



安定多様体の近似によるハミルトン・ヤコビ方程式の近似解法

坂本 登*

A Method for Solving the Hamilton-Jacobi Equation via Approximation of Stable Manifolds

Noboru Sakamoto*

Key words: Optimal control, Hamilton-Jacobi equation, Stable manifold

1. はじめに

制御工学における最も基本的問題のひとつに、制御量と状態変数の二乗和を制御過程で時間積分した量を最小にする制御戦略を求める問題がある。この問題の解として得られる制御則は、フィードバックという単純かつロバスト性が高い形を取り、工学的に有用であることがよく知られている。対象システムが線形常微分方程式で表されるとき、この問題は、ある行列方程式(リッカチ方程式)を解くことで、線形状態フィードバックの形で解が与えられる。60年代に得られたこの成果(LQ最適制御)をベースにして、線形制御理論はその後大きく発展し、90年代に H^∞ 制御理論として完成された。現在、線形制御理論が産業界の様々な場面で重要な役割を果たしていることは、多くの工学系関係者の良く知るところである。

LQ最適制御とはほぼ同時期に、対象システムが非線形方程式で表される問題も研究されたが⁶⁾、こちらの方は現在なお適用が困難で、産業界での応用はほとんど報告されていない。その最も大きな理由は、リッカチ方程式に対応する方程式を解く手段がないことにある。この方程式は、ハミルトン・ヤコビ方程式と呼ばれ、最適制御に限らず多くの場面で非線形制御理論に現れ、この分野の実用性を阻害し続けている。

本解説記事では、著者らが近年開発したハミルトン・ヤコビ方程式の近似解法⁸⁾を紹介する。従来多くの

近似解法が提案されたが、いずれも実用には不十分であるといわれている²⁾。ここで紹介する解法は、著者らが過去に行った幾何学的研究に基づいており^{8,10)}、その自然さと計算機での実行性などから、従来研究とは著しい違いがあると考えている。まず第2節で最適制御とハミルトン・ヤコビ方程式の関係を述べ、第3節では、リッカチ方程式の理論を概観した上で、ハミルトン・ヤコビ方程式の解の幾何学理論を解説する。これによると、解(関数)を求めることは、ある種の曲面を構成することに帰着され、制御理論で重要な安定化解は、あるハミルトン系の安定多様体を求めればよいことがわかる。第4節では、安定多様体の近似理論を示し、それがいかにして安定化解の近似的構成につながるかを解説する。この近似アルゴリズムの特徴などに触れた後、第5節では、いくつかの適用例でその有効性を示す。

2. ハミルトン・ヤコビ方程式と最適制御

m 入力 r 出力をもつ制御システム

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

を考える。ここで、状態 $x(t)$ の次元は n とし、写像 f, g, h は十分に滑らかで、 $f(0)=0, h(0)=0$ と仮定する。

最適制御問題: Σ_1 に対して、次で与えられる評価関数を最小にする入力(最適入力)を求めよ。

$$J(x_0, u) = \int_0^{\infty} q(x(t)) + u(t)^T R u(t) dt$$

ここで、 X_0 は Σ の初期値を表し、 $q(x)$ は正定関数、 R は正定な対称行列とする。

* 名古屋大学工学研究科
Graduate School of Engineering, Nagoya University

ある関数 $V(x)$, $V(0)=0$ が次の条件 (i), (ii) を満たすとする.

$$i) \quad \frac{\partial V}{\partial x} f(x) - \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x} + q(x) = 0$$

$$ii) \quad f(x) - \frac{1}{2} R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x} \text{ は漸近安定なベクトル場.}$$

このとき, 最適入力 は次式で与えられる.

$$u = -\frac{1}{2} R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}$$

i) にある V に関する偏微分方程式をハミルトン・ヤコビ方程式とよび⁵⁾, ii) を満たす解を安定化解とよぶ.

この形の偏微分方程式は, 最適制御以外にも, H^∞ 制御理論¹¹⁾ や, 消散システム理論^{12,3,4)} などにも現れる, まさにシステム制御理論においてユビキタスな方程式といえる.

3. ハミルトン・ヤコビ方程式の安定化解

第2節の方程式を含む形で, 一般的なハミルトン・ヤコビ方程式を次式で表す.

$$(HJ) \quad p^T f(x) - \frac{1}{2} p^T R(x) p + q(x) = 0$$

ここで, 未知関数 $V(x)$ に対して $p = (\partial V / \partial x)^T$ とする. 例えば, 最適制御型なら $R(x) \geq 0$, $q(x) \geq 0$, H^∞ 型なら, $R(x), q(x)$ は正, 負いずれの値もとりのう. また, $H = p^T f(x) - \frac{1}{2} p^T R(x) p + q(x)$ をハミルトニアンとよぶ. (HJ) の安定化解とは, ベクトル場 $f(x) - R(x)p(x)$ が漸近安定となる解 $V(x)$ のことをいう.

線形システムの場合, $f(x) = Ax$, $R(x) = R$ (定数行列), $q(x) = x^T Qx$ とおき, $V(x)$ を対称行列 P の二次形式に限れば, 方程式(HJ)はよく知られた代数リッカチ方程式が得られる.

$$(RIC) \quad PA + A^T P - PRP + Q = 0$$

このとき, (RIC) の解で $A - RP$ が安定行列となるものをやはり安定化解という. また,

$$\text{Ham} = \begin{pmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}$$

はハミルトン行列とよばれる. 次の定理は, 線形制御理論の発展において非常に重要な役割を果たした^{1,7)}.

定理1. (RIC) に安定化解の存在するための必要十分条件は, 以下の二つが成り立つこと.

$$\begin{cases} \text{Ham は純虚数の固有値をもたない} \\ E_- \oplus \text{Im} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} = \mathbb{R}^{2n} \end{cases}$$

ここで, E_- は, 安定な n 個の固有値に対する Ham の一

般化固有空間である. 上の条件が成り立つとき,

$$\text{Ham} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} E_1, \quad E_1: n \text{ 次安定行列}$$

と表せば, (RIC) の安定化解は, $P = T_2 T_1^{-1}$ で与えられる.

換言すれば, 安定化解はハミルトン行列の作る線形流れに関し不変な空間で, そこへ制限した流れが原点に収束するような部分空間に等しい. この幾何学的理解は, 非線形システムへ移行するときに非常に重要になる.

さて, ハミルトン・ヤコビ方程式では, 次のハミルトンベクトル場(ハミルトン系)が, リッカチ方程式の理論におけるハミルトン行列と同じ役割をする.

$$X_H(x, p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T$$

これを具体的に計算すると,

$$X_H(x, p) = \begin{pmatrix} f(x) - R(x)p \\ -\frac{\partial f}{\partial x}(x)^T p + \frac{\partial(p^T R(x)p)^T}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (1)$$

となる. ここで, $f(x) = Ax + O(|x|^2)$, $R(x) = R(0) + O(|x|)$, $q(x) = x^T Qx + O(|x|^3)$ と表すと (A, Q は適当な定数行列), X_H は次式のように, ハミルトン行列を用いて

$$X_H(x, p) = \text{Ham} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + O((|x| + |p|)^2)$$

$$\text{Ham} = \begin{pmatrix} A & -R(0) \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}$$

と表せる. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理2.¹⁰⁾ Ham を Hamilton 行列とする Riccati 方程式

$$PA + A^T P - PR(0)P + Q = 0$$

が安定化解をもつならば, (HJ) の安定化解が原点近傍に存在する.

定理2は, 次の補題を用いて示される.

補題3.¹⁰⁾ Ham が虚軸上に固有値をもたなければ, X_H の安定多様体は可積分条件を満たし, ある関数 $V(x)$ が存在して, 安定多様体を $p = (\partial V / \partial x)^T$ と表すことができる.

補題3の関数 $V(x)$ が求める安定化解になる. なお, シンプレクティック幾何学を用いたハミルトン・ヤコビ方程式とその安定化解の解析については, 拙論⁸⁾を参照されたい.

4. 安定化解の近似計算法⁹⁾

さて, 前節までで, 非線形制御系の設計に必要なハ

ミルトン・ヤコビ方程式の安定化解は、ハミルトン系の安定多様体を求めればよいことがわかった。本節では、安定多様体を逐次的に近似することで、安定化解を近似的に求める手法を紹介する。

次式で表される常微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + f(x, p) \\ \dot{p} = -F^T p + g(x, p). \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 F は漸近安定な実数行列で、 $f, g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は C^r 級 ($r \geq 2$) とする。関数の列を次式で定める。

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{Ft} \xi + \int_0^t e^{F(t-s)} f(s, x_k(s), p_k(s)) ds \\ p_{k+1} = -\int_t^\infty e^{-F^T(t-s)} g(s, x_k(s), p_k(s)) ds \end{cases} \quad (3)$$

for $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{cases} x_0 = e^{Ft} \xi \\ p_0 = 0 \end{cases}$$

ここで $\xi \in \mathbb{R}^n$ は任意のパラメータとする。

定理4. 上記の仮定の下で $x_k(t, \xi)$, $p_k(t, \xi)$ は十分小さな $|\xi|$ に対して t に関する収束関数である、すなわち、

$$x_k(t, \xi), p_k(t, \xi) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty \text{ for all } k = 0, 1, 2, \dots$$

さらに、 $x_k(t, \xi)$, $p_k(t, \xi)$ は、 $k \rightarrow \infty$ のとき (2) 式の解に $[0, \infty)$ 上一様収束する。 $x(t, \xi)$, $p(t, \xi)$ を $x_k(t, \xi)$, $p_k(t, \xi)$ の極限関数とする。このとき、 $x(t, \xi)$, $p(t, \xi)$ は (2) の安定多様体上の解である。したがって、 $x(t, \xi)$, $p(t, \xi) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ が成り立つ。

定理4によって、安定多様体の近似(媒介変数表現)

$$\{(x_k(t, \xi), p_k(t, \xi)) \mid \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi|: \text{十分小}, t \geq t_0\} \quad (4)$$

を得ることができる。

これを使ってハミルトン・ヤコビ方程式の安定化解を近似する手順は次のようになる。

- (i) 与えられたハミルトン・ヤコビ方程式(HJ)からリッカチ方程式(RIC)を求め、その安定化解 $P = \Gamma$ を求める。
- (ii) ハミルトンの正準方程式(1)の線形部分をブロック対角化し、(2)に対応する微分方程式を求める。このとき、 $A - R(0)\Gamma$ が(2)式の行列 F に対応する。
- (iii) 定理4を必要な精度が得られるまで繰り返し、元の座標に戻って、安定多様体の近似の媒介変数表現(4)を求める。
- (iv) (4)式をグラフの形 $\{(x, p), \mid p = p(x)\}$ に表せば、 $p(x) = (\partial V / \partial x)^T$ であり、これからフィードバック制御則は求まる。

さらに、本計算手法の特徴や注意事項をまとめておく。

- a) 計算アルゴリズム(3)は漸化式で与えられており、計算機で実行するのに向いている。さらに、非線形性が多項式の場合、積分計算は部分積分を繰り返すことで解析的に実行することができる。ただし、このときは項数が精度 k について指数的に増加する。
- b) 一方、アルゴリズム(3)を数値的に処理することも可能で、このとき、精度 k の増加に対しても計算量が全く増加しないという利点がある。
- c) この計算で求めているものは、安定化解の偏微分であるが、実は、フィードバック則には解の偏微分が用いられるので、近似解を求めてからそれを偏微分するという従来の手法より、安定化能力において優れた近似手法となっている。
- d) 上の手順(iv)にあるグラフ表現化には、MATLAB® の griddatan と intern を用いる。
- e) ξ に対する仮定のため、安定多様体の近似式(4)は、通常小さい領域になり、制御器として使うのには適さない。しかし、安定多様体の不変性(解がこの多様体上であれば、すべての時刻で解はここから離れることはない)によって、 k を大きくするにつれて t をある負の値 t_0 より大きい半無限区間 $[t_0, \infty)$ で動かすことができる。これによって、精度 k を上げることで領域を拡大することが可能になる(図1参照)。この拡大は、安定多様体が存在する範囲内で任意に繰り返すことができる。

5. 計算例

本節では、二つの例を使って実際の計算がどのように行われるかを解説する。ここでは1, 2次元の例を紹介するが、3次元システムへの適用例として、航空機のストール回避制御則の設計¹³⁾がある。

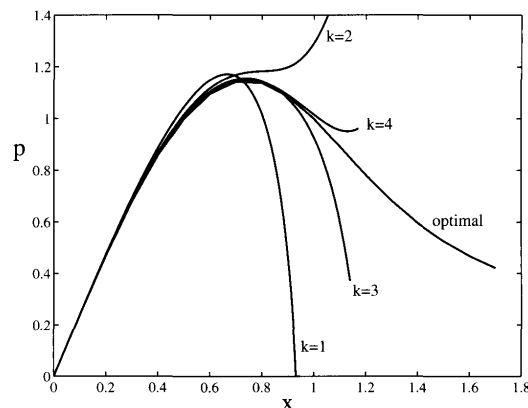


図1 $\xi = 0.42$, 負時刻 -0.8 まで拡大

5.1 数値例

1次元最適制御問題

$$\dot{x} = x - x^3 + u$$

$$J = \int_0^{\infty} \frac{q}{2} x^2 + \frac{r}{2} u^2 dt.$$

はハミルトン・ヤコビ方程式

$$H = p(x - x^3) - \frac{1}{2r} p^2 + \frac{q}{2} x^2 = 0$$

の安定化解を求めることで解ける。正準方程式は

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 - \frac{1}{r} p \\ \dot{p} = -(1 - 3x^2)p - qx. \end{cases}$$

となる。手順に従って対角化した正準方程式は

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+q/r} x' \\ \sqrt{1+q/r} p' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x(x', p')^3 \\ 3x(x', p')^2 p(x', p') \end{pmatrix},$$

となる。ここで

$$x(x', p') = x' - (1 + \sqrt{1+q/r}) p',$$

$$p(x', p') = (r + \sqrt{r^2 + qr}) x' + qp'.$$

である。k=1, ..., 4として繰り返し計算して求めた安定化解の近似の様子を図1に示した。原点での接線はリッカチ方程式の解になっていることに注意されたい。また、kが大きくなるにつれて最適解に一致する領域が拡大している様子が観察できる。

5.2 非線形バネ・マス系の制御

次式(5)で表される非線形ばねにつながれた質量mの質点を外力uによって制御し、評価関数Jを最小にする問題を考える。

$$m\ddot{x} + \kappa x + \varepsilon x^3 = u \quad (5)$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + \dot{x}^2)/2 + u^2 dt,$$

ここでxは釣り合いの位置からの変位を表し、κとεは線形、非線形ばね定数である。以下では、簡単のためm=1, κ=1として話を進める。この最適制御問題は次のハミルトン・ヤコビ方程式の安定化解が求めれば解ける。

$$H = \dot{x}p_1 + (-x - \varepsilon x^3)p_2 - \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \dot{x}^2 = 0.$$

対応するハミルトン系は

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f}(x, p) \\ \bar{g}(x, p) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = I_2$$

$$\bar{f}(x, p) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon x^3 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}(x, p) = \begin{pmatrix} 3\varepsilon p_2 x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

となる。適当な線形変換Tによって(6)はブロック対角

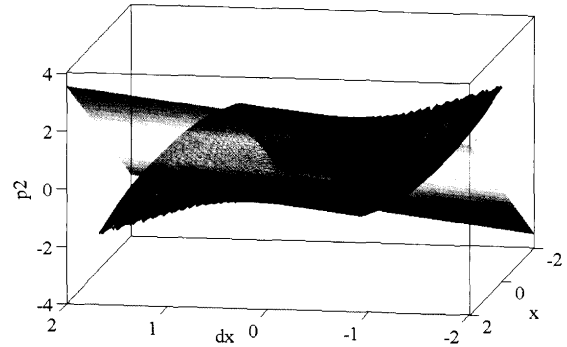


図2 解の偏微分 $\partial V/\partial \dot{x}$ と線形解の第二成分

化され、座標系 $\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ において次式のようにになる。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - R\Gamma & 0 \\ 0 & -(A - R\Gamma)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x', p') \\ g(x', p') \end{pmatrix}, \quad (7)$$

ここで、 Γ は線形近似して得られたリッカチ方程式の安定化解である。(7)式に対して、安定多様体近似アルゴリズムをk=2まで適用し、制御則に必要な $\partial V/\partial \dot{x}$ を求めたのが、図2である。図中、半透明で描かれた平面はリッカチ方程式の解(の偏微分第二成分)である。二つの曲面が原点で接していることに注意されたい。すなわち、得られた非線形制御則は、原点近傍では線形最適制御に一致する。

6. おわりに

本稿では、近年著者らが行っているハミルトン・ヤコビ方程式の近似解法について解説した。この解法は従来解法と異なり、解そのものではなく、解の微分を求めている。この微分のグラフは、幾何学的には、あるハミルトン系の安定多様体をなしており、安定多様体近似理論によって求めることができる。なお、最適制御の原理や消散性理論を用いれば、解(関数)を近似することも可能である。これについては、拙論⁹⁾を参照されたい。紹介した近似アルゴリズムは、様々な興味深い特徴をもっており、計算機を有効に活用した計算が可能である。今後は、ソフトウェア開発を行い、より多くの適用例をこなし評価することを行っていく予定である。

参考文献

- 1) 有本：不規則外乱の影響を最小にするフィードバック制御，計測自動制御学会論文集，2-1，1/7 (1966)
- 2) S. C. Beeler, H. T. Tran, and H. T. Banks: Feedback control methodologies for nonlinear systems, *Journal of Optimization*

- Theory and Applications*, **107**-1, 1/33 (2000)
- 3) D. Hill and P. Moylan: The stability of nonlinear dissipative systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, **21**-10, 708/711 (1976)
 - 4) 井村: 非線形ロバスト制御のための消散性理論, 計測と制御, **43**-3, 275/282 (2004)
 - 5) E. B. Lee and L. Markus: *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley, New York (1967)
 - 6) D. L. Lukes: Optimal regulation of nonlinear dynamical systems, *SIAM J. Control Optim.*, **7**-1, 75/100 (1969)
 - 7) J. E. Potter: Matrix quadratic solutions, *SIAM J. Appl. Math.*, **14**, 496/501 (1966)
 - 8) N. Sakamoto: Analysis of the Hamilton-Jacobi equation in nonlinear control theory by symplectic geometry, *SIAM J. Control Optim.*, **40**-6, 1924/1937 (2002)
 - 9) N. Sakamoto and A. J. van der Schaft: Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the Hamilton-Jacobi equation, *IEEE Trans. Automat. Control*, **53**-10, 2335/2350 (2008)
 - 10) A. J. van der Schaft: On a state space approach to nonlinear H_∞ control, *Syst. Control Lett.*, **16**-1, 1/18 (1991)
 - 11) A. J. van der Schaft: L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control, *IEEE Trans. Automat. Control*, **37**-6, 770/784 (1992)
 - 12) J. C. Willems: Dissipative dynamical systems-Part I, II, *Arch. Rational Mechanics and Analysis*, **45**, 321/393 (1972)
 - 13) 大和, 坂本: 非線形最適制御による航空機のストール近傍からの脱出, 第52回システム制御情報学会研究発表講演会 (2008)
-