縦軸に累積確率を採り、両対数グラフで描いた。図中の○は、納税額を所得に換算したものであり、△は所得データのみを用いたものであり、△は所得データと雇用所得データを足したものである。破線は、高所得層に冪分布 ($\alpha=2.06$) を当てはめたものであり、実線は、低中所得層に対数正規分布 ($x_0=400$ 万円, $\beta=2.68$) を当てはめたものである。

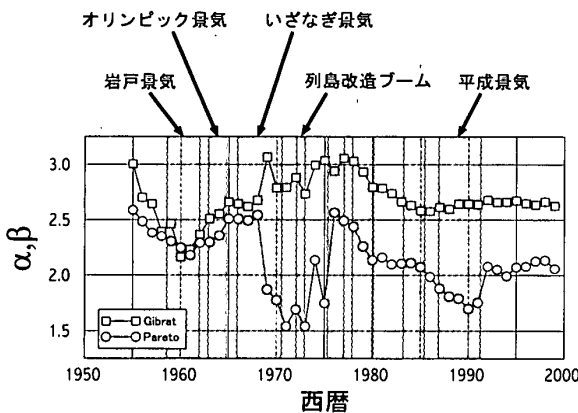


図3 1955年から1998年までの44年間に渡る、Pareto 指数と Gibrat 指数の変化。
横軸は西暦を表し、縦軸は Pareto 指数と Gibrat 指数の値を表す。図中の○は Pareto 指数の変化を表し、□は Gibrat 指数の変化を表す。

る。一方、1960年代後半から1970年代前半では、 α と β は異なる動きをしている。つまり、低中所得層では平等な配分に向かっているのに対し、高所得層では不平等な配分に向かっている。この変動は、いざなぎ景気や列島改造ブームなどの好景気や、オイルショックなどの社会不安が、連続的に起こったことに起因していると考えられる。また、1985年以降でも α と β は異なる動きをしている。ここでは、 β の値はほとんど同じ値を維持しているため、低中所得層での不平等度は変化していない。一方、 α の値は1990年に向かって小さくなり、その後大きくなっている。つまり、平成景気の頂点に向かって高所得層での不平等度が増加し、景気が下降局面に入るにつれてそれが減少している。

これらの解析から、議論を1985年以降に限定するならば、Pareto 指数の変化は、バブル経済を引き起こしたリスク資産(地価、株価)などと相関していることが予想できる。**図4**は、1980年から1998年にかけての全国市街地価格指数³⁾と Pareto 指数の相関を調べた結果である。図では、横軸に全国市街地価格指数を採り、縦軸に Pareto 指数 α を採っている。この結果から、Pareto 指数と土地価格は強い相関を持つ事が確認できる。また、土地価格の場合ほど強くはないが、Pareto 指数と東京証券株価指数(TOPIX)もまた相関している¹³⁾。

所得データは、高所得層の情報を含んでいるので、これだけを用いたとしても、その領域での分布とその変化をある程度把握できる。そして、このデータを解析することによって、1887年から1998年までの112年

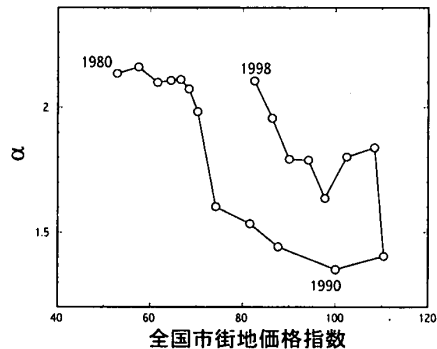


図4 Pareto 指数と全国市街地価格指数との相関。
横軸は全国市街地価格指数を表し、縦軸は Pareto 指数を表す。

²⁾ 低中所得層での平均所得 x_0 の変化と、国民総生産 (GDP) との相関は、文献¹³⁾にまとめられている。

³⁾ 全国市街地価格指数は日本不動産研究所「市街地価格指数」による。1990年の値を100としている。

間に渡って Pareto 法則が成り立っている事を確認し、Pareto 指数の変化を図5にまとめた。図では、横軸が西暦で、縦軸が Pareto 指数である。また、○は、日本での α の変化の様子であり、 $\alpha \approx 2$ の周りで揺らいている事が解る。また、■は、1914年から1936年までの21年間のアメリカ合州国での α の変化である⁹⁾。この期間では、日米の Pareto 指数は、同じような振舞いを示している。また、アメリカ合州国の方を見ると、1929年の世界恐慌に向かって α の値が小さくなり、その後大きくなる様子が見られる。このような変化は、日本における平成景気に見られる動きと同様である。

以上より、我々が入手したデータの解析と、かつて行われた解析とを合わせて考えると、高所得層は Pareto 法則（冪分布）に従い、低中所得層は Gibrat 法則（対数正規分布）に従う事は、少なくとも資本主義の下では、普遍的な性質だと期待できる。また、高所得層と低中所得層は、必ずしも相関していない事も明らかになった。これは、高所得層と低中所得層では、異なるメカニズムが働いている事を示唆する。そして、そのようなメカニズムの違いを引き起こす原因の候補は、土地や株などのリスク資産である事も示された。よく「金持ちは土地と株で儲けている」と言われるが、我々の解析はこの言葉を裏付ける結果となった。

4. 富の分布

個人の富に関する詳しいデータは、あまり公表されていない。そのため、信頼という点では少し劣るかもしれないが、“Forbes 400 Richest in America”¹⁵⁾を用いて富の分布を解析した。このデータは、1996年から

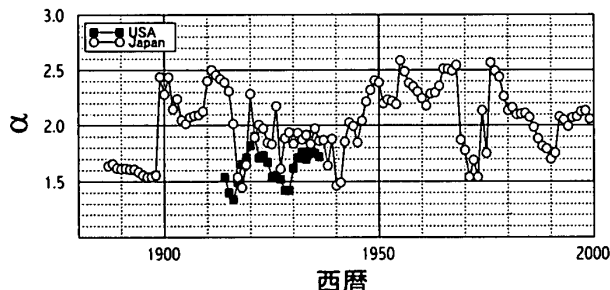


図5 日本とアメリカ合州国での Pareto 指数の変化。横軸に西暦を採り、縦軸に Pareto 指数の値を採っている。○は日本での Pareto 指数の変化を表し、■はアメリカ合州国での Pareto 指数の変化を表す。

2000年にかけてのアメリカ合州国の個人が持つ財産に関するもので、およそ上位400人のリストであり、その分布は図6にまとめられる。これは、横軸に財産（百万ドル）を採り、縦軸に順位を採り、両対数グラフで描いたものである。○は1996年、□は1997年、◇は1998年、△は1999年、▽は2000年に対応する。また、実線と破線はそれぞれ、 $\alpha=1$ と2の冪分布を表している。この図から、高い富の領域では Pareto 法則が当てはまり、Pareto 指数は $\alpha=1 \sim 2$ の値を持つ事が解る。だが、それ以外の領域で Gibrat 法則が成り立っているかどうかは、データの入手が困難なため、今のところ解っていない。以下では、所得の分布と同様に富の分布もまた、Pareto 法則と Gibrat 法則に従っている事を前提として議論を進める。

5. 確率過程

個人の所得や富の分布を説明する数理モデルを構成する場合、対象としている量が確率的要素を含んでいるため、確率過程として定式化する事が第一に考えられる。乗算的確率過程は、

$$x(t+1) = a(t)x(t) \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 $x(t)$ は時刻 t での所得を表し、 $a(t)$ は正の確率変数である。つまり、「未来の所得は現在の所得にランダムな数を掛けたものである」とするモデルである。(3)式を繰り返し用い、両辺の対数を採ることによって

$$\log[x(t+1)] = \log[a(t)] + \log[a(t-1)] + \dots + \log[a(0)]$$

が得られる（ただし、 $x(0)=1$ とした）。右辺の各項は、等しい平均値と分散を持つ確率変数なので、中心極限

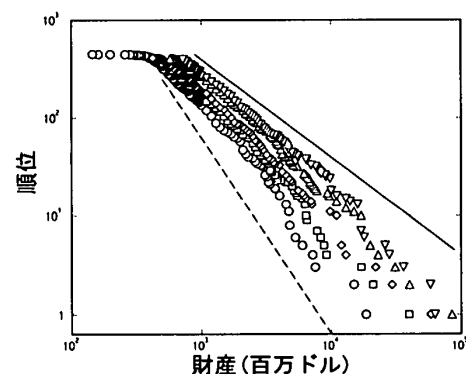


図6 アメリカ合州国での富の分布。横軸に財産（百万ドル）の対数を採り、縦軸に順位を採り、両対数グラフで描いた。○は1996年、□は1997年、◇は1998年、△は1999年、▽は2000年の分布に対応する。実線と破線はそれぞれ、 $\alpha=1$ と2の冪分布を表している。

定理によって、 $\log[x(t+1)]$ は正規分布に従う。そのため、 $x(t+1)$ は対数正規分布に従う。このモデルは対数正規分布を説明するが、これだけでは、図3に示した様な、Gibrat 指数の複雑な動きを説明できないし、Pareto 法則が出現する理由も説明できない。

所得や富の分布を説明するために考えられたものではないが、冪分布の出現を説明するモデルが存在する。その一つが、乗算的確率過程にノイズを加えた

$$x(t+1) = a(t)x(t) + b(t) \quad (4)$$

である^{16~19)}。ここで、 $a(t)$ と $b(t)$ は互いに独立な正の確率変数であり、 $\langle \log a(t) \rangle < 0$ の条件が課せられる。このモデルでは、大きい x の領域では冪分布を実現し、Pareto 指数は $b(t)$ とは無関係に、 $\langle a^\alpha \rangle = 1$ の条件から決定される。

(4) 式で記述されるプロセスは、冪分布を説明するが、所得や富の分布への応用を考えた場合、不満足な点がいくつかある。その一つが、システムを構成している人々の間での取引が無視されている事である。この点を改善するために、相互作用する乗算的確率過程が考えられた^{20~22)}。このモデルは、個人や会社の富の分布を説明するために考案されたもので、

$$\frac{d}{dt} W_i(t) = \eta_i(t) W_i(t) + \sum_{j(x_i)} J_{ij}(t) W_j(t) - \sum_{j(x_i)} J_{ji}(t) W_i(t) \quad (5)$$

によって与えられる。ここで、 $W_i(t)$ は i 番目の人の時刻 t での富を表す。また、 $\eta_i(t)$ は平均 m で、分散 $2\sigma^2$ の Gauss 分布に従う確率変数である。したがって、右辺第1項は、投資などによる自発的な富の増加や減少を記述している。右辺第2項と第3項が富の取引を表す項で、隣接行列 $J_{ij}(t)$ は取引ネットワークの形を指定する。隣接行列とは、ネットワークを行列で表すものである。通常のグラフ理論では、ノード i とノード j が直接1本のエッジでつながっていれば $J_{ij}=1$ とし、そうでなければ $J_{ij}=0$ とする。この論文では隣接行列で取引ネットワークを記述するので、行列の成分は取引量に応じた値を持つ。したがって、厳密な意味での隣接行列とは一致しないが、この用語を用いることにする。右辺第2項は、自分が生産した物を取引相手に売ることによって増加する富を表し、第3項はその逆を表す。このモデルは、平均場近似を用いた場合に、解析的に解く事が出来る。平均場近似とは、取引ネットワークを構成している全ての人々が、自分以外の全ての人々と同じ割合で取引を行う場合の事を言う。この場合の隣接行列は、取引割合を $J>0$ として $J_{ij}(t)=J/N$ で与えられる。ここで、 N は取引ネットワークを構成して

いる人の総数である。そして、 $N \rightarrow \infty$ の極限での定常解は、

$$p(w) = \frac{(\alpha-1)^\alpha \exp\{-(\alpha-1)/w\}}{\Gamma[\alpha] w^{1+\alpha}} \quad (6)$$

となる。ここで、 w は平均値 $\bar{w} \equiv \sum_i W_i / N$ で規格化された富で、 $w \equiv W / \bar{w}$ で定義される。また、 $\alpha = 1 + J / \sigma^2 \geq 1$ である。(6) 式は、大きい w の領域で

$$p(w) \sim w^{-(1+\alpha)}$$

と振舞うので、冪分布を再現する。したがって、 α は Pareto 指数と見なせる。つまり、Pareto 指数は、 σ^2 と J のみの関数となる。確率変数の分散($2\sigma^2$)が小さい場合や取引割合(J)が大きい場合は、 α は大きな値を持つ事になり平等な分布に向かう。また、全くランダムな取引ネットワークを用いた場合でも、分布は冪分布に従い、Pareto 指数が J/σ^2 のみに依存している事も明らかにされている。

(5) 式で与えられるプロセスは、多くの点で興味深い結果を提供する。しかし、平均場近似のように、全ての人々が全ての人と取引している状況は現実には存在しない。また、全くランダムに取引しているとも考えられない。では、現実の取引ネットワークとは、どのようなネットワークなのだろうか。

6. スモールワールドネットワーク上での確率過程

最近、物理学者を中心とした学際的な研究として、ネットワークの研究が一つの流行となっている^{23,24)}。この研究が現在までに明らかにした事の一つは、現実のネットワークは、レギュラーでもランダムでもないネットワーク、即ち、スモールワールドネットワークになっている事である⁴⁾。このネットワークでは、経路長(各ノード同士を結ぶ最短経路を、エッジ数で表したものはランダムネットワークの様に小さい値を持つが、各ノードはレギュラーネットワークの様に密にクラスターを形成する。スモールワールドネットワークは、レギュラーネットワークのエッジを、つなぎ変え確率 $p \equiv$ (つなぎ変えたエッジ数)/(エッジ総数)でつなぎ変えることによって得られる。したがって、 $p=0$ の場合がレギュラーネットワークに対応し、 $p=1$ の場合がランダムネットワークに対応し、 $0 < p < 1$ の領域に

⁴⁾ ネットワークのトポロジーに関する実証的研究は、WWW、インターネット、電力網、映画俳優、科学者の共同研究、細胞の代謝、食物網、神経回路などのネットワークに対して行われている。また、スモールワールドネットワークの一部は、スケールフリーネットワークになっている事も知られている。これは、次数(各ノードが持っているエッジ数)の分布が、冪分布に従っているネットワークである。

スモールワールドネットワークが存在する。

現在までに、経済でのネットワークに関する実証研究は行われていないが、スモールワールドネットワークになっていると期待できる。ここでは、(5)式とのアナロジーから、

$$W_i(t+1) = a_i(t)W_i(t) + \sum_{j(\neq i)} J_{ij}(t)W_j(t) - \sum_{j(\neq i)} J_{ji}(t)W_i(t) \quad (7)$$

で与えられるモデルを定義し、スモールワールドネットワーク上で解析を行う^{5, 25)}。ただし、ここで $a_i(t)$ は、平均値が $1+\sigma^2$ で、分散が $2\sigma^2$ の Gauss 分布に従う確率変数である。また、その他の項と記号の意味は、(5)式と同じである。

ここでは、隣接行列を次のように定義する。もしも、 i 番目の人が j 番目の人と直接(1本のエッジを介して)取引をしているならば $J_{ij} = J/Z_i$ とし、そうでなければ $J_{ij} = 0$ とする。ここで、 Z_i は i 番目の人と直接取引をしている人(隣人)の数である。この隣接行列を用いると(7)式は

$$W_i(t+1) = [a_i(t) + J]W_i(t) + J\bar{W}_i(t) \quad (8)$$

となる。ここで、 $\bar{W}_i(t)$ は i 番目の人の隣人が持つ富の平均である。以下では、平均隣人数 $\bar{Z} = (\text{総エッジ数})/N$ も、ネットワークの指標の一つとして用いる。

我々は、 $N=10^4$ とし、ネットワークのトポロジーと関係の無いパラメータを、 $J=0.01$ 、 $\sigma^2=0.01$ と固定した。このパラメータの組みを用いた場合、平均場近似での Pareto 指数は、 $\alpha_{mf}=2$ である。そして、ネットワークのトポロジーと関係する \bar{Z} と p の値を変えて、(8)式を数値的に解析した。

6.1 順位分布

図7は、横軸に w を採り、縦軸に順位を採り、両対数グラフで描いたものである。また、図中の \circ 、 \square 、 \triangle はそれぞれ $t=4000$ 、 12000 、 20000 での分布に対応している。図7(a)は、 $p=0$ 、 $\bar{Z}=10^3$ の分布である。この場合は、各ノードが比較的多数のエッジを持ったレギュラーネットワークであり、平均場近似に近い状況である。この図から解るように、分布は収束している。図中の各線は、分布に(6)式を当てはめたもので、 $\alpha \approx 2 = \alpha_{mf}$ の値を持つ。したがって、 w が大きい領域の

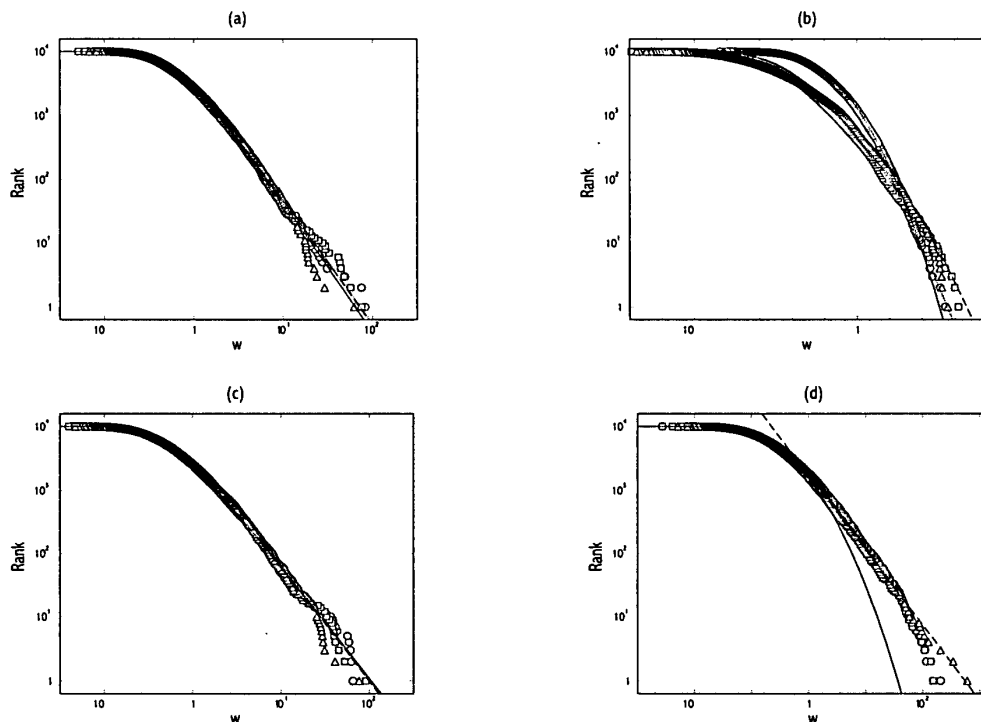


図7 $N=10^4$ 、 $J=0.01$ 、 $\sigma^2=0.01$ とした場合の順位分布。横軸に w を採り、縦軸に順位を採り、両対数グラフで描いた。図中の \circ 、 \square 、 \triangle はそれぞれ $t=4,000$ 、 $12,000$ 、 $20,000$ での分布に対応する。(a) は $p=0$ 、 $\bar{Z}=10^3$ の場合で、各線はそれぞれの分布に(6)式を当てはめたもの。(b) は $p=0$ 、 $\bar{Z}=10$ の場合で、各線はそれぞれの分布に(2)式を当てはめたもの。(c) は $p=0.5$ 、 $\bar{Z}=10$ の場合で、各線はそれぞれの分布に(6)式を当てはめたもの。(d) は $p=0.05$ 、 $\bar{Z}=10$ の場合で、実線と破線は、 $t=20,000$ の分布に対して、 w が大きい領域には(1)式を当てはめ、その他の領域には(2)式を当てはめたもの。

⁵ 現在、スケールフリーネットワーク上での解析も行っているため、近い将来に報告する²⁶⁾。

分布は、Pareto 法則に従っている。

図 7 (b) は、 $p=0, \bar{Z}=10$ の分布である。図中の各線は、分布に (2) 式を当てはめたものである。これから解るように、分布は時間に依存した平均値と分散を持つ対数正規分布に従うため、収束に向かわない。また、図 7 (a) と比較すると、広い領域に渡って分布している。これは、不平等な配分がなされている事を意味する。したがって、エッジ数の減少は不平等な分布をもたらすと言える。

また、 $\bar{Z}=10$ のレギュラーネットワークを、 $p=0.5$ の確率でつなぎ変えた場合の分布は、図 7 (c) に示される。図中の各線は、分布に (6) 式を当てはめたもので、 $\alpha=1.7\sim 1.8$ の値を持つ。したがって、 w が大きい領域の分布は、Pareto 法則に従っている事になる。また、図 7 (b) よりも狭い領域に分布しているので、平等な配分に向かった事になる。そのため、エッジをつなぎ変えてスモールワールドネットワークにする事によって、平等な分布に向かうと言える。

上の結果は、 $p=0\sim 0.5$ の間で、分布の形が対数正規分布から冪分布に変化した事を示唆する。そこで、 $\bar{Z}=10$ に固定したまま、もう少し小さい p での分布を調べる事にする。図 7 (d) は、 $p=0.05$ とした場合の分

布である。この分布に対しては、(2) 式か (6) 式のどちらか一方のみを当てはめる事は出来なかった。図中の実線と破線は、 $i=20000$ の分布に対して、 w が大きい領域には (1) 式を当てはめ、その他の領域には (2) 式を当てはめたものである。この結果は、スモールワールドネットワークでは、Pareto 法則と Gibrat 法則の双方が出現する可能性がある事を示唆している。

6.2 富のクラスター化

次に、分布の形に違いが生じる理由を考察するために、富の変化を直接調べる事にする。図 8 では、横軸に個人の番号を採り、縦軸にタイムステップを採っている。そして、上位 10% に入った時は、黒色でマークし、下位 10% に入った時は、灰色でマークすることによって、これらの図を描いた。ここでは、 $N=10^4$ に対してシミュレーションを行い、 $i=1\sim 10^3$ の部分のみを抜き出した。どうしても、以下に述べる性質は変更されない。

図 7 (a) の分布に対応するのが、図 8 (a) である。この図では、黒色の点と灰色の点がランダムに散らばっている様子が見られる。この場合はレギュラーネットワークなので、 i 番目の人は $i-500$ 番目から $i+500$ 番目の人と取引をしているため、様々な順位の

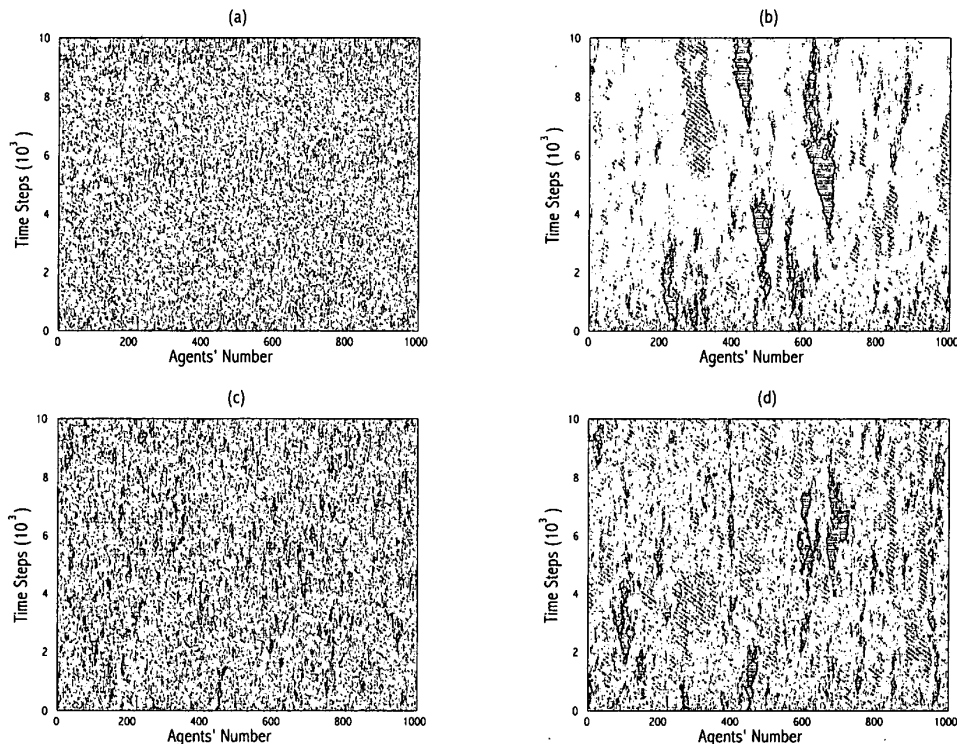


図 8 $N=10^4, J=0.01, \sigma^2=0.01$ とした場合の富の発展。横軸として個人の番号を採り、縦軸としてタイムステップを採っている。順位が上位 10% に入った時は、黒色でマークし、下位 10% に入った時は、灰色でマークしている。 $i=1\sim 10^3$ の部分のみを抜き出しているが、その他の部分でも同様な様子が観察される。(a) は $p=0, \bar{Z}=10^3$ の場合。(b) は $p=0, \bar{Z}=10$ の場合。(c) は $p=0.5, \bar{Z}=10$ の場合。(d) は $p=0.05, \bar{Z}=10$ の場合。

人々と取引している事になる。したがって、(8)式にある i 番目の人の富 $W_i(t)$ と、その隣人の平均の富 $\bar{W}_i(t)$ は無相関になる。この場合 (8) 式は、乗算的確率過程にノイズを加えたモデル、つまり (4) 式と同じであり、 $W_i(t)$ が大きい領域で冪分布が実現される。

また、図 7 (b) の分布の場合に対応するのが、図 8 (b) である。この図では、黒色の点と灰色の点が各々クラスターを形成している (富のクラスター化)。この場合、 i 番目の人は、 $i-5$ 番目から $i+5$ 番目の人と取引していたため、ほぼ同じ順位の人々とのみ取引をしている事になる。したがって、 $W_i(t) \approx \bar{W}_i(t)$ となり、(8) 式は、

$$W_i(t+1) \approx a_i(t)W_i(t)$$

となる。これは、(3) 式と同じであるため、分布は時間に依存した平均値と分散を持つ対数正規分布に従う。以上より、分布が不平等になるのは、富のクラスター化が原因であると言える。

図 7 (c), (d) に対応するのが図 8 (c), (d) であり、エッジをつなぎ変えてスモールワールドネットワークにすることにより、富のクラスター化が解消されている事が確認できる。また、大きい富の領域では富のクラスター化が起これば、前者の分布は Pareto 法則に従い、後者の分布は Gibrat 法則に従う事になる。

7. おわりに

この論文では、個人所得の分布と高額な富の分布に対して、実証的解析を行った。そして、高額な所得や富は Pareto 法則 (冪分布) に従い、低中所得は Gibrat 法則 (対数正規分布) に従う事が、少なくとも資本主義の下では、普遍的に成り立つ可能性がある事を示した。また、富の分布を説明する数理モデルとして、スモールワールドネットワーク上で乗算的確率過程を定義し解析を行った。そして、エッジ数の減少は富のクラスター化を引き起こし、不平等な分布をもたらすが、エッジをつなぎ変えてスモールワールドネットワークにすることによって、富のクラスター化が鈍化し、平等な配分へと改善される事を示した。このことを平たく言えば、次のように表現できる。取引相手が少なく、レギュラーネットワークのような社会では、貧乏人は貧乏人と取引し、金持ちは金持ちと取引するという、ある種の階層社会が実現されている。だが、たとえ少ない相手とのみ取引している社会であっても、エッジをつなぎ変えてスモールワールドネットワーク

にすることによって、貧乏人が金持ちと取引をするチャンスが生まれ、このことによって社会階層は崩壊し平等な社会へと移っていく。現在、貧困に苦しんでいる国々では、多くの人々が自国内の貧しい人々と取引をすることによって生計を立てている。そして、そのような国々では、豊かな他国と取引できる産業が育っていない。したがって、貧困を克服し平等な世界を形成していくためには、そのような国々の産業を建て直し、豊かな国々と取引をする機会を増やすことが必要であることを、我々のモデルは主張している。また、スモールワールドネットワーク上での取引が、Pareto 法則と Gibrat 法則の双方が現れる理由になっている事も指摘した。

所得分布に関する研究の今後の展開としては、所得成長率が興味深いと考えている。現在までに、企業所得の成長率は、所得規模に依存しない事が明らかにされている¹²⁷⁾。そして、この性質が、所得というものが持つ普遍的な性質であるならば、個人所得に対しても同様な事が期待できる。それを確かめるには、個人を特定できる連続した年のデータが不可欠である。最近、我々はその様なデータを入手したので、近い将来に結果を報告する²⁸⁾。

マルチエージェントなどの多くの要素が相互作用する問題に対して、現在までになされてきた多くの研究は、レギュラーネットワークやランダムネットワークの上でのダイナミクスを考えてきた。だが、そのようなネットワークは、人間が故意に作らない限り現実には存在しない。したがって、そのようなネットワークを用いた研究の多くは、スモールワールドネットワークを用いて、もう一度考え直す必要があるかもしれない。また、マルチエージェントのシミュレーションにおいて、エージェントとネットワークの間でのフィードバックが興味深いと考えている。つまり、システムを構成しているエージェントが、自分の目的や全体のルールに従ってエッジをつなぐ事によりネットワークを構成し、そのように構成されたネットワークのトポロジーが、エージェントの行動に影響を及ぼすようなシステムである。このようなシステムの研究は、経済や社会システムの理解を目的とした研究の他に、情報通信でのアドホックネットワークの構成とプロトコルの開発などの、実用的な研究にも応用できると考えられる²⁹⁾。

なお本研究は、通信・放送機構の研究委託「人間情報コミュニケーションの研究開発」により実施したものである。

参 考 文 献

- 1) 高安秀樹, 高安美佐子: エコノフィジックス 市場に潜む物理法則, 日本経済新聞社 (2001)
- 2) V. Pareto: Cours d'économie politique, Macmillan (1897)
- 3) 高安秀樹: フラクタル, 朝倉書店 (1986)
- 4) R. Gibrat: Les inégalités économiques, Sirey (1931)
- 5) W. W. Badger: An entropy-utility model for the size distribution of income, In: B. J. West. (Ed) Mathematical models as a tool for the social science, 87/120, Gordon and Breach (1980)
- 6) E. W. Montroll and M. F. Shlesinger: Maximum entropy formalism, fractals, scaling phenomena, and $1/f$ noise: a tale of tails, J. Stat. Phys., 32, 209/230 (1983)
- 7) 国税庁: 税務統計から見た民間給与の実態, 大蔵省 (1955-1998)
- 8) 大蔵省主税局: 主税局年報書, 大蔵省 (1887-1902)
- 9) 大蔵省主税局: 主税局統計年報書, 大蔵省 (1903-1946)
- 10) 国税廳: 国税廳第 73 回統計年報書, 大蔵省 (1947)
- 11) 国税庁: 国税庁統計年報書, 大蔵省 (1948-1998)
- 12) H. Aoyama, W. Souma, Y. Nagahara, M.-P. Okazaki, M. Takayasu and H. Takayasu: Pareto's law for income of individuals and debt of bankrupt companies, Fractals, 8, 293/300 (2000)
- 13) W. Souma: Universal structure of the personal income distribution, Fractals, 9, 463/470 (2001)
- 14) W. Souma: Physics of personal income, In: H. Takayasu (Ed) Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics, 343/352, Springer (2002)
- 15) Forbes.com: <http://www.forbes.com/>
- 16) H. Kesten: Random difference equations and renewal theory for products of random matrices, Acta. Math., 131, 207/248 (1973)
- 17) D. Sornette and R. Cont: Convergent multiplicative processes repelled from zero: power laws and truncated power laws, J. Phys., 17, 431/444 (1997)
- 18) H. Takayasu, A.-H. Sato and M. Takayasu: Stable infinite variance fluctuations in randomly amplified Langevin systems, Phys. Rev. Lett., 79, 966/969 (1997)
- 19) D. Sornette: Multiplicative processes and power laws, Phys. Rev., E57, 4811/4813 (1998)
- 20) J. P. Bouchaud and M. Mézard: Wealth condensation in a simple model of economy, Physica, A282, 536/545 (2000)
- 21) Z. Burda, D. Johston, J. Jurkiewicz, M. Kaminski, M. A. Nowak, G. Papp and I. Zahed: Wealth Condensation in Pareto Macro-Economies, Phys. Rev., E65, 026102/026105 (2002)
- 22) P. Ball: Wealth spawns corruption, Nature, Jan 28th 2002
- 23) D. J. Watts and S. H. Strogatz: Collective dynamics of 'small-world' networks, Nature, 393, 440/442 (1998)
- 24) R. Albert, H. Jeong and A.-L. Barabási: Diameter of the world wide web, Nature, 401, 130/131 (1999)
- 25) W. Souma, Y. Fujiwara and H. Aoyama: Small-world effects in wealth distribution, arXiv:cond-mat/0108482
- 26) W. Souma, Y. Fujiwara and H. Aoyama: Wealth distribution on scale-free networks, in preparation
- 27) K. Okuyama, M. Takayasu and H. Takayasu: Zipf's law in income distribution of companies, Physica, A269, 125/131 (1999)
- 28) Y. Fujiwara, W. Souma and H. Aoyama: Direct observation of growth and fluctuation of personal income, in preparation
- 29) 相馬 亘, 下原勝憲: スモールワールドネットワークの役割, 第 2 回 NGN 研究会論文集, 13/20 (2001); <http://www.ieice.org/cs/ngn/>