

〔連載〕渦運動の基礎知識 (Fundamentals of Vortex Motion)

3. 渦層

*九州大学大学院数理学研究院/宙空環境研究センター 福本 康 秀†

3. Vortex sheet

Yasuhide FUKUMOTO, Graduate School of Mathematics and Space Environment Research Center, Kyushu University

3.1 はじめに

剪断層のように、速度が急激に変化する薄い層状領域内には外部に比べて強い渦度が集中している。これを渦なし流に埋め込まれた厚さのない曲面として理想化したものが渦層あるいは渦面である。渦線方向には一様、すなわち、2次元的な渦層は、無数の点渦を並べた渦列の連続体極限とみなすことができる。

渦層をはさんで両側の流速の接線成分は不連続である。速度の不連続面は波状変形に対して線形不安定である。これを Kelvin-Helmholtz 不安定とよぶ。この不安定性は界面に沿う周期的な渦度の粗密を促す。渦度の極大点を中心として界面はらせん (スパイラル) 状に巻き上がり、その中心にますます渦度が流れ込んでいくという循環に陥り、らせんが膨れ上がっていく。このようにして、渦核が形成される。“浪雲 (なみぐも)”^{注1)} は、この上下波動の乱気流が可視化されたものである¹⁾。渦管や渦輪は、剪断層やジェット界面の巻き上がりを経て形成されることが多い。

この一連のプロセスを渦層によって記述しようとする立場は自然である。2次元渦層は平面上の曲線とみなすことができ、この曲線の運動は Birkhoff-Rott 方程式という微分積分方程式によって支配される。しかし理想化されたモデルゆえの適用限界があり、しかも、この破綻が早めに

訪れる。たとえば、平らな界面のなめらかな無限小変位から出発すると、非線形的な界面の成長段階にはいる以前に、曲率が発散する点が界面上に発現すると考えられている。これを Moore の曲率特異性という²⁾。

第3回目は、有限時刻でおこる曲率特異性を中心にすえて、Birkhoff-Rott 方程式の解の振る舞いについて考える。特異点の種がどこではぐくまれ、それがどのように目の前に現れるのか、界面 (= 曲線) パラメータや時間を複素変数にまで拡張すると、その仕組みをとらえることができる^{注2)}。いったん特異性が出現してしまうと、Birkhoff-Rott 方程式はその役割を終えるが、現象面からは、その後の渦層の巻き上がりの方が重要である。最後に、Birkhoff-Rott 方程式を正則化して、特異性出現に対応する時刻の後の渦層の非線形成長を追跡する試みを紹介する。

3.2 Kelvin-Helmholtz 不安定

x 軸 ($y = 0$) と一致する速度不連続面の 2次元安定性を考えよう。 $y < 0$ の側、 $y > 0$ の側の物理量をそれぞれ下付き添字 1, 2 であらわし、基本流を

$$\begin{cases} U_1 = (U_1, 0) & (y < 0), \\ U_2 = (U_2, 0) & (y > 0) \end{cases} \quad (3.1)$$

ととる。界面に微小変動 $y = \eta(x, t)$ を与えたとき、この攪乱が成長するかどうかを調べよう (図

^{注2)}本節で紹介する特異性に関する内容で数学的に正当化されたものは多くはない。

* 〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

† E-mail: yasuhide@math.kyushu-u.ac.jp

^{注1)} “cat’s eye” ともいう。

1). 流体は非圧縮で密度は一様, したがって, 密度は空間的にも時間的にも一定であるとする. また, 粘性を無視する.

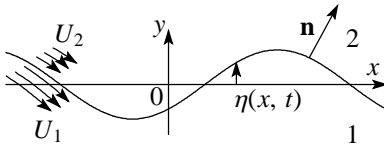


図 1 速度不連続面の変位

線形安定性解析に入る前に, 境界条件について説明を加えておこう. 運動学的境界条件は, 界面上で, 流速の法線成分が界面速度の法線成分と一致することを要請する. 両側の流体に対してこれを要請すると, 界面で, 流速の法線成分が連続的につながる. 渦度は速度不連続面に集中しており^{注3)}, それ以外の領域では渦なしである. 運動学的境界条件は, 渦が流体とともに動くという Helmholtz の第 2 法則 (§1.3) と符合する. 界面をはさんで速度の接線成分は不連続であるので, 界面速度の接線成分は決められないが, 接線成分をどのようにとっても界面の形には影響しない. しかし, 界面の非線形発展の計算に適したとり方が 1 つある. それについては §3.4 で触れる.

グラフとして与えられた界面を, 曲線のパラメータ ξ を用いて,

$$X(\xi, t) = (X(\xi, t), \eta(X(\xi, t), t)) \tag{3.2}$$

とかこう. 界面の運動速度は, ξ を Lagrange パラメータとみると,

$$\frac{\partial X}{\partial t} \Big|_{\xi} = \left(\frac{\partial X}{\partial t}, \eta_x \frac{\partial X}{\partial t} + \eta_t \right) \tag{3.3}$$

である. 添字付きの η_x, η_t は, η の, それぞれ, x, t に関する偏微分をあらわす. 界面の変形にもなう速度場の攪乱は渦なしで, その速度ポテンシャルを, 各領域で, $\phi_j (j = 1, 2)$ とおこう. 界面の形は $F(x, y; t) = y - \eta(x, t) = 0$ とあらわされ, その法線ベクトルは ∇F の方向を向く. 領域

^{注3)}渦度は無限大である.

1 の外向き単位法線ベクトル n は

$$n = \frac{1}{(1 + \eta_x^2)^{1/2}} (-\eta_x, 1) \tag{3.4}$$

で与えられる. 各領域 $j (j = 1, 2)$ の境界で, 界面速度 (3.3) の法線成分と流速の法線成分が一致するという要請

$$n \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial t} \Big|_{\xi} - (U_j + \nabla \phi_j) \right) = 0 \tag{3.5}$$

は

$$\eta_t + U_j \eta_x = (1 + \eta_x^2)^{1/2} (n \cdot \nabla) \phi_j \text{ at } y = \eta \tag{3.6}$$

とかける³⁾. この形が運動学的境界条件の通常の実現 $DF/Dt = 0$ と同じであることはただちに確かめられる.

線形安定性解析では, 界面変位の振幅は波長に比べてずっと小さい

$$|\eta_x| \ll 1 \tag{3.7}$$

ことを仮定する. このとき, (3.6) は

$$\eta_t + U_j \eta_x = \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \text{ at } y \approx 0 \tag{3.8}$$

に帰着する. 流体の密度を ρ とすると, Bernoulli の定理より, 領域 $j (j = 1, 2)$ での圧力 p_j は速度ポテンシャル ϕ_j と

$$\frac{p_j}{\rho} = - \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \frac{1}{2} (U_j + \nabla \phi_j)^2 \right] + C_j \tag{3.9}$$

によって結ばれている. ここで, $C_j = C_j(t)$ は t の任意関数である. 力学的境界条件は, 界面で圧力が連続であること,

$$p_1 = p_2 \text{ at } y = \eta \tag{3.10}$$

を要請する. 攪乱振幅が無限小のときは, 振幅について 1 次までで,

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \text{ at } y \approx 0 \tag{3.11}$$

となる. ここで, C_1, C_2 は, 攪乱がないときに圧力が連続になるようにとった.

さて、界面の形を

$$\eta(x, t) = \text{Re} \left[e^{ikx} a(t) \right] \quad (3.12)$$

とおこう。記号 $\text{Re}[\cdot]$ は実部をとることを意味する。流体は非圧縮 ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) であるので、速度ポテンシャル ϕ_j は Laplace 方程式にしたがう：

$$\nabla^2 \phi_j = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_j = 0. \quad (3.13)$$

界面の形 (3.12) に適合する (3.13) の解は、領域 1 ($y < \eta$) では、

$$\phi_1(x, y, t) = \text{Re} \left[e^{ikx} e^{kly} B_1(t) \right] \quad (3.14)$$

である。因子 e^{-kly} を含む項は、 $y \rightarrow -\infty$ の極限で発散するので、除外した。領域 2 ($y > \eta$) では、

$$\phi_2(x, y, t) = \text{Re} \left[e^{ikx} e^{-kly} B_2(t) \right] \quad (3.15)$$

である。このとき、運動学的境界条件 (3.8) は、領域 1, 2 側の界面上で、それぞれ、

$$\dot{a} + ikU_1 a = |k| B_1, \quad (3.16)$$

$$\dot{a} + ikU_2 a = -|k| B_2 \quad (3.17)$$

に帰着する。上付きドットは時間微分をあらわす。力学的境界条件 (3.11) は、

$$\dot{B}_1 + ikU_1 B_1 - (\dot{B}_2 + ikU_2 B_2) = 0 \quad (3.18)$$

となる。振幅関数は $e^{\sigma t}$ 型、 $a(t) = a(0)e^{\sigma t}$ 、にすることができて、(3.16) と (3.17) を用いて (3.18) から B_1 と B_2 を消去すると、 a の係数は、

$$(\sigma + ikU_1)^2 + (\sigma + ikU_2)^2 = 0 \quad (3.19)$$

となる。これを解くと、 σ が次のように求められる：

$$\sigma = -\frac{ik}{2}(U_1 + U_2) \pm \frac{1}{2}|k||U|. \quad (3.20)$$

ここで、

$$U = U_1 - U_2 \quad (3.21)$$

とおいた。この実部が正のとき、攪乱は指数関数的に成長し、 $\text{Re}[\sigma]$ が増幅率を与える。2 つある (3.20) のうち、+ 符号の方が $\text{Re}[\sigma] > 0$ となって、速度不連続面をもつこの流れは線形不安定であることが結論づけられる。これを **Kelvin-Helmholtz 不安定 (KH 不安定)** という。増幅率 $|kU|/2$ は、§2.5 の直線渦列の変位攪乱に対する線形安定性の計算で、点渦間隔を 0 にする連続体極限における増幅率 (2.54) と一致する。

Kelvin-Helmholtz 不安定が起こるのは、渦度の濃淡が一方向的に拡大し続けるからである⁴⁾。固有関数は、

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2} \left(\pm |U| + i \frac{k}{|k|} U \right) a, \\ B_2 &= \frac{1}{2} \left(\mp |U| + i \frac{k}{|k|} U \right) a \end{aligned} \quad (3.22)$$

をみたとす。(3.20) とは複号同順である。実定数 ϵ を用いて、界面振幅を $a = -i\epsilon \exp(\sigma t)$ とおこう。複素数 σ の実部と虚部を、それぞれ、 σ_r, σ_i とおくと、界面の形 (3.12) は

$$\eta = \epsilon e^{\sigma_r t} \sin \Theta; \quad \Theta = kx + \sigma_i t \quad (3.23)$$

とかける。式 (3.22) を (3.14) と (3.15) に代入して、固有モードの攪乱速度の x 成分の界面での平均値の 2 倍と速度差を計算すると、結果は次のように求まる：

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} = -\epsilon |k| U e^{\sigma_r t} \sin \Theta, \quad (3.24)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} = \pm \epsilon k |U| e^{\sigma_r t} \cos \Theta. \quad (3.25)$$

速度の跳びは、符号も含めて、界面の単位長さなりに含まれる渦度、すなわち、渦度の線密度と関係している (§3.4)。 $U_1 + U_2 = 0$ ($\sigma_i = 0$)、 $U > 0$ 、 $k > 0$ の場合について議論すれば十分であろう。2 次元渦層上の各点に、平均的には、 z 方向正の渦度密度が分布している。波数 $k > 0$ のとき、界面は図 2 のように変位する。この変位によって、安定・不安定のいかによらず、渦層に沿う流れ

(3.24) が誘起され、渦層内の渦度が運ばれる。これは、点 x_1, x_3 から $x_0 (= 0), x_2$ に向かう流れである (矢印 \Rightarrow, \Leftarrow)。渦度の線密度が (3.25) の上側の符号で与えられるとき、 $t = 0$ で x_0, x_2 の渦度密度が大きく、移流によって、そこに渦度がますます集まり、これを中心とする反時計回りの回転運動によって界面の変位が増大する。すなわち、不安定である。逆に、(3.25) の下側の符号の場合、 $t = 0$ で x_1, x_3 の渦度密度が大きく、移流によって渦度が平滑化されていく^{注4)}。

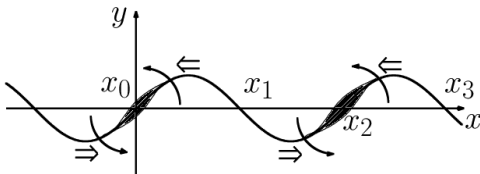


図2 Kelvin-Helmholtz 不安定のメカニズム

渦度密度の濃淡の拡大の議論を非線形領域まで外挿すると、たとえば、 $U > 0$ のとき、 x_0, x_2 を中心に渦層は巻き上がって、そこを起点とする二重らせん形 (double-branched spiral) に成長していくという可能性がもっともらしい。しかし、渦層というモデルはこのシナリオをすんなりとは受け入れてくれない。基本流に特徴的な長さのスケールがないことにより、増幅率 (3.20) が高波数でも k の 1 次に比例して際限なく増大するという事実が障害となる。

3.3 有限時刻での特異点発現の可能性

有限時間内に、渦層の形状に特異点が発現することは簡単に予想できる⁶⁾。以下、 $U_2 = -U_1$ とし、 $U = U_1 - U_2 > 0$ にとろう。

周期 $2\pi/|k|$ の波の重ね合わせからなる初期攪乱を考える。前節の議論を踏まえると、線形近似のレベルで、界面の時間発展は

$$\eta(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n(0)e^{\sigma_n t} + b_n(0)e^{-\sigma_n t}] e^{inkx} \tag{3.26}$$

注4) 変位を増大する方向に圧力勾配が生じるという議論もわかりやすい⁵⁾。

とかける。ここで、

$$\sigma_n = \frac{n}{2}|k||U_1 - U_2| = \frac{1}{2}|k|nU \tag{3.27}$$

とおいた。変位 η が実数値をとるので、 $a_{-n}(0) = \overline{a_n(0)}$ 、 $b_{-n}(0) = \overline{b_n(0)}$ の関係がある。上付きバーは複素共役をあらわす。係数 $\{a_n(0)\}, \{b_n(0)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は、初期 ($t = 0$) の渦層の変位 $\eta(x, 0)$ と初期の渦度分布の両方によって指定される。

ポイントを明確にするために、(3.26) の前半部にのみ着目しよう： $b_n(0) = 0$ 。(3.26) の右辺の収束性は大きな n をもつ $a_n(0)$ の振る舞いで決まる。仮に、正の定数 α と p を用いて、

$$a_n(0) = e^{-\alpha n} n^{-p} \quad (n \gg 1) \tag{3.28}$$

のように振る舞うとしよう。このとき、(3.26) の右辺で $t = 0$ とおいたもの、さらに、それを x について何回微分したものも収束して、その値は x について連続である。すなわち、初期変位 $\eta(x, 0)$ は“なめらか”^{注5)}である。これは、Fourier 係数 $a_n(0)$ ($n \gg 1$) が n について指数関数的に減少するからである。しかし、(3.26) の Fourier 係数

$$a_n(0)e^{\sigma_n t} = e^{-(\alpha - U|k|t/2)n} n^{-p} \tag{3.29}$$

は、時間がたつにつれて、減衰因子 $\alpha - U|k|t/2$ を小さくしていく。やがて、

$$\alpha - \frac{U}{2}|k|t_c = 0 \tag{3.30}$$

をみたす時刻 t_c において、この因子が 0 となつて、界面のなめらかさが失われる。 p を超えない整数を $[p]$ とかくと、 $p - 1 < [p] \leq p$ で (3.26) の $[p]$ 階導関数が収束しない。

Fourier 係数は初期条件に依存する。典型的な初期条件に対しては、(3.28) の形をとり、 $p = 5/2$ が選ばれることが多いようである⁷⁾。このときには、 $\eta(x, t_c)$ の 2 階微分が発散する点が生ずる。

以上、線形安定性解析にもとづいて、初期値がなめらかな微小攪乱であったとしても、やがて微係数が爆発することを大ざっぱに論じた。このこ

注5) とくに断らなければ、 C^∞ 級 (無限回微分可能) の意味で用いる。

とを、線形化初期値問題が“Hadamardの意味で非適切である (ill-posed)”という。しかし、特異性が現れるかどうかの正否は、非線形相互作用によってこの傾向が抑制されることなく、むしろ増長されるかどうかにかかっている。特異点の出現時刻 t_c や特異点のタイプなど、具体的な特異流れ場も線形近似の範囲内では決まらない^{注6)}。

3.4 Birkhoff-Rott 方程式

無限にひろがる領域に形成された渦層の2次元非線形運動について考えよう。渦層は z 方向には一様で、渦度は z 成分のみをもつとすると、渦層は平面上の曲線とみなせる。それをパラメータ ξ を用いて、 $X(\xi, t) = (X(\xi, t), Y(\xi, t))$ とかく。

渦度 ω による誘導速度の x 成分 u および y 成分 v は、それぞれ、Biot-Savart の法則 (1.65), (1.66) によって与えられる。渦度は渦層曲線 C 内に閉じ込められていて、 C に沿う単位長さ当りの渦度の総量を $\Omega(s, t)$ とおくと、2次元の Dirac デルタ関数を用いて、

$$\omega(x, t) = \int_C \Omega(s, t) \delta(x - X(s, t)) ds \quad (3.31)$$

とあらわせる。曲線のパラメータを弧長 s にとった。渦層に直交する方向の積分は実行できて、(1.65), (1.66) は

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{y - Y(s', t)}{|x - X(s', t)|^2} \Omega(s', t) ds', \\ v &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{x - X(s', t)}{|x - X(s', t)|^2} \Omega(s', t) ds' \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる。 $Z(s, t) = X(s, t) + iY(s, t)$ とおいて、複素数表示にまとめると、

$$u - iv = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Omega(s', t)}{z - Z(s', t)} ds' \quad (3.33)$$

である。これらの渦層上 $z = Z(s, t)$ での値が渦層の運動速度を与える (Helmholtz の第2法則)。しかし、これで定式化が片づいたわけではない。この特異積分を評価する処方せんがないし、渦層 C をはさんで、流速の渦層への接線成分が不連

^{注6)}特異点の出現は非線形相互作用に負うが、初期変位が十分小さければ、 t_c においても振幅は小さいままであるので⁸⁾、線形近似である程度記述できるものもある⁷⁾。

続で、渦層の運動速度の接線成分も決まらない。また、線密度 $\Omega(s, t)$ の時間変化を決める仕事も残っている。

渦層 C の両側の領域 1, 2 では、流れはポテンシャル流である。渦度の線密度は、渦層をはさんでの速度ポテンシャルの値の差と関係している。領域 1 から 2 に向かうように、 C 上に単位法線ベクトル n をとろう (図3)。そして、領域 1 側の速度の渦層境界での値を u^- 、領域 2 側の境界値を u^+ とおく^{注7)}：

$$\begin{aligned} u^+(X) &= \lim_{\delta \downarrow 0} u_2(X + \delta n), \\ u^-(X) &= \lim_{\delta \downarrow 0} u_1(X - \delta n). \end{aligned} \quad (3.34)$$

下向き矢印 \downarrow は、 δ の値を正に保ったまま 0 に限りなく近づける操作をあらわす。しばらくの間だけ、時間 t 依存性を忘れることにする。図3のように渦層曲線を中央にはさみこむようなたてに薄い微小な矩形領域 (たて 2δ , よこ l) をとり、そこで、Stokes の定理 $\oint u \cdot dx = \int \omega dA$ を適用する。話をわかりやすくするために、極限 $\delta \downarrow 0$ をとる前は、渦度は矩形領域に一様に分布していると考えると、

$$(u_{||}^-(X) - u_{||}^+(X)) l \approx \omega(X) l \cdot 2\delta \quad (3.35)$$

となる。 $u_{||}^+$ は速度 u^+ の接線成分で、 C 上の点 X における単位接線ベクトルを $t = t(X)$ とすると、 $u_{||}^+ = u^+ \cdot t$ である。たて辺に沿う線積分は、極限で消えるので、あらかじめ省略した。これより、渦度の線密度は接線速度の差と関係づけられる：

$$\Omega(X) = \lim_{\delta \downarrow 0} \omega(X) \cdot 2\delta = -[u_{||}](X). \quad (3.36)$$

ここで、一般に、界面を隔てた物理量の跳びを、 $[\cdot]$ であらわす：

$$[u_{||}](X) = u_{||}^+(X) - u_{||}^-(X) \quad (3.37)$$

領域 j で $\phi = \phi_j$ ととり、(3.34) にならって、速度ポテンシャルの境界値を

$$\phi^\pm(X) = \lim_{\delta \downarrow 0} \phi(X \pm \delta n), \quad (3.38)$$

^{注7)}§3.2 と異なり、本小節以降、ベクトル u_j およびポテンシャル ϕ_j は全流速に対して用いる。

とかくと, (3.36) は

$$\Omega = -[(t \cdot \nabla)\phi] = -\left[\frac{\partial\phi}{\partial s}\right] \quad (3.39)$$

に帰着する.

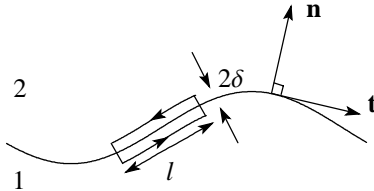


図3 渦層を含む矩形領域

時間変数 t を復活させて, Ω , そして, 渦層曲線 C の時間発展を導こう. 曲線パラメータ ξ を Lagrange 変数とみて, C 上の点 $X(\xi, t)$ が, C を隔てて不連続な速度ベクトルの境界値のちょうど平均の値で動くことと仮定しよう. この平均値を $V(\xi, t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} X(\xi, t) &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}^+(X, t) + \mathbf{u}^-(X, t)) \\ &= V(\xi, t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

が ξ の定義となる. ここで, 速度ポテンシャルの境界値の差を

$$\Phi(\xi, t) = \phi^+(X(\xi, t), t) - \phi^-(X(\xi, t), t) \quad (3.41)$$

とおくと, このときに限り,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \right\} = 0 \quad (3.42)$$

という著しい性質がある⁹⁾. これは, $\partial\Phi/\partial\xi$ が Lagrange 不変量であることを意味する.

定義 (3.41) の両辺を t で偏微分すると,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} \right] + \mathbf{V} \cdot [\nabla\phi] \quad (3.43)$$

を得る. Bernoulli の定理

$$\frac{\partial\phi_j}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}_j^2}{2} + \frac{p_j}{\rho} = C_j \quad (3.44)$$

の両辺の C の両側での値の差をとると,

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} \right] + \frac{1}{2} [\mathbf{u}^2] = [C] \quad (3.45)$$

を得る. 圧力項が落ちたのは, 境界条件 (3.10) のおかげである. 右辺の $[C]$ は任意関数 $C_j(t)$ ($j = 1, 2$) の差で, やはり, t の任意関数である. 左辺第 2 項は,

$$[\mathbf{u}^2] = (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot (\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-) = 2 [\nabla\phi] \cdot \mathbf{V} \quad (3.46)$$

と書きなおすことができ, (3.43) と (3.45) を比べると,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = [C] \quad (3.47)$$

が導かれる. 右辺は ξ にはよらないので, (3.47) の両辺を ξ について偏微分すると, (3.42) に到達する. 渦層上の点 $X(\xi, t)$ がそこに接する両側の流体の平均速度 (3.40) で運動するときのみ, (3.42) が成立することを繰り返し強調しておく. つまり, 恒等式 (3.46) にぴったりはまる仕掛け (3.40) がここで効いているわけである.

定義 (3.41) を思い出すと, 渦層の無限小長さ ds に含まれる渦度は, (3.39) を介して,

$$\Omega ds = -\frac{\partial\Phi}{\partial s} ds = -\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} d\xi = d\Gamma \quad (3.48)$$

と, $\Gamma = -\Phi + \text{const.}$ の微分としてかける. これは, ある基準点からはかった渦度の総量 (= 循環) で,

$$\Gamma_\xi = \frac{d\Gamma}{d\xi} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \quad (3.49)$$

が Lagrange 不変量となることは, Kelvin の循環定理と符号する.

境界値 (3.34) の平均は, (3.33) の右辺の主値積分によって計算できる. 結局, 点 $X(\xi, t)$ の運動速度 (3.40) は

$$\frac{\partial Z(\xi, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \text{pv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_\xi(\xi')}{Z(\xi, t) - Z(\xi', t)} d\xi' \quad (3.50)$$

と求められた^{注8)}. 記号 $\text{pv} \int$ は主値積分をあらわす. 渦層の運動の初期値問題を支配するこの微分

^{注8)} Γ 自身をパラメータにとると便利である.

積分方程式は **Birkhoff-Rott** 方程式 とよばれる^{6,10)}。渦層の運動速度の接線成分は渦層の形には無関係であるが、主値積分をとったおかげで、 Γ_ξ の時間発展が不要になり、大幅な簡単化が達成された。

初期に、 $Z(\xi, 0)$ と $\Gamma_\xi(\xi)$ が Lagrange パラメータ ξ について周期的ならば、その後の発展でも周期性は保たれる。一般性を失うことなく、

$$Z(\xi + 2\pi, 0) = 2\pi + Z(\xi, 0), \quad \Gamma_\xi(\xi + 2\pi) = \Gamma_\xi(\xi) \quad (3.51)$$

とおくことができる。積分領域を $[0, 2\pi]$ 区間に限る代わりに、(2.44) ($a = 2\pi$ とおく) を利用して、 x 方向に 2π ごとに離れた点に位置する無限個の点渦からの寄与をすべて取り込んでやると、(3.50) は

$$\frac{\partial Z(\xi, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi i} \text{pv} \int_0^{2\pi} \Gamma_\xi(\xi') \times \cot\left(\frac{1}{2} [Z(\xi, t) - Z(\xi', t)]\right) d\xi' \quad (3.52)$$

で置き換わる^{6,8)}。

3.5 Moore の曲率特異性

Moore²⁾ は、周期 2π の微小変位 $Z(\xi, 0) = \xi + i\epsilon \sin \xi$, $\Gamma_\xi(\xi) = 1$ を初期条件にとり、正の波数に限るが、無数の Fourier モード間の結合を取り込める (3.50) の漸近解析を行い、主要項の高波数での振る舞いから特異性の型や出現時刻 t_c を予想した；時刻 t_c で、 $\xi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ において、曲率が無限大になる。特異点 ξ_s 近傍では、曲率は局所的に $|\xi - \xi_s|^{-1/2}$ のように振る舞い、特異点への渦度の集中も強まって、渦度の線密度分布は $\text{const.} \cdot |\xi - \xi_s|^{1/2}$ のようにカスプ状になる^{8,10)}。これを **Moore の曲率特異性** とよぶ^{注9)}。解析の詳細を知るには、原論文²⁾ にあたるのが近道である。

この漸近解析の妥当性は、初期振幅が十分小さい場合で、 t_c にいたるしばらく前の時刻まで

^{注9)} $\frac{3}{2}$ -特異性ともいう。

しか保証されない。しかも、負の波数のモードを除外しているので、部分的な解析でしかない¹¹⁾。そこで、(3.50) や (3.52) の初期値問題を解いて、Moore の予想を検証する必要がある。以下で、高精度離散渦法による数値解について説明する。

特異性をつかまえるには、KH 不安定の固有モードから出発するのがむだが少ないであろう。Euler 的な固有関数 (3.22) を Lagrange 表現にやき直そう。仮定 $\sigma_1 = 0$ を思い出すと、初期 ($t = 0$) において、渦層の形 (3.23) は、 x 座標をパラメータとして、 $(X, Y) = (x, \epsilon e^{\sigma t} \sin kx)$ とかける。速度の跳び (3.25) を積分すると、攪乱速度のポテンシャルの跳びが $\phi_1 - \phi_2|_{y=0} = \pm \epsilon |U| \sin kx$ と計算でき、全流速に対する速度ポテンシャルの跳びが、 $\Phi = -Ux \mp \epsilon |U| \sin kx$ と求められる。上側の符号が不安定モードに、下側の符号が安定モードに対応する。これは、(3.48) で定義される $-\Gamma$ に等しい。一般性を失うことなく $U > 0$ とし、 $\Gamma = U\xi$ によって、Lagrange パラメータ ξ を導入すると¹²⁾、 ϵ について 1 次までの精度で、

$$Z(\xi, 0) = \xi + \epsilon(\mp 1 + i) \sin k\xi \quad (3.53)$$

とあらわすことができる¹³⁾。

初期攪乱の波数を $k = 1$ とし、 $U = 1$ と規格化すると、周期 2π の流れになる。Birkhoff-Rott 方程式 (3.52) の数値シミュレーションとしては、素朴には、曲線を点列で近似して台形則を用いて積分を有限個の和で置き換えればよいであろう。そうすると、1 つ 1 つの点を点渦とみなすことができる。区間 $[0, 2\pi]$ を N 等分しよう。パラメータ空間で、隣り合う点渦の間隔は $\Delta\xi = 2\pi/N$ で、積分方程式 (3.52) は、連立常微分方程式系

$$\frac{d\bar{Z}_j}{dt} = \frac{1}{2iN} \sum_{m=1}^N \cot\left(\frac{Z_j - Z_m}{2}\right) \quad (3.54)$$

に還元される。記号 $'$ は和から $m = j$ を除くことを意味する。初期条件としては、(3.53) のマイナス符号側に $\xi = \xi_j = (j - 1)\Delta\xi$ ($j = 1, \dots, N$) を代入して、 $Z_j = Z(\xi_j, 0)$ ととればよい。

方程式系 (3.54) を無造作に積分すると、どんなに N を大きくとっても、すぐに計算が破綻し

てしまう．高波数の攪乱ほど増幅率が大きいという事情，(3.20) の渦列版 (2.53)，により，まるめ誤差が猛烈な勢いで増殖して，微細スケールでの不規則性が急激に発達するからである．

Krasny¹³⁾ は“Fourier フィルタ”の方法を考案し，高波数でのまるめ誤差の増殖を抑えることに成功した； 時間発展は点渦近似で行うが，各時間ステップごとに，渦層形状 $Z(\xi, t) - \xi$ に離散 Fourier 変換をほどこす．Fourier 係数の大きさがあらかじめまるめ誤差程度の大きさに設定した値より小さければ，まるめ誤差からくるノイズとみなして，これをゼロにセットするというものである．高波数側の誤差を選択的に捨てるので，事実上のスムージングである．加えて，周期 Cauchy 核をもつ特異主値積分 (3.52) を指数関数オーダ (= ‘無限次’) の精度で離散近似する方法 “alternate point, trapezoidal quadrature” が見つかり，これを組み合わせると，さらなる大幅な精度の向上が実現できる¹⁴⁾ ．

これらの操作により，特異点出現直前まで計算時間をのばすことができる．数値計算結果は Moore の予想を支持している．特異点は，

$$1 + \frac{1}{2}t_c + \log t_c \approx \log \left(\frac{2}{\epsilon} \right) \quad (3.55)$$

をみたと $t = t_c$ のころに出現し^{注10)}，(3.28) における p はほぼ $5/2$ である．また，初期変位の振幅 ϵ が小さいほど，特異点出現時刻 (t_c) が遅くなることもわかる．その一方で，数値計算が別に示唆したことは，振幅 ϵ が小さい間は，特異点は $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ に周期的に発生するだけであるが， ϵ を大きくすると，各特異点が 2 つに分裂する．図 4 は， t_c 直前での特異点近傍の様子¹³⁾ をスケッチしたものである．上側 (a) が ϵ が小さい場合で，(b) が ϵ が大きい場合である．実線が特異点近傍での渦層の形で，破線が対応する曲率である．

この状況に対して，曲線パラメータ ξ を複素数に拡張して界面変位や渦度分布を解析接続し，複

^{注10)}Moore²⁾ が採用した初期条件に対しては，右辺の $\log 2$ は $\log 4$ となり， t_c が大きくなる．

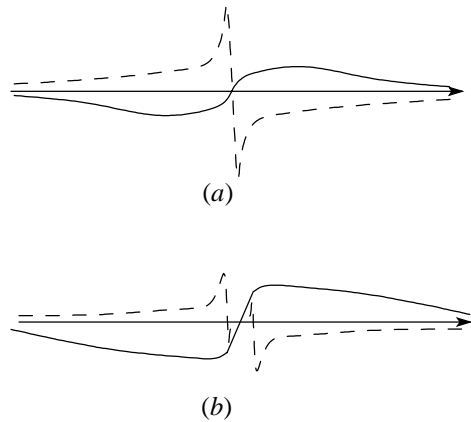


図 4 特異点の初期振幅依存性のスケッチ

素 ξ 平面での主要な特異点の運動を追跡することによって，実特異点出現をまねく非線形相互作用を手際よく解析することができ¹⁵⁾，さらに，特異点の起源や型のほか，特異点近傍での渦層形状の漸近形のような突っ込んだ情報を正確に導出することができる．また，上述の初期振幅が大きいときの特異点の奇妙な振る舞いも説明がつく⁷⁾．引き続き，複素平面での特異点誕生の瞬間とその直後の振る舞いについて紹介する．

3.6 複素パラメータ空間での特異点の挙動

複素 ξ 平面での特異点に着目すると，渦層を構成する要素間の非局所相互作用を，近似的に局所化することができる．周期境界条件 (3.51) に加えて， $\Gamma(\xi + 2\pi) = 2\pi + \Gamma(\xi)$ によって，渦層の強さを規格化しておこう．

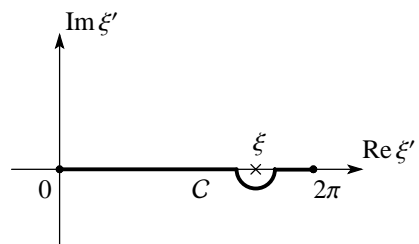


図 5 複素 ξ' 平面上での積分経路 C

Birkhoff-Rott 方程式 (3.52) の被積分関数は，点 $\xi' = \xi$ に 1 位の極をもつ．図 5 のように，複

素 ξ' 平面上に、極 $\xi' = \xi$ を下によける経路 C をとると、主値積分 (3.52) は

$$\frac{1}{4\pi i} \int_C \Gamma_{\xi}(\xi') \cot\left(\frac{1}{2} [Z(\xi, t) - Z(\xi', t)]\right) d\xi' + \frac{\Gamma_{\xi}(\xi)}{2Z_{\xi}(\xi, t)} \quad (3.56)$$

となる。

$$Z(\xi, t) = \xi + s(\xi, t), \quad \Gamma(\xi) = \xi + \sigma(\xi) \quad (3.57)$$

において、周期変動成分 s, σ を抜き出そう^{注11)}。

$$s^*(\xi, t) = \overline{s(\xi, t)} \quad (3.58)$$

と定義すると、 s が ξ の解析関数ならば、 s^* も ξ の解析関数となる。 s と s^* が複素上半面で決まれば、 s は全複素 ξ 平面上で決まる。さらに、 ξ が実数のとき、 $s^*(\xi, t) = \overline{s(\xi, t)}$ となって、一致の定理より、(3.52) は複素上半 ξ 平面に解析接続できる：

$$\frac{\partial s^*(\xi, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi i} \int_C (1 + \sigma_{\xi}(\xi')) \times \cot\left(\frac{W(\xi, \xi', t)}{2}\right) d\xi' + \frac{1 + \sigma_{\xi}(\xi)}{2(1 + s_{\xi}(\xi, t))}. \quad (3.59)$$

ここで、

$$W(\xi, \xi', t) = \xi - \xi' + s(\xi, t) - s(\xi', t) \quad (3.60)$$

で、 $s(\xi, t)$ も $\sigma(\xi)$ も複素数に値をとる。さらに、(3.59) は恒等的に

$$\frac{\partial s^*}{\partial t} = \frac{\sigma_{\xi} - s_{\xi}}{2(1 + s_{\xi})} + J(\xi, t) \quad (3.61)$$

と変形することができる。ここで

$$J(\xi, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_C (1 + \sigma_{\xi}(\xi')) \times \left\{ i + \cot\left(\frac{W(\xi, \xi', t)}{2}\right) \right\} d\xi' \quad (3.62)$$

注11) 原論文⁷⁾の表記法にしたがう。ここでは、 s は長さではなく、 σ は増幅率ではない。

である。 $\sigma(\xi)$ が周期的 (周期 2π) なので、 $\int_C \sigma_{\xi}(\xi') d\xi' = 0$ に気づかれない。このように変形するご利益は、ごく初期のうちは、特異点近傍では、 J が無視できるほど小さいことである。出発時 ($t = 0$) およびその直後においては、特異点は実 ξ 軸から離れたところに位置する。上半平面の特異点に着目すると、その近傍では、 $\text{Im}[\xi] \gg 1$ で、さらに、 $s(\xi', t) = O(1)$ と $s^*(\xi', t) = O(1)$ となる経路 C を考えると、(3.60) より、 W の虚部 $W_i \gg 1$ で

$$\left| i + \cot\left(\frac{1}{2} W\right) \right| \approx 2e^{-W_i} \ll 1 \quad (3.63)$$

がいえる。したがって、その積分 (3.62) も小さい。(3.52) の複素共役をとった $Z(\xi, t)$ の発展方程式に対しても、手続きが平行に行える。こうして、Birkhoff-Rott 方程式の漸近展開の主要部が、局所的な関係 (= 偏微分方程式) にまで落とせた^{7, 16)}。

$$\frac{\partial s^*}{\partial t} = \frac{\sigma_{\xi} - s_{\xi}}{2(1 + s_{\xi})}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\sigma_{\xi} - s_{\xi}^*}{2(1 + s_{\xi}^*)}. \quad (3.64)$$

初期条件として、不安定固有モード、すなわち、(3.53) の上側の符号をとろう。本小節の記号では、

$$s(\xi, 0) = \epsilon(i - 1) \sin \xi, \quad \sigma(\xi) = 0 \quad (3.65)$$

とかける。

ごく初期 ($t \ll 1$) のうちは、(3.64) の解は t についての Taylor 展開

$$s = s_0(\xi) - \frac{\sigma_{\xi} - s_{0\xi}^*}{2(1 + s_{0\xi}^*)} t + \dots, \quad (3.66)$$

$$s^* = s_0^*(\xi) + \frac{\sigma_{\xi} - s_{0\xi}}{2(1 + s_{0\xi})} t + \dots \quad (3.67)$$

で近似できる。ここで、 $s_0(\xi) = s(\xi, 0)$ 、 $s_0^*(\xi) = s^*(\xi, 0)$ である。この級数解は、 t の係数の分母が 0 に近づくと破綻する。分母の片方が 0 になる点 ξ_0 が一般的な特異点を与える。そのうち、 $1 + s_{0\xi}(\xi_0) = 0$ 、 $1 + s_{0\xi}^*(\xi_0) \neq 0$ なる特異点 ξ_0 について、誕生と動き出しについて考察していこう。

特異点まわりの座標 $\zeta = \xi - \xi_0$ を導入すると, ξ_0 のまわりで, (3.66) および (3.67) は,

$$s = s_{00} - \zeta + \dots, \quad (3.68)$$

$$s^* = s_{00}^* + s_{01}^* \zeta + \frac{1 + \sigma_{01}}{2s_{02}\zeta} t + \dots \quad (3.69)$$

と展開できる. ここで,

$$s_{0n} = \frac{\partial^n s_0}{\partial \xi^n}(\xi_0), \quad \sigma_{01} = \sigma_\xi(\xi_0) \quad (3.70)$$

とおいた. 後者 (3.69) から, $\zeta = O(t^{1/2})$ で展開が破れることが読み取れる. 展開 (3.68), (3.69) をもう 1 つ進めれば, $t \ll 1$ のとき, スケーリング

$$\zeta = \eta \left(\frac{2(1 + \sigma_{01})}{s_{02}(1 + s_{01}^*)} \right)^{1/2} t^{1/2} \quad (3.71)$$

が示唆され, さらに, 特異点の型や初期での振る舞いがわかる. 結果は, (3.28) で $p = 5/2$ といった特異点, すなわち分岐点が

$$\eta = \eta_0 \approx 0.7359 + 0.4920i \quad (3.72)$$

に位置するということである⁷⁾. 特異点の型は時間的に変わらない.

初期条件 (3.65) に対して, 特異点を計算してみよう.

$$\xi_0 = i \log \left(\frac{1 + (1 - 2i\epsilon^2)^{1/2}}{(1 + i)\epsilon} \right) \quad (3.73)$$

とおくと, $1 + s_{0\xi}(\xi_0) = 0$ をみたく特異点は $\pm \bar{\xi}_0$ でおこる. $s_0^*(\xi) = -\epsilon(i+1) \sin \xi$ より, $1 + s_{0\xi}^*(\xi_0) = 0$ をみた特異点は $\pm \xi_0$ でおこり, 特異点は, 実軸および虚軸について対称に 4 つ組みで生じる. 式 (3.71) より, $t = 0$ で $\xi = \xi_0$ に登場した特異点 ξ_s は, $t \ll 1$ のとき,

$$\xi_s \approx \xi_0 - \left(\frac{2i}{1 - 2i\epsilon^2} \right)^{1/4} \eta_0 t^{1/2} \quad (3.74)$$

のように運動する^{注12)}.

注12) 式 (3.71) からまず導けるのは, 複素共役点 $\bar{\xi}_0$ を出発する特異点の運動である.

初期振幅が小さいとき ($\epsilon = 0.2$) と, 大きいとき ($\epsilon = 0.5$) の 2 例について, 特異点の軌跡を描いたのが図 6 である. 界面変位の Fourier 空間における高波数 ($k \gg 1$) での漸近形の主要項は, 実軸に最も近い特異点によって決まる. 長時間にわたる特異点の追跡は, 数値解の Fourier 変換をこの漸近形にフィットすることによって行う. $\epsilon = 0.2$ のとき, 特異点 (3.73) は, $t = 0$ で, $\xi_0 \approx 0.8054 + 1.9566i$ で誕生する (図 6 の中央部上より). 直後は, (3.74) にしたがって, 左ななめ下向きに運動して (破線部), やがて, 虚軸上のある点で, 特異点 $-\bar{\xi}_0$ とぶつかって合体, その後, 虚軸上を下降して, 有限時間で, 原点 $\xi = 0$ に到達する^{注13)}. これが, 図 4 (a) で, $x = 0$ に出現する特異点である. 振幅が大きくなると様子が変わる. $\epsilon = 0.5$ のとき, 特異点は, $\xi_0 \approx 0.9046 + 1.0613i$ で誕生し (図 6 の中央部下より), 左ななめ下向きに運動して, 有限時間内に実軸に到達する. ここでは $\bar{\xi}_0$ と衝突する. 同時刻に, $-\xi_0$ にも特異点が登場する. 図 4 (b) では, これが特異点の分裂として観察された.

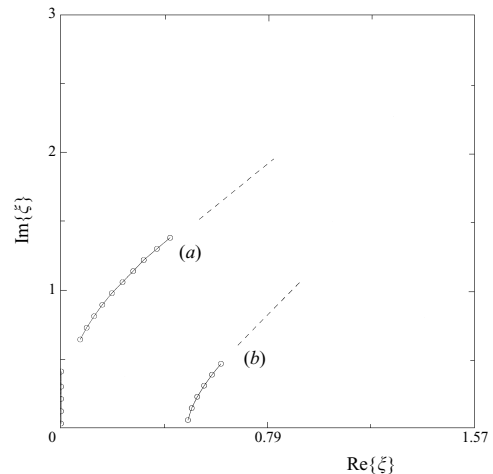


図 6 複素 ξ 平面上での特異点の運動. 文献⁷⁾より転載.

表面張力は, たとえ小さくても, Moore の曲率特異性を解消して, 界面はらせん状に巻き上がる. しかし, やがて, 界面上の離れた 2 点が接

注13) $\sigma = 0$ のとき, 虚軸上の特異点の運動を (3.64) にもとづいて解析することが, ある程度可能である.

近して、界面が自己交差をおこしてつなぎ換わるという新たな特異性，“ピンチング特異性”，がもたらされる^{17, 18)}．粘性はこの自己交差を抑えることはできるが，表面張力がある程度大きいと，別のタイプのトポロジ－的特異性を許す可能性がある¹⁹⁾．

3.7 渦面の3次元運動

渦層の3次元運動は曲面の時間発展の問題に帰着するので，渦面とよぶことにしよう．渦度ベクトル方向の流れの変化を許すことによって，渦線の伸長という要素が加わる．Birkhoff-Rott 方程式 (3.50) は3次元問題に自然に拡張できる⁹⁾．

2つのパラメータ ξ_1, ξ_2 を用いて渦面 S 上の点を $X(\xi_1, \xi_2, t)$ とあらわす．点 $X(\xi_1, \xi_2, t)$ における S の単位法線ベクトルは，

$$n = \frac{1}{J} X_{\xi_1} \times X_{\xi_2}, \quad J = |X_{\xi_1} \times X_{\xi_2}| \quad (3.75)$$

である．下付き添字 ξ_j は ξ_j に関する偏微分をあらわす． $J \neq 0$ を仮定する．2次元のときと同じく， n について正の側（領域 2）と負の側（領域 1）の流速の渦面 S での境界値を，それぞれ，(3.34) によって定義する．点 X における S 上単位面積当りの渦度は， u の跳びを $[u] = u^+ - u^-$ とかき， ϕ を速度ポテンシャルとすると，

$$\Omega = n \times [u] = n \times [\nabla\phi] \quad (3.76)$$

で与えられる．これは (3.36) あるいは (3.39) の3次元版で， S に接するベクトル場である．曲面パラメータ $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ の関数として， $\Omega = \Omega(\xi, t)$ とかくと，渦度ベクトルは S 上の2重積分

$$\omega(x, t) = \int_S \Omega(\xi, t) \delta(x - X(\xi, t)) J d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.77)$$

で与えられる．ここでは， δ は3次元の Dirac デルタ関数である．Biot-Savart の法則 (1.48) より，一般の点 x における流速は

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\Omega(\xi', t) \times (x - X(\xi', t))}{|x - X(\xi', t)|^3} \times J(\xi', t) d\xi'_1 d\xi'_2 \quad (3.78)$$

によって計算できる．これの渦面上の点 $x = X(\xi, t)$ での値が，その点での渦面の運動速度 $\partial X / \partial t$ を与えるわけであるが，特異積分の評価が再び問題になる．

速度ポテンシャルの境界値の跳び (3.41) は，今の場合， (ξ_1, ξ_2) の関数として，

$$\Phi(\xi, t) = \phi^+(X(\xi, t), t) - \phi^-(X(\xi, t), t) \quad (3.79)$$

とあらわされる． (ξ_1, ξ_2) を Lagrange パラメータとみなして，(3.40) のように，渦面上の点 X が，その点の $u^+(X, t)$ と $u^-(X, t)$ の平均速度 $V(\xi, t)$ で運動すると仮定しよう．平均速度 V は (3.78) の主値によって与えられる．2次元のときとまったく平行な議論，(3.43)–(3.47) によって， Φ_{ξ_1} と Φ_{ξ_2} が Lagrange 不変量であることが証明できる．積分 (3.78) の中で，

$$\begin{aligned} J\Omega &= (X_{\xi_1} \times X_{\xi_2}) \times [\nabla\phi] \\ &= (X_{\xi_1} \cdot [\nabla\phi]) X_{\xi_2} - (X_{\xi_2} \cdot [\nabla\phi]) X_{\xi_1} \end{aligned} \quad (3.80)$$

と変形できることに気づくと，計算がずいぶん楽になる．合成関数の微分の規則を使うと， $X_{\xi_j} \cdot [\nabla\phi] = \Phi_{\xi_j}$ ($j = 1, 2$) となって，これは時間によらない．もはや，渦度の時間発展の計算は不要である．結局， S 上の点 $X(\xi_1, \xi_2, t)$ の運動速度は，主値積分

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \text{pv} \int_S \frac{W(\xi', t) \times (X - X(\xi', t))}{|X - X(\xi', t)|^3} \\ &\quad \times d\xi'_1 d\xi'_2 \end{aligned} \quad (3.81)$$

で与えられる．ただし，

$$W(\xi, t) = \Phi_{\xi_1}(\xi) X_{\xi_2}(\xi, t) - \Phi_{\xi_2}(\xi) X_{\xi_1}(\xi, t) \quad (3.82)$$

である．点 X のごく近傍では曲面 S は平面である． $\xi_1 \xi_2$ 平面上で，考えている点を中心とする半径 $\epsilon (> 0)$ の円をくり抜いた領域で積分を行い，極限 $\epsilon \rightarrow 0$ をとったものが積分の主値である．こうして，Birkhoff-Rott 方程式 (3.50) は3次元に括

張された⁹⁾ . 実際, $X(\xi, t) = (X(\xi_1, t), Y(\xi_1, t), \xi_2)$, $\Phi(\xi) = \Gamma(\xi_1)$ ととると, (3.81) は (3.50) に帰着する.

Moore の方法を拡張して, (3.81) にもとづいた漸近解析を行うことにより, 曲率特異性に対する渦線方向への摂動の効果が調べられた²⁰⁾. 特異点発現時刻 t_c は大きな変更を受けないが, 渦線の形状が補正を受ける. さらに渦線方向のみの微小攪乱を与えたときの結果は, 本質的に 3 次元の特異点発現の可能性を示唆している. 攪乱の波数ベクトルの方向が一定であるときには, 波数ベクトルと直交する周期直線列に沿って曲率特異性があらわれることが一般的に示せる¹²⁾. 点状, あるいは, 有限の線分状の特異性が可能かどうかについて, 数値計算および漸近解析によって調べられたが, Moore の 2 次元曲率特異性を超えるものは見つかっていない²¹⁾.

軸対称ジェットのように, 対称軸をまわる速度成分をもたない軸対称渦面の運動は次のように計算できる. 対称軸を x 軸とする. 動径座標を ρ とし, パラメータの 1 つを $\xi_1 = \xi$ とかくと, 渦面上の点は

$$X(\xi, t) = (x(\xi, t), \rho(\xi, t) \cos \xi_2, \rho(\xi, t) \sin \xi_2) \quad (3.83)$$

とあらわせる. また, $\Phi(\xi) = \Gamma(\xi)$ ととる. これらを, (3.81) と (3.82) に代入すると, 対称軸を含む断面内の点 $(x(\xi, t), \rho(\xi, t))$ の運動速度として, 若干の計算の後,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.84)$$

に導かれる. ここで, $\phi' = \xi'_2 - \xi_2$ とおき, $\rho = \rho(\xi, t)$, $\rho' = \rho(\xi', t)$ などと略記すると,

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \text{pv} \int d\xi' \Gamma_\xi(\xi') \int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' / \{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \phi' + (x - x')^2\}^{1/2} \quad (3.85)$$

である. Stokes の流れ関数 (3.85) であらわされる流れの構成要素となっているのは, 点 $X(\xi', t)$ にある強さ $\Gamma_{\xi'} d\xi'$ の渦輪である.

これを正則化した方程式にもとづいた軸対称渦面の巻き上がりの数値シミュレーションについて, 次小節で紹介する.

3.8 渦層の巻き上がり

実際の流れでは, 剪断層はらせん状に巻き上がる. それにつれて, 渦度はらせんの中心部に集められ, 渦管が形成されていく. Birkhoff-Rott 方程式では, たとえ, 界面のなめらかな微小変形から出発したとしても, 大きく変形する以前に解が爆発してしまう (図 4 参照). 巻き上がりを計算するには, 渦層 (渦面) というモデルを正則化する必要がある.

正則化の手段としては, 「表面張力を入れる」, 「渦層に厚みをもたせる」, 「粘性を入れる」などの手が考えられるが (§3.6 の末尾を参照), もっと簡便な方法がある. Birkhoff-Rott 方程式 (3.50), (3.52) の特異積分核の分母を定数分だけ「底上げ」することである. この方法は “vortex blob method” の範疇に属する. 2 次元問題において, 簡単のため, $\Gamma_\xi = 1$, すなわち, 曲線パラメータを循環と一致させ ($\xi = \Gamma$), 周期を 1 としよう: $X(\xi + 1, t) = 1 + X(\xi, t)$, $Y(\xi + 1, t) = Y(\xi, t)$. 方程式 (3.52) の周期を 1 にとりなおして, さらに, 正則化したものを書き下すと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 d\xi' \sinh 2\pi(Y - Y') \\ &\quad / \{\cosh 2\pi(Y - Y') - \cos 2\pi(X - X') + \delta^2\}, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi' \sin 2\pi(X - X') \\ &\quad / \{\cosh 2\pi(Y - Y') - \cos 2\pi(X - X') + \delta^2\} \end{aligned} \quad (3.86)$$

となる²²⁾. 正の定数 δ を分母に含む (3.86) を “ δ 方程式” という. $\delta \neq 0$ ならば, 特異性は生じない. この正則化は物理的效果と直接的には結びつけにくい, 平らな界面の線形安定性を調べると, 粘性と類似のはたらきがあるのがわかる.

例として, 初期変位を $X = \xi + 0.05 \sin 2\pi\xi$, $Y = -0.05 \sin 2\pi\xi$ とし, 正則化パラメータを $\delta = 0.1$ ととったときの渦層形状の発展を図 7 に示

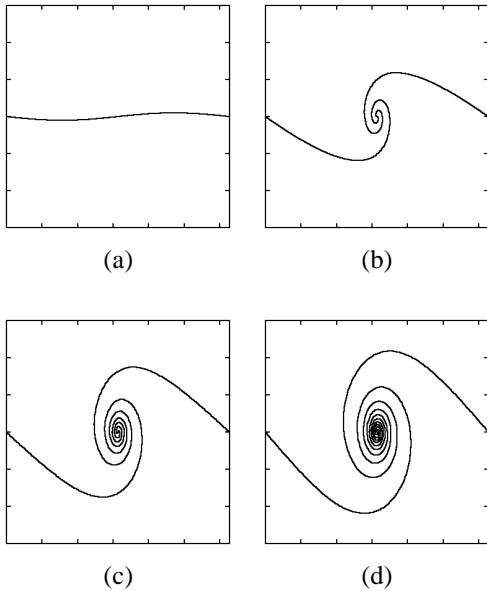


図7 δ 方程式 (3.86) にしたがう渦層の巻き上がり

す。図7 (a) から (d) へすすむにつれて、時間は $t = 0, 6, 8, 10$ と経過している。 $t = t_c$ 以降も時間発展が可能になり、渦層が巻き上がって、二重らせん (double-branched spiral) が形成されるのが観察される。各らせんの巻き数は有限回である。 δ を小さくするにつれて、同時刻で比較すると、同じサイズの領域内でも巻き方が激しくなり、となり合う層の間隔が小さくなる。 $\delta \rightarrow 0$ の極限で、巻き数が無限になると予想される。

巻き上がるにつれて、集中した渦度が流れ場を支配するようになる。二重らせんの形は、らせんの中心に位置する点渦によって巻き取られる曲線状のポッシュスカラーの形で近似することができる²³⁾。らせんの中心を原点に移し、周期境界条件を考慮すると、ポッシュスカラー曲線上の点 $(x(\xi, t), y(\xi, t))$ の運動は、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{\sinh 2\pi y}{\cosh 2\pi y - \cos 2\pi x + \tilde{\delta}^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{\sin 2\pi x}{\cosh 2\pi y - \cos 2\pi x + \tilde{\delta}^2} \end{aligned} \quad (3.87)$$

によって支配される。右辺は、原点を含んで x 軸上に周期 1 で並んでいる正則化した点渦 (= vortex blob) の列がつくる速度である。初期条件

は、 x 軸上の線分 $x(\xi, 0) = -0.5 + \xi, y(\xi, 0) = 0$ ($0 \leq \xi < 1, \xi \neq 0$) をとればよい。 $\tilde{\delta}$ および時間スケールをうまく調整すると、(3.87) を解いて得られる二重らせんの形は、(3.86) の解をよく近似できる。(3.87) の厳密解は Weierstrass の楕円関数 (\mathcal{P} 関数) で書きあらわせる。この解の $\tilde{\delta} \rightarrow 0$ の極限は上の予想を支持する。

δ 方程式 (3.86) を t_c を越えた時刻 t まで積分して得られる二重らせん解の $\delta \rightarrow 0$ の極限と、 $\delta = 0$ の方程式の解とはどのようにつながっているのだろうか？ 時間変数 t を複素数に拡張することによって、両者の関係を鳥瞰することができる^{11, 23)}。 $\delta \rightarrow 0$ の極限では、 $\text{Re}[t] \geq t_c$ の領域全体を特異点が稠密に埋め尽くしてしまって、 $t < t_c$ の解を $\text{Re}[t] \geq t_c$ の領域に解析接続することは不可能である。一方、 δ が有限の大きさをもつときの解の複素 t 平面上の特異点の分布から、(3.86) の解がなぜ二重らせんに巻き上がるのかが理解できる。楕円関数の2重周期構造は、(3.86) の解の複素 t 平面での特異点の2重周期構造の特徴をよくとらえている。

さて、渦層の巻き上がりの数値計算に適した δ 方程式を使えば、渦対や渦輪の形成過程を長時間にわたって効率よく追跡できるであろう。例えば、平板や円板の後流を渦層としてモデル化し、その長時間発展を調べてみると、規則正しいらせん状に巻き続けることはなく、微細な不規則性が発生することが避けられないことがわかる²⁴⁾。円筒渦面の巻き上がりは、(3.85) を正則化することによって計算できる。図8は、数値計算の最終段階での渦面の断面図である。渦核中心をとり囲むうすい帯状領域内に乱れが生じている^{注14)}。後方よどみ点近傍でも、渦面が激しくゆらぎながら、交差を繰り返している。

渦面は垂直方向には流体とともに動くので、渦面の不規則性は流れ場の乱れを反映する。巻き上がった渦面の切り口は、Hamilton 力学系のカオスの様相を呈している。渦輪とともに運動する座標系でみると、定常基本流による流体粒子の断面

注14) 共鳴帯とカオス領域を含む細い円環状の帯は2本ある。

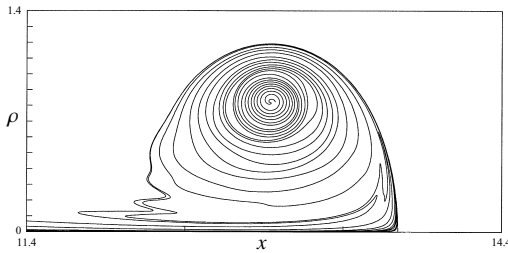


図8 円筒渦面の巻き上がりにおいて発生するカオス。文献²⁴⁾より転載。

上の軌道は、楕円型、双曲型両方のタイプの固定点およびヘテロクリニック軌道を含む。前部および後部よどみ点が双曲型固定点に対応し、それを結ぶ軌道がヘテロクリニック軌道である。そして、そこに、内在的な時間周期的摂動が加わり、Lagrange カオスが発生する。実験室でしばしば観察される渦輪の後方に長くのびる渦度の尻尾は、ヘテロクリニック軌道の横断的交差に由来すると解釈できる。渦対でもカオスがみられるが、渦輪に比べて摂動が弱い。

本稿では割愛したが、多様な渦構造をつくり出して流れに彩りを与えるはたらきとして、バロクリニック効果を欠かすことはできない^{25, 26)}。“Rayleigh-Taylor 不安定”によって密度不連続面の振動が増幅されると、バロクリニック効果によって界面で渦度が生成され、渦層が発達する。表面張力がないとき、片方の流体の密度が0でない限り、KH 不安定と同様な特異性が有限時間内に出現すると予想されている^{27, 28)}。特異点出現には密度差さえあれば十分で、必ずしも重力を必要としない²⁹⁾。この引き金となる初期段階での微小攪乱の増幅メカニズムを、“Richtmyer-Meshkov 不安定”という。

引用文献

- 1) P. G. Drazin & W. H. Reid: Hydrodynamic Stability (Cambridge University Press, 1981) Chap. 1.
- 2) D. W. Moore: The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet, Proc. Roy. Soc. Lond. A **365** (1979) 105-119.
- 3) T. B. Benjamin & T. J. Bridges: Reappraisal of the Kelvin-Helmholtz problem. Part 1. Hamiltonian structure, J. Fluid Mech. **333** (1997) 301-325.
- 4) G. K. Batchelor: An Introduction to Fluid Dynamics (Cambridge University Press, 1967) Chap. 7.
- 5) 木田重雄: いまさら流体力学? (丸善, 1994) 第11章.
- 6) G. Birkhoff: Helmholtz and Taylor instability, In Proc. Symp. Appl. Maths XIII (Am. Math. Soc., 1962) 55-76.
- 7) S. J. Cowley, G. R. Baker & S. Tanveer: On the formation of Moore curvature singularities in vortex sheets, J. Fluid Mech. **378** (1999) 233-267.
- 8) D. I. Meiron, G. R. Baker & S. A. Orszag: Analytic structure of vortex sheet dynamics. Part 1. Kelvin-Helmholtz instability, J. Fluid Mech. **114** (1982) 283-298.
- 9) Y. Kaneda: A representation of the motion of a vortex sheet in a three-dimensional flow, Phys. Fluids A **2** (1990) 458-461.
- 10) P. G. Saffman: Vortex Dynamics (Cambridge University Press, 1992) Chap. 8.
- 11) 坂上貴之: 渦層の時間発展と特異点 ~ それでも渦層は巻き上がる? ~, 物性研究 **82** (2004) 1-44.
- 12) M. Brady & D. I. Pullin: On singularity formation in three-dimensional vortex sheet evolution, Phys. Fluids **11** (1999) 3198-3200.
- 13) R. Krasny: A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation, J. Fluid Mech. **167** (1986) 65-93.
- 14) M. J. Shelley: A study of singularity formation in vortex-sheet motion by a spectrally accurate vortex method, J. Fluid Mech. **244** (1992) 493-526.
- 15) D. W. Moore: Numerical and analytical aspects of Helmholtz instability, In Theoretical and Applied Mechanics, Proc. 16th ICTAM (ed. F. I. Niordson and N. Olhoff, 1985) 263-274.
- 16) R. Caflisch & O. F. Orellana: Long time existence for a slightly perturbed vortex sheet, Com-

- mun. Pure. Appl. Maths. **39** (1986) 1–18.
- 17) T. Y. Hou, J. S. Lowengrub & M. J. Shelley: The long-time motion of vortex sheets with surface tension, *Phys. Fluids* **9** (1997) 1933-1954.
- 18) G. R. Baker & A. Nachbin: Stable methods for vortex sheet motion in the presence of surface tension, *SIAM J.Sci. Comput.* **19** (1998) 1737-1766.
- 19) H. D. Ceniceros & A. M. Roma: Study of the long-time dynamics of a viscous vortex sheet with a fully adaptive nonstiff method, *Phys. Fluids* **16** (2004) 4285-4318.
- 20) T. Ishihara & Y. Kaneda: Singularity formation in three-dimensional motion of a vortex sheet, *J. Fluid Mech.* **300** (1995) 339-366.
- 21) T. Y. Hou, G. Hu & P. Zhang: Singularity formation in three-dimensional vortex sheets, *Phys. Fluids* **15** (2003) 147-172.
- 22) R. Krasny: Dingularization of period vortex sheet roll-up, *J. Comput. Phys.* **65** (1986) 292–313.
- 23) T. Sakajo: Analytic continuation of the Birkhoff-Rott equation in complex-time domain, *Euro. J. Appl. Math.* **15** (2004) 39-53.
- 24) R. Krasny & M. Nitsche: The onset of chaos in vortex sheet flow, *J. Fluid Mech.* **454** (2002) 47-69.
- 25) N. J. Zabusky: Vortex paradigm for accelerated inhomogeneous flows: visiometrics for the Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov environments, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31** (1999) 495-536.
- 26) Y. Fukumoto & S. Lugomer: Instability of vortex filaments in laser-matter interactions, *Phys. Lett. A* **308** (2003) 375-380.
- 27) G. R. Baker, R. E. Caflisch & M. Siegel: Singularity formation during Rayleigh-Taylor instability, *J. Fluid Mech.* **252** (1993) 51-78.
- 28) S. Tanveer: Singularities in the classical Rayleigh-Taylor flow: formation and subsequent motion, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **441** (1993) 501-525.
- 29) C. Matsuoka & K. Nishihara: Vortex core dynamics and singularity formations in Richtmyer-Meshkov instability, to appear in *Phys. Rev. E* (2005).